

LE RUBIK'S-TORE

Olivier SICARD - Alexandre BORDAS

Février 2024

IREM DE LA REUNION

Résumé : Tout le monde connaît le Rubik's Cube et à quel point il est plutôt difficile à résoudre. La dimension trois, c'est toujours compliqué, alors l'objectif était de créer un Rubik's plus simple, quelque chose en deux dimensions peut-être : un Rubik's Carré... une sorte de Rubik's Cube, mais plat ! Pourtant, en écrivant les règles du "Rubik's Cube plat", on se rend rapidement compte que les tuiles du Rubik's plat peuvent se positionner sur un Tore (une chambre à air de vélo) Nous l'appellerons le Rubik's-Tore... Mais alors ce Rubik's-Tore est-il plus facile à résoudre que son grand frère le Rubik's-Cube ?

Vous pouvez tester le jeu à cette adresse : <https://kroxx.itch.io/rubix-tore>

Contents

1	Construction d'un Rubik's-Tore	3
1.1	Représentation à plat	3
1.2	Les règles de déplacement	3
1.3	Les questions	4
1.4	On a dit torique, pas carré...	5
1.4.1	Du carré au cylindre	5
1.4.2	Du cylindre au tore	5
2	Le groupe des permutations du Rubik's-Tore	6
3	Résolution du Rubik's-Tore	7
3.1	L'idée	7
3.2	Cycles globaux et cycles locaux	8
3.2.1	Le problème	8
3.2.2	Création d'un cycle local	8
3.2.3	D'autres 3-cycles locaux	10
3.3	Algorithme de résolution	12
4	Le théorème du Rubik's-Tore	13
4.1	Théorème	13
4.2	Démonstration	13
4.3	Généralisation au "tore rectangulaire"	15
5	Retour sur la résolution du Rubik's-Tore	16
5.1	Rappel sur l'algorithme de résolution	16
5.2	Si n est impair	16
5.3	Le soucis du cas n pair	16
5.4	Algorithme de résolution du Rubik's-Tore amélioré	17
6	Conclusion	18

1 Construction d'un Rubik's-Tore

1.1 Représentation à plat

Le Rubik's-Tore d'ordre n peut se représenter à plat par un damier carré de n tuiles de côté, chaque tuile étant numérotée de 1 à n^2 .

Voici par exemple le Rubik's-Tore d'ordre 3 :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1.2 Les règles de déplacement

Pour mélanger le Rubik's-Tore, on peut effectuer quatre mouvements de base :

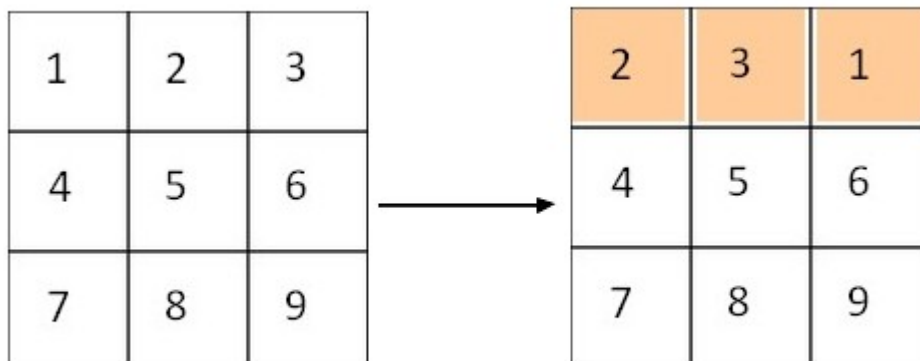
LEFT : déplace toute une ligne vers la gauche et téléporte la première tuile en fin de ligne à droite

RIGHT : déplace toute une ligne vers la droite et téléporte la dernière tuile en début de ligne à gauche

UP : déplace toute une colonne vers le haut et téléporte la tuile du haut en bas de la colonne

DOWN : déplace toute une colonne vers le bas et téléporte la tuile du bas en haut de la colonne

Voici par exemple ce que donne l'application d'un LEFT sur la ligne 1 sur un Rubik's-Tore d'ordre 3 :



Maintenant que le Rubik's-Tore est construit, nous pouvons commencer à nous amuser avec. On mélange, on mélange,... et maintenant il faut se poser les bonnes questions.

