

Le Théorème de la place de parking

Olivier SICARD - Alexandre BORDAS

Mai 2025

IREMI DE LA REUNION

Résumé : Tout conducteur honnête s'est un jour posé cette question en cherchant à se garer. Est-ce que je prends la place de parking libre juste devant moi ou bien je passe mon chemin et je tente de trouver une place un peu plus proche de là où je souhaite aller ? Ce papier tente de répondre à cette question.

Contents

1	INTRODUCTION	3
1.1	Le problème de la secrétaire	3
1.2	Applications	3
2	Le théorème de la place de parking ou des 70%	4
2.1	Mise en place du problème	4
2.2	Les hypothèses du problème	4
2.3	Énoncé du Théorème de la place de parking	5
2.4	Proposition :	5
2.5	Preuve du théorème de la place de parking :	5
3	Conclusion	6

1 INTRODUCTION

1.1 Le problème de la secrétaire

Pour introduire nos propos, nous allons vous parler d'un théorème intitulé "Le problème de la secrétaire" ou "le problème des 37%", proposé en 1964 par Y. S. CHOW, S. MORIGUTI, H. ROBBINS AND S. M. SAMUELS dans "OPTIMAL SELECTION BASED EN RELATIVE RANK".

Voici le texte original, vous pourrez d'ailleurs remarquer qu'en 1964, d'après les auteurs, seules les femmes pouvaient avoir accès à un poste de secrétaire, et que les considérations de type "égalité homme-femme" n'avaient pas vraiment cours à cette époque :

n girls apply for a certain position. If we could observe them all we could rank them absolutely with no ties, from best (rank 1) to worst (rank n). However, the girls present themselves one by one, in random order, and when the i th girl appears we can observe only her rank relative to her $i-1$ predecessors, that is, $1 +$ the number of her predecessors who are better than she. We may either select the i th girl to appear, in which case the process ends, or reject her and go on to the $(i+1)$ th girl; in the latter case the i th girl cannot be recalled. We must select one of the n girls. Let X denote the absolute rank of the girl selected. The values of X are $1, \dots, n$, with probabilities determined by our selection strategy. What selection strategy (i.e. stopping rule) will minimize the expectation $EX =$ expected absolute rank of the girl selected?

Comprenons bien les règles : Le but est de recruter la meilleure secrétaire parmi un nombre fini et connu de postulantes, et à chaque entretien individuel deux options s'offrent à nous :

- recruter cette candidate immédiatement et clôturer le recrutement.
- recaler définitivement la candidate en espérant en trouver une meilleure parmi les suivantes.

En fait ici il est question d'information : Imaginons deux stratégies totalement opposées :

- STRATEGIE 1 : Je recrute la première candidate parmi N , la probabilité que ce soit la meilleure est donc de $\frac{1}{N}$.
- STRATEGIE 2 : Je laisse passer toutes les candidates sauf la dernière que je recrute. La probabilité que ce soit la meilleure est toujours de $\frac{1}{N}$.

Si dans les deux cas la probabilité est la même, il y a une différence importante entre les deux situations : dans la première je ne sais absolument pas si j'ai choisi la meilleure ou la pire, alors que dans la deuxième situation, je sais exactement quel est le niveau de la secrétaire recrutée parmi toutes les autres candidates.

Les auteurs proposent alors la stratégie suivante :

- sacrifier les premières candidates pour engranger de l'information sur le "niveau" des postulantes
- A partir d'un certain rang recruter la prochaine candidate meilleure que toutes les précédentes.

Le résultat qu'ils obtiennent est qu'asymptotiquement (quand le nombre de postulantes N tend vers l'infini), il faut sacrifier $\frac{N}{e}$ soit environ 37% des candidates avant de commencer à véritablement recruter, on maximise alors nos chances de recrutement avec 37% de chances de recruter la meilleure candidate.

1.2 Applications

Les applications concrètes de ce théorème ne sont pas si évidentes, l'hypothèse qui pose réellement problème est celle ci : dans quelle situation un recruteur ne pourrait-il pas rappeler un candidat ?