1.3 Les questions

Une fois le Rubik's-Tore bien mélangé, toute personne ayant fait un peu de mathématique se pose alors les deux questions qui suivent :

Question n°1 : Résolution

Évidemment, la première question qui vient à l'esprit est : "Comment résoudre un Rubik's-Tore ?" C'est à dire, si nous vous donnons un Rubik's-Tore préalablement mélangé, comment feriez-vous pour lui redonner sa position d'origine avec tous les numéros dans le bon ordre ?

Question n°2 Mélanges impossibles

Une deuxième question assez légitime est celle-ci : "Existe-t-il des configurations du Rubik's-Tore impossibles ou au contraire tous les mélanges sont possibles ?" Nous verrons que cela dépend de l'ordre du Rubik's-Tore.

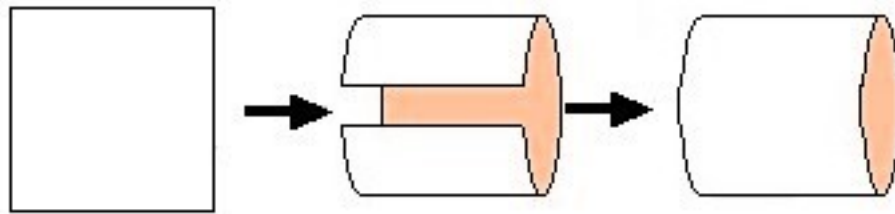
Le but de cet article est d'apporter des réponses à ces deux questions dont nous verrons par la suite qu'elles sont liées l'une à l'autre, mais avant de rentrer dans les détails expliquons rapidement en quoi le Rubik's-Tore est un tore alors que nous vous avons présenté un carré !

1.4 On a dit torique, pas carré...

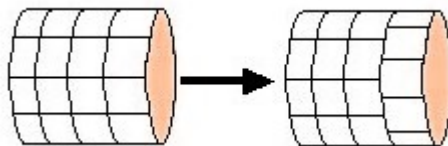
Pourquoi annoncer un "Rubik's-Tore" quand les règles de déplacement des tuiles se font sur un carré ? Comme souvent tout n'est qu'une question de point de vue...

1.4.1 Du carré au cylindre

Les mouvements UP et DOWN 'téléportent' les tuiles du carré ; c'est une façon de le concevoir, mais il en existe une autre : considérer que les deux bords haut et bas du carré sont collés, ce qui donne un cylindre.

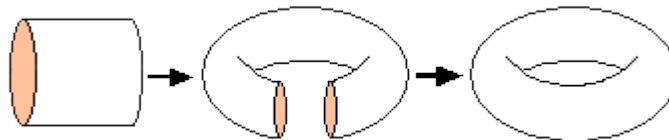


Les mouvements UP et DOWN permettent alors ce genre de rotation sur le cylindre :

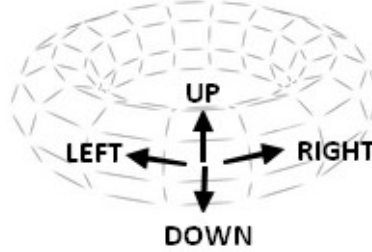


1.4.2 Du cylindre au tore

La téléportation gauche-droite peut aussi être éliminée en recollant les deux bords du cylindre pour former un tore.



Dès lors, il n'y a plus aucune "téléportation" , mais les tuiles se déplacent sur un tore en 3 dimensions. Notre Rubik's est bien un Rubik's-Tore.



Maintenant que les présentations sont totalement faites, il est temps de s'attaquer aux mathématiques du Rubik's-Tore !

2 Le groupe des permutations du Rubik's-Tore

Le Rubik's-Tore est formé de n^2 tuiles numérotées de 1 à n^2 comme dans la matrice ci dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Mélanger le Rubik's-Tore, c'est appliquer certaines permutations de l'ensemble des éléments de cette matrice. L'ensemble de toutes les permutations possibles est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n^2}$, il est constitué de $n^2!$ éléments.

Les mouvements 'LEFT'-'RIGHT'-'DOWN'-'UP' sont des permutations particulières de $\mathfrak{S}_{n^2}$.

Nous noterons :

- $R_1, R_2, \dots, R_n$ les mouvements 'RIGHT' sur chacune des n lignes
- $L_1, L_2, \dots, L_n$ les mouvements 'LEFT' sur chacune des n lignes
- $D_1, D_2, \dots, D_n$ les mouvements 'DOWN' sur chacune des n colonnes
- $U_1, U_2, \dots, U_n$ les mouvements 'UP' sur chacune des n colonnes

Chacune de ces permutations est en fait un n -cycle, par exemple $L_1 = (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n)$, de plus les mouvements de type 'RIGHT' sont engendrés par les mouvements de type 'LEFT' et ceux de type 'DOWN' sont engendrés par ceux de type 'UP' puisque l'on a : $R_i = L_i^{-1} = L_i^{n-1}$, et $D_i = U_i^{-1} = U_i^{n-1}$

L'ensemble que nous noterons $\mathfrak{RT}_n$ (comme Rubik's-Tore d'ordre n) de toutes les configurations possibles du Rubik's-Tore est donc le sous groupe engendré par les U_i et les L_i .

$$\mathfrak{RT}_n = \langle L_i, U_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \rangle$$

Pour plus de clarté, faisons une pause et portons notre attention sur le point suivant : les valeurs données dans les cycles ne sont pas les numéros sur les tuiles, mais leur position dans le carré.

$L_1 = (1 \ 2 \ 3)$ signifie que la tuile à la position 1 aura à l'étape d'après la valeur de la tuile se trouvant en ce moment à la position 2, tandis que la tuile à la position 2 aura quant à elle la valeur de la tuile se trouvant en ce moment à la position 3, et non pas la tuile portant le numéro 1 porte maintenant le numéro 2 et la tuile portant le numéro 2 portera à l'étape d'après le numéro 3.

Traitions un exemple pour fixer les idées mais en donnant des noms différents aux tuiles. Plaçons nous dans $\mathfrak{RT}_3$, puis donnons à la tuile à la position 1 l'étiquette a , celle à la position 2 portera l'étiquette b et ainsi de suite jusqu'à l'étiquette i . Voyons ce que donne la composition $U_1 \circ L_1 = (1 \ 4 \ 7) \circ (1 \ 2 \ 3)$.

Nous avons

$$U_1 \circ L_1 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} b & c & a \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c & a \\ g & e & f \\ b & h & i \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$U_1 \circ L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 7 \ 2 \ 3)$$

3 Résolution du Rubik's-Tore

3.1 L'idée

Pour résoudre le Rubik's-Tore d'ordre n , une idée consiste à se ramener à devoir résoudre le Rubik's-Tore d'ordre $n - 1$. Dans notre cas ceci se traduit par l'algorithme suivant :

1. Placer correctement les tuiles de la ligne 1
2. Placer correctement les tuiles de la colonne 1
3. Recommencer les étapes 1 et 2 à l'intérieur du Rubik's-Tore inférieur (mais sans modifier la ligne 1 et la colonne 1.

1	2	3	4
5	a	b	c
9	d	e	f
13	g	h	i

Comment ne travailler
que dans la zone blanche ?

Les étapes 1 et 2 ne comportent pas de difficultés majeures, les degrés de libertés étant encore très élevés, nous ne nous étalerons pas sur comment placer correctement les tuiles de la ligne 1 et de la colonne 1. L'étape 3 quand à elle est plus délicate et c'est évidemment elle qui demandera toute notre détermination, car comment modifier le Rubik's-Tore sans modifier la ligne 1 et la colonne 1 alors que les quatre mouvement autorisés UP-LEFT-DOWN-RIGHT modifient forcément soit la ligne 1 soit la colonne 1 ?

3.2 Cycles globaux et cycles locaux

3.2.1 Le problème

Nos cycles L_i et U_i sont "globaux" dans le sens où ils modifient une ligne ou une colonne entière nous interdisant de conserver intacte la ligne 1 et la colonne 1.