- Le recrutement de candidats ne fonctionne pas, car un recruteur peut rappeler un candidat
- L'achat d'une maison/appartement peut éventuellement s'adapter à la situation, car il y a des chances que si l'on refuse un bien après une visite, celui-ci ne soit plus disponible si l'on souhaite le revoir.
- Un cas concret que nous avons pu trouver est donné par wikipédia :

Un conducteur est à la recherche d'une station-service pour faire le plein de carburant au meilleur prix possible. Il dispose encore de suffisamment de carburant pour passer devant 30 stations-service où il peut visualiser les prix. En suivant la règle des 37%, il devra laisser passer les 11 premières stations-service et s'arrêter à la prochaine qui affichera un meilleur prix que les précédents.

- Le théorème de la secrétaire serait utilisé en informatique, dans le cas d'un algorithme dit "en ligne" ou "incrémental", c'est à dire qui reçoit un flux de données en entrée, et qui doit prendre des décisions au fur et à mesure. Il s'oppose au concept d'algorithme hors ligne qui reçoit d'un seul coup les données qu'il a à considérer. On peut imaginer que des Intelligences Artificielles comme CHAT-GPT qui ont dû ingurgiter l'Internet en entier utilisent (ou devrait s'intéresser à un théorème comme celui de la secrétaire)

2 Le théorème de la place de parking ou des 70%

C'est en essayant de proposer une situation concrète où le théorème de la secrétaire pourrait parfaitement s'adapter que nous sommes tombés sur une autre variante du théorème que nous avons appelé "le théorème de la place de parking" ou "le théorème des 70%".

2.1 Mise en place du problème

Considérons une route infinie à sens unique sur laquelle on trouve des places de parking régulièrement espacées. Une voiture souhaite se rendre à un point A (son point d'arrivée). La voiture se rapprochant du point A , son but est de se garer au plus près de celui-ci. Pour cela, sa stratégie est la suivante : à partir d'une certaine distance d de son point d'arrivée A , la voiture se garera à la prochaine place de parking disponible. La question est :

Comment choisir d pour minimiser la distance entre le point A et la place de parking choisie ?

Le problème que nous proposons est une sorte de version continue du théorème de la secrétaire.

- La distance d est la version continue du nombre de postulantes à sacrifier
- la place de parking choisie correspond à la secrétaire embauchée
- le fait que la route soit à sens unique oblige à faire un recrutement immédiat sans retour possible.

2.2 Les hypothèses du problème

Notons D le point de départ de la stratégie. On a donc $DA = d$.

Nous allons supposer que les voitures déjà garées sur la route sont réparties de façon uniforme. On peut assez facilement poser cette hypothèse si le point A n'est pas un point d'accumulation des autres voitures déjà garées. Cette hypothèse élimine donc les situations exceptionnelles (par exemple, un concert), mais convient bien si plusieurs points d'arrivées sont uniformément répartis sur la route (par exemple, une route avec plusieurs restaurants, où A est l'un d'eux).

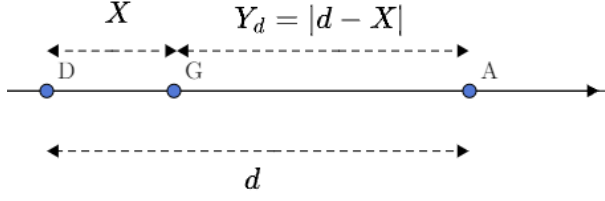
Posons aussi que la voiture connaît la distance moyenne à parcourir pour trouver une place de parking libre. Cette hypothèse découle de la précédente. Si les voitures déjà garées sont uniformément réparties sur cette route infinie, la voiture peut estimer correctement cette distance, notée m .

Notons alors X la variable aléatoire mesurant la distance entre le point de départ D et l'endroit où la voiture se gare (appelons G ce point). Vu l'hypothèse de répartition uniforme des voitures, X est une variable aléatoire sans mémoire dans le sens où si d_1 et d_2 sont deux distances, $p(X > d_1 + d_2)_{X > d_1} = p(X > d_2)$, de plus par définition de m , $E(X) = m$ donc X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{m}$:

$$X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{m}\right), \quad f(x) = \frac{1}{m}e^{-x/m}. \quad (1)$$

Une fois garé au point G , la distance qu'il nous reste à parcourir jusqu'au restaurant correspond à la variable aléatoire $Y_d = |d - X|$

Notre but est maintenant le suivant : Comment choisir d pour minimiser $E(Y_d)$?