Le défi est donc de fabriquer à l'aide de nos cycles de départ de nouvelles permutations "locales" laissant intactes la ligne 1 et la colonne 1.

Alors comment créer une permutation "locale" en composant nos permutations "globales" ?

3.2.2 Création d'un cycle local

1. Il faut bien commencer par quelque chose, disons U_1 .

2. Aucun intérêt de le composer avec D_1 , nous obtiendrions l'identité, et peu d'intérêt de le composer avec un autre U_i car leur support sont disjoints, Du coup composons le avec L_1 par exemple.
3. Nous avons donc $L_1 \circ U_1$, ce qui crée pas mal de désordre dans le Rubik's-Tore, essayons de composer par leurs réciproques pour minimiser le désordre.
4. Nous obtenons $R_1 \circ D_1 \circ L_1 \circ U_1$ qui n'a aucune raison d'être l'identité puisque notre groupe de permutations n'est pas commutatif. (*Remarque* cet élément correspond en fait à $R_1 \circ D_1 \circ (R_1)^{-1} \circ (D_1)^{-1}$, un tel élément est couramment appelé commutateur de R_1 et D_1 et est noté $[R_1, D_1]$) Voyons ce que l'on obtient :

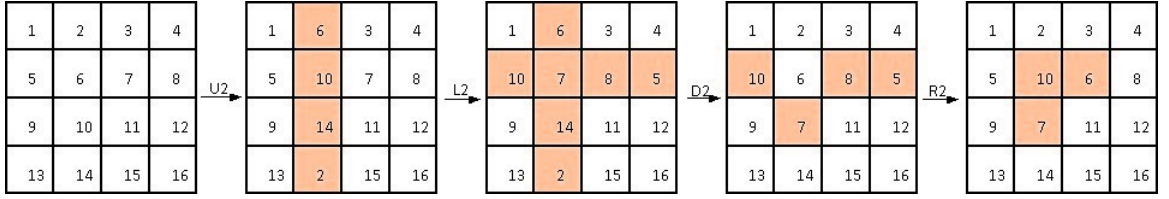
$$\begin{aligned}
R_1 \circ D_1 \circ L_1 \circ U_1 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = R_1 \circ D_1 \circ L_1 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & & & \cdot \\ a_{11} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
& = R_1 \circ D_1 \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{21} \\ a_{31} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & & & & \cdot \\ a_{11} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Toutes les valeurs de la matrice de départ ont repris leurs positions initiales sauf a_{11} , a_{12} et a_{21} .

Au final nous obtenons un 3-cycle $R_1 \circ D_1 \circ L_1 \circ U_1 = (1 \ n+1 \ 2)$, mais le plus important c'est que ce 3-cycle est local, ne modifiant que trois tuiles précises en laissant les autres inchangées.

Plus généralement : $R_i \circ D_j \circ L_i \circ U_j = ((i-1) \times n + j \quad i \times n + j \quad (i-1) \times n + j + 1)$ sont tous des 3-cycles locaux et ce sont eux qui vont nous permettre de résoudre le Rubik's-Tore :

Par exemple dans $\mathfrak{RT}_4$, $R_2 \circ D_2 \circ L_2 \circ U_2 = (6 \ 10 \ 7)$ laisse totalement invariant la ligne 1 et la colonne 1 du Rubik's-Tore.



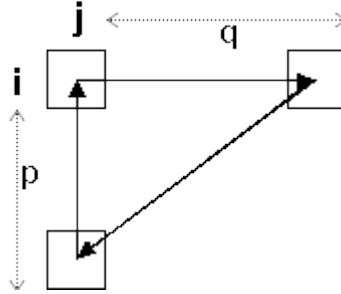
3.2.3 D'autres 3-cycles locaux

Nous allons maintenant nous donner des armes pour résoudre le Rubik's-Tore. Tous les 3-cycles présentés ci-dessous sont locaux et ne dépendent pas de l'ordre du Rubik's-Tore, ils sont fabriqués sur le même modèle que $R_i \circ D_j \circ L_i \circ U_j$.

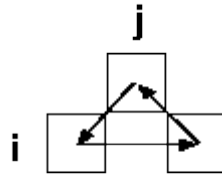
SEQUENCE	3-CYCLE LOCAL
$R_i \circ D_j \circ L_i \circ U_j$	
$(R_i \circ D_j \circ L_i \circ U_j)^{-1} = D_j \circ R_i \circ U_j \circ L_i$	
$R_i \circ U_j \circ L_i \circ D_j$	
$(R_i \circ U_j \circ L_i \circ D_j)^{-1} = U_j \circ R_i \circ D_j \circ L_i$	
$L_i \circ D_j \circ R_i \circ U_j$	
$(L_i \circ D_j \circ R_i \circ U_j)^{-1} = D_j \circ L_i \circ U_j \circ R_i$	
$L_i \circ U_j \circ R_i \circ D_j$	
$(L_i \circ U_j \circ R_i \circ D_j)^{-1} = U_j \circ L_i \circ D_j \circ R_i$	

Table 1: Tableau des 3-cycles locaux

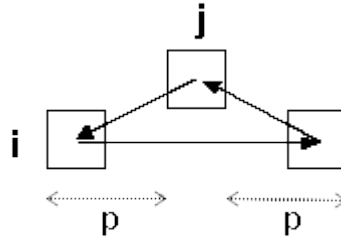
Cette famille de 3-cycles a la particularité de faire permuer 3 tuiles voisine sur le Rubik's-Tore, mais il est tout à fait possible que ces 3 tuiles soient éloignées les unes des autres. Par exemple $R_i \circ D_j \circ L_i \circ U_j$ peut se généraliser de la façon suivante : $R_i^q \circ D_j^p \circ L_i^q \circ U_j^p$ donne le 3-cycle



Il existe d'autres 3-cycles locaux comme par exemple $R_i \circ U_j \circ L_i^2 \circ D_j \circ R_i$



Que l'on peut généraliser de la façon suivante : $R_i^p \circ U_j \circ L_i^{2p} \circ D_j \circ R_i^p$



3.3 Algorithme de résolution

Pour résoudre le Rubik's-Tore d'ordre n , notre l'algorithme est le suivant :

1. En utilisant des cycles globaux, placer correctement les tuiles de la ligne 1 et de la colonne 1.
2. Pour $k > 1$, placer correctement les tuiles de la ligne k et de la colonne k du Rubik's-Tore, en utilisant les cycles locaux pour ne pas modifier les lignes 1 à $k - 1$ ainsi que les colonnes 1 à $k - 1$.

4 Le théorème du Rubik's-Tore

4.1 Théorème

Soit n un entier supérieur ou égal à 2,

- Si n est pair, alors le groupe des permutations du Rubik's-Tore est le groupe symétrique tout entier : $\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{S}_{n^2}$
- Si n est impair, alors le groupe des permutations du Rubik's-Tore est le groupe alterné : $\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{A}_{n^2}$

4.2 Démonstration

- Dans un premier temps, nous montrerons que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, (sans distinction sur la parité), l'inclusion $\mathfrak{A}_{n^2} \subseteq \mathfrak{RT}_n$ est vérifiée.
- Dans un second temps, nous distinguerons deux cas :
 - **Si n est pair**, dans ce cas $\mathfrak{RT}_n$ contient le sous-groupe $\mathfrak{A}_{n^2}$ et au moins une permutation de signature -1 (le cycle R_1 fera l'affaire), donc son cardinal dépassera strictement $\frac{|\mathfrak{S}_{n^2}|}{2}$, tout en le divisant (théorème de Lagrange, ce qui prouvera que $|\mathfrak{RT}_n| = |\mathfrak{S}_{n^2}|$).
 - **Si n est impair**, on justifiera que l'inclusion réciproque est vraie, puis on conclura que $\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{A}_{n^2}$.

Preuve de l'inclusion $\mathfrak{A}_{n^2} \subseteq \mathfrak{RT}_n$

Pour prouver cette inclusion, nous devons trouver un système de générateurs de $\mathfrak{A}_{n^2}$ qui est contenu dans le sous-groupe $\mathfrak{RT}_n$.