2.3 Énoncé du Théorème de la place de parking

Soit m et d deux réels strictement positifs, on note X la variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{m}$ et $Y_d = |d - X|$, alors :

$$E(Y_d) = d - m + 2me^{-d/m}. \quad (2)$$

De plus $E(Y_d)$ atteint son minimum en $d = m \ln(2)$ et $E(Y_{m \ln(2)}) = m \ln(2)$

2.4 Proposition :

Pour nous aider dans la démonstration du théorème nous aurons besoin de deux intégrales :

$$\int_a^b \frac{1}{m} e^{-x/m} dx = e^{-a/m} - e^{-b/m}. \quad (3)$$

La preuve de (3) vient du fait que $g(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m}$ admet pour primitive $G(x) = -e^{-x/m}$.

$$\int_a^b x \frac{1}{m} e^{-x/m} dx = \left[-x e^{-x/m} \right]_a^b + \int_a^b e^{-x/m} dx. \quad (4)$$

Pour prouver (4) il suffit de réaliser une IPP avec $f(x) = e^{-x/m}$ et $g(x) = -x$

2.5 Preuve du théorème de la place de parking :

Commençons par calculer $E(Y_d)$. Puisque la loi de densité de X est $f(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m}$, on a :

$$E(Y_d) = E(|d - X|) = \int_0^{+\infty} |d - x| \frac{1}{m} e^{-x/m} dx = \int_0^d \frac{d - x}{m} e^{-x/m} dx + \int_d^{+\infty} \frac{x - d}{m} e^{-x/m} dx \quad (5)$$

Posons

$$I_1 = \int_0^d \frac{d - x}{m} e^{-x/m} dx \quad (6)$$

et

$$I_2 = \int_d^{+\infty} \frac{x - d}{m} e^{-x/m} dx \quad (7)$$

Calculons I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^d \frac{d - x}{m} e^{-x/m} dx \\ &= \frac{d}{m} \int_0^d e^{-x/m} dx - \int_0^d \frac{x}{m} e^{-x/m} dx \\ &= d(e^{-0/m} - e^{-d/m}) - \int_0^d \frac{x}{m} e^{-x/m} dx \quad (3) \\ &= d(e^{-0/m} - e^{-d/m}) - \left[-x e^{-x/m} \right]_0^d - \int_0^d e^{-x/m} dx \quad (4) \\ &= d - d e^{-d/m} + d e^{-d/m} - 0 e^{-0/m} - m(e^{-0/m} - e^{-d/m}) \\ &= d + m e^{-d/m} - m \end{aligned}$$

Calculons I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_d^{+\infty} \frac{x-d}{m} e^{-x/m} dx \\
&= \int_d^{+\infty} \frac{x}{m} e^{-x/m} dx - \frac{d}{m} \int_d^{+\infty} e^{-x/m} dx \\
&= \left[-x e^{-x/m} \right]_d^{+\infty} + \int_d^{+\infty} e^{-x/m} dx - \frac{d}{m} \int_d^{+\infty} e^{-x/m} dx \\
&= 0 + d e^{-d/m} + \left(1 - \frac{d}{m}\right) m (e^{-d/m} - 0) \\
&= d e^{-d/m} + (m-d) e^{-d/m} \\
&= m e^{-d/m}
\end{aligned}$$

Au final :

$$E(Y_d) = I_1 + I_2 = d - m + 2m e^{-d/m}. \quad (8)$$

Ce qui démontre le premier point.

Pour l'étude du minimum de $E(Y_d)$ il suffit d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(d) = d - m + 2m e^{-d/m}$$

On dérive $E(Y_d)$:

$$f'(d) = 1 - 2e^{-d/m}. \quad (9)$$

On résout $f'(d) > 0$:

$$1 - 2e^{-d/m} > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-d/m} < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

En prenant le logarithme :

$$-\frac{d}{m} < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad d > m \ln(2) \approx 0.7m. \quad (11)$$

Le minimum est donc atteint pour $d = 0.7m$.

3 Conclusion

La bonne stratégie pour la voiture est donc de chercher à se garer quand la distance qui la sépare de son point d'arrivée correspond à 70% de la distance moyenne qu'elle doit parcourir pour trouver une place.

Par exemple, si une place de parking est disponible en moyenne tous les 20 mètres, commencez à chercher une place à 14 mètres de votre point d'arrivée.

On remarque que $d = m \ln(2)$ est la médiane de la variable aléatoire X , c'est-à-dire qu'il y a une probabilité de 50% que X soit inférieure à d et 50% qu'elle soit supérieure.