De manière générale, pour tout entier n supérieur à 2, on sait que l'ensemble $\{(1 \ k \ l), 1 < k < l \leq n^2\}$ engendre $\mathfrak{A}_{n^2}$, mais encore mieux : $\{(1 \ 2 \ k), 2 < k \leq n^2\}$ engendre $\mathfrak{A}_{n^2}$. En utilisant le premier type de séquence avec $i = 1$ et $j = 2$, on observe que $R_1 \circ D_2 \circ L_1 \circ U_2$ correspond au 3-cycle $(1 \ 2 \ n+1)$. On sait par ailleurs que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{RT}_n$, on a

$$\sigma \circ (1 \ 2 \ n+1) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1) \ \sigma(2) \ \sigma(n+1)).$$

Notre objectif est donc à présent d'être capable de trouver, pour n'importe quelle valeur $k \in \llbracket 3; n^2 \rrbracket$, une permutation $\sigma \in \mathfrak{RT}_n$ laissant invariantes les

deux tuiles 1 et 2 et envoyant la tuile $n+1$ sur la tuile k . Il faudra distinguer trois cas :

- Si $k \in \llbracket 3; n \rrbracket$: dans ce cas, la tuile k , tout comme les tuiles 1 et 2, est sur la première ligne. En choisissant σ à la manière de l'avant dernière ligne de 3.2.3, précisément en choisissant $\sigma = L_2^{k-1} \circ U_k \circ R_2^{k-1} \circ D_k$, on obtient bien un 3-cycle local respectant les conditions voulues
- Si $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$: dans ce cas, la tuile k est située sur la ligne numéro 2, il est donc facile de trouver une suite de mouvement envoyant la tuile $n+1$ sur la tuile k sans avoir à modifier la ligne 1 (et donc sans déplacer les tuiles 1 et 2) : il s'agit de répéter $k-(n+1)$ mouvement de la ligne 2 vers la droite, précisément, $R_2^{k-(n+1)}$ respectera les conditions demandées (remarque : si $k = n+1$, 0 mouvements sont nécessaires, en effet $R_2^0 = id$ convient)
- Si $k \in \llbracket 2n+1; n^2 \rrbracket$: dans ce cas, la tuile k est située sur une ligne i dont l'indice est supérieure ou égal à 3. Ce cas se divise lui-même en deux sous-cas :
 - Si k est de la forme $pn+1$: dans ce cas, la tuile k est située sur la première colonne à la ligne p et l'on pouvait directement conclure que le 3-cycle $(1 \ 2 \ k)$ appartenait à $\mathfrak{RT}_n$, car il correspond à une variante de la première ligne de 3.2.3 : $R_1 \circ D_1^p \circ L_1 \circ U_1^p$
 - Sinon : alors k correspond à une tuile qui se trouve à la ligne i et la colonne j , avec $i \geq 3$ et $j \geq 2$, on peut donc trouver un 3 cycle-local envoyant la tuile $n+1$ à cette position sans modifier la première ligne, par exemple $R_2^{j-1} \circ D_1^{i-1} \circ L_2^{j-1} \circ U_1^{i-1}$

Bilan On parvient dans tous les cas à trouver $\sigma \in \mathfrak{RT}_n$ tel que

$$\sigma \circ (1 \ 2 \ n+1) \circ \sigma^{-1} = (1 \ 2 \ k),$$

sauf dans le cas où l'on prouve directement que $(1 \ 2 \ k) \in \mathfrak{RT}_n$.

De la sorte, on a prouvé que

$$\{(1 \ 2 \ k), 2 < k \leq n^2\} \subseteq \mathfrak{RT}_n$$

et $\mathfrak{RT}_n$ étant un groupe, il contient automatiquement $(1 \ 2 \ k), 2 < k \leq n^2 >$ i.e. $\mathfrak{A}_{n^2}$.

Inclusion réciproque dans le cas pair, égalité $\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{S}_{n^2}$ dans le cas impair

- *Si n est pair* On vient de voir que $\mathfrak{A}_{n^2} \subseteq \mathfrak{RT}_n$, or on sait que $|\mathfrak{A}_{n^2}| = \frac{|\mathfrak{S}_{n^2}|}{2}$. De plus, la permutation R_1 est un cycle de longueur n qui est pair, donc est de signature égale à -1 : $\epsilon(R_1) = (-1)^{n-1} = -1$. On vient donc de trouver un élément de $\mathfrak{RT}_n \setminus \mathfrak{A}_{n^2}$ ce qui prouve $|\mathfrak{RT}_n| > |\mathfrak{A}_{n^2}| = \frac{|\mathfrak{S}_{n^2}|}{2}$. D'après le théorème de Lagrange, $|\mathfrak{RT}_n|$ divise $|\mathfrak{S}_{n^2}|$, étant strictement supérieur à la moitié de ce cardinal, on en déduit que ces deux groupes ont le même cardinal, et donc finalement

$$\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{S}_{n^2}.$$

- *Si n est impair*
Dans ce cas, les $2n$ permutations qui engendrent $\mathfrak{RT}_n$ sont toutes des cycles de longueurs impaires, donc de signatures égales à 1 (on rappelle que pour un cycle τ de longueur p , la signature vérifie $\epsilon(\tau) = (-1)^{p-1}$). Pour cette raison, on a

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, L_i \in \mathfrak{A}_{n^2} \text{ et } R_i \in \mathfrak{A}_{n^2}$$

On a donc $\mathfrak{RT}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n^2}$. L'inclusion réciproque ayant été démontrée précédemment, on a finalement

$$\mathfrak{RT}_n = \mathfrak{A}_{n^2}.$$

4.3 Généralisation au "tore rectangulaire"

Si l'on s'autorise à présent des tores à n lignes et m colonnes, le résultat se généralise de la manière suivante, en notant $\mathfrak{RT}_{n \times m}$ le groupe des permutations de ce tore

- Si n et m sont tous les deux impairs, alors $\mathfrak{RT}_{n \times m} = \mathfrak{A}_{nm}$
- Si l'une des deux dimensions est paire, alors $\mathfrak{RT}_{n \times m} = \mathfrak{S}_{nm}$

L'inclusion $\mathfrak{A}_{nm} \subseteq \mathfrak{RT}_{n \times m}$ se démontre toujours à l'aide des cycles locaux, qui permettent de former les 3-cycles $(1 \ 2 \ k)$ engendrant eux-même le sous-groupe alterné.

Pour l'inclusion réciproque

- Si n et m sont impairs, alors tous les générateurs de $\mathfrak{RT}_{n \times m}$ sont de signature égale à 1 , d'où l'inclusion réciproque.

- Si au moins l'une des dimension est paire, alors il y a un générateur de $\mathfrak{ST}_{n \times m}$ de signature -1 et donc $\mathfrak{ST}_{n \times m}$ contient le sous-groupe alterné ainsi qu'une autre permutation, donc contient la totalité du groupe symétrique.

5 Retour sur la résolution du Rubik's-Tore

5.1 Rappel sur l'algorithme de résolution

Pour résoudre le Rubik's-Tore d'ordre n , notre l'algorithme est le suivant :

1. En utilisant des cycles globaux, placer correctement les tuiles de la ligne 1 et de la colonne 1.
2. Pour $k > 1$, placer correctement les tuiles de la ligne k et de la colonne k du Rubik's-Tore, en utilisant les cycles locaux pour ne pas modifier les lignes 1 à $k - 1$ ainsi que les colonnes 1 à $k - 1$.

5.2 Si n est impair

Dans le cas où n est impair, le groupe des permutations du Rubik's-Tore étant le groupe alterné, la permutation globale du Rubik's-Tore est forcément de signature 1, et tous les mouvements possibles sur le Rubik's-Tore, qu'ils soient locaux ou globaux sont aussi de signature 1. Dans ces conditions, vous pouvez "foncer" dans la résolution du Rubik's-Tore en fermant les yeux et sans vous soucier de la signature de la permutation que vous venez de créer après un mouvement. En appliquant l'algorithme cité précédemment vous arriverez à résoudre votre Rubik's-Tore.

5.3 Le soucis du cas n pair

Dans le cas où n est pair, les choses peuvent légèrement se compliquer et vont nous obliger à adapter notre algorithme de résolution du Rubik's-Tore. En effet, puisque lorsque n est pair, nos quatre mouvements de base "UP" - "DOWN" - "RIGHT" - "LEFT" sont des cycles de signature -1, ils vont à chaque mouvement inverser le signe de la signature de la permutation globale. Il faudra alors être vigilant au moment où la ligne 1 et la colonne 1 seront correctement positionnées, car à ce moment, il est tout à fait possible de se retrouver avec une permutation globale de signature -1, or à partir du moment où la ligne 1 et la colonne 1 sont correctement placées, nous n'avons accès qu'à des cycles locaux de signature 1 et nous ne pourrons plus résoudre

le Rubik's-Tore.

Il faut donc absolument finir de placer correctement la ligne 1 et la colonne 1 en ayant une permutation globale de signature 1.

1	2	3	4
5	a	b	c
9	d	e	f
13	g	h	i

Cette sous permutation
peut être de signature
1 comme -1

5.4 Algorithme de résolution du Rubik's-Tore amélioré

Pour résoudre le Rubik's-Tore d'ordre n , notre l'algorithme est le suivant :

1. Si n est impair, on ne se soucie de rien.
 - (a) En utilisant des cycles globaux, placer correctement les tuiles de la ligne 1 et de la colonne 1.
 - (b) Pour $k > 1$, placer correctement les tuiles de la ligne k et de la colonne k du Rubik's-Tore, en utilisant les cycles locaux pour ne pas modifier les lignes 1 à $k - 1$ ainsi que les colonnes 1 à $k - 1$.
2. Si n est pair, on fait attention !
 - (a) En utilisant des cycles globaux, placer correctement les tuiles de la ligne 1 et de la colonne 1. A la fin de cette étape la signature de la permutation doit être 1. Si par malchance elle est de signature -1 alors passer à l'étape (b) sinon aller directement à l'étape (c)
 - (b) Effectuer l'opération suivante : $R_2 \circ D_n \circ L_2 \circ U_n \circ L_2$. C'est une permutation de signature -1 (composée de cinq cycles de signature -1), qui a le bon goût de conserver la ligne 1 et la colonne 1.

Proposition :

Il n'existe pas de permutations de signature -1 de moins de 5 déplacements élémentaires permettant de conserver la ligne 1 et la colonne 1.

- (c) Pour $k > 1$, placer correctement les tuiles de la ligne k et de la colonne k du Rubik's-Tore, en utilisant les cycles locaux pour ne pas modifier les lignes 1 à $k - 1$ ainsi que les colonnes 1 à $k - 1$.

6 Conclusion

Les deux buts que nous nous sommes fixés sont maintenant atteints : d'une part apprendre à résoudre un Rubik's-Tore et d'autre part étudier le groupe des permutations du Rubik's-Tore.

D'ailleurs ces deux buts s'alimentent l'un l'autre. En effet, alors que le "bestiaire" des permutations locales mis en place en début d'article permet de démontrer le théorème du Rubik's-Tore ; ce même théorème permet quant à lui d'éviter de se retrouver dans une impasse lors de la résolution d'un Rubik's-Tore d'ordre pair.

Pour la suite, plusieurs extensions semblent intéressantes.

- Nous avons déjà évoqué le Tore-rectangulaire où le nombre de lignes serait différent du nombre de colonnes.
- Nous pourrions rajouter une autre dimension au Rubik's-Tore : Le Rubik's-Tore "aplatit" serait alors un cube, et au lieu de faire glisser des lignes ou des colonnes, il faudrait faire glisser des plans selon 6 directions possibles : "UP" - "DOWN" - "RIGHT" - "LEFT" mais aussi "BACK" et "FORWARD".
- Pour finir nous pourrions nous demander qu'est-ce qu'un Rubik's-Tore bien mélangé, c'est à dire un mélange qui maximiserait le nombre de mouvements pour le résoudre.