

COURBE D'INTERPOLATION CINÉMATIQUE

INTRODUCTION

S'il fallait commencer par une définition de l'interpolation polynomiale, nous pourrions dire que celle-ci consiste à trouver un polynôme ayant la propriété de passer par un nombre fini de points connus à l'avance. Ces points sont en général appelés "points d'interpolation".

Autrement dit considérons n points du plan, $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, comment trouver un polynôme P vérifiant que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $P(x_i) = y_i$.

Ce problème a été résolu depuis plus de 200 ans, principalement par Joseph-Louis Lagrange, puis par Charles Hermite qui rajoute comme contrainte le respect de la pente au point A_i .

Si leurs solutions ont le mérite d'être globales, c'est à dire de trouver un polynôme unique passant par les n points, celles-ci souffrent plusieurs défauts majeurs :

- "phénomène de Runge" : Lorsque le nombre de points augmente ou qu'ils sont mal répartis (ex. équidistants), le polynôme peut osciller fortement. Cela donne une mauvaise approximation entre les points, surtout aux bords de l'intervalle.
- Ajouter un nouveau point impose de recalculer tout le polynôme depuis zéro.
- Les calculs sont assez coûteux quand n augmente, puisque le degré du polynôme augmente avec le nombre de points à interpoler.

Dans les années 1950, les méthodes dites "splines" permettent de corriger la plupart de ces défauts en remplaçant le polynôme global par une suite de petits polynômes définis localement entre deux nœuds, raccordés de manière continue.

En 1962, l'ingénieur Pierre Bézier, chez Renault, introduit une méthode de construction de courbes basée sur des combinaisons barycentriques de points de contrôle. Ces courbes de Bézier, devenues incontournables en modélisation et design, offrent un contrôle intuitif et une stabilité remarquable sous les transformations géométriques.

Dans cet article, nous allons vous proposer une nouvelle approche de l'interpolation. Une interpolation que l'on pourrait qualifier de "cinématique"...

I. Énoncé du problème

Munissons le plan d'un repère orthogonal, et posons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan ainsi que $\vec{u}(u_x, u_y)$ et $\vec{v}(v_x, v_y)$ deux vecteurs. Notre but est de proposer une courbe paramétrée polynomiale $\Gamma(t) = (f(t), g(t))$ définie sur $[0, 1]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $\Gamma(0) = A$
- $\Gamma(1) = B$
- $\Gamma'(0) = \vec{u}$.
- $\Gamma'(1) = \vec{v}$.

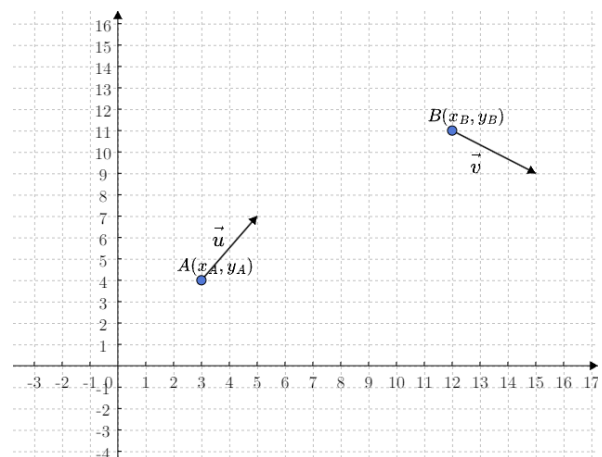


figure 1

II. Une approche cinématique de la courbe d'interpolation

1. Version cinématique du problème

D'un point de vue cinématique, nous pouvons imaginer qu'à $t = 0$ un mobile quelconque soit au point A avec $\vec{u}$ comme vecteur vitesse, on veut qu'au temps $t = 1$ notre mobile se retrouve en B avec le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur vitesse.

Ainsi $\Gamma(t) = (f(t), g(t))$ est la position du mobile au temps t .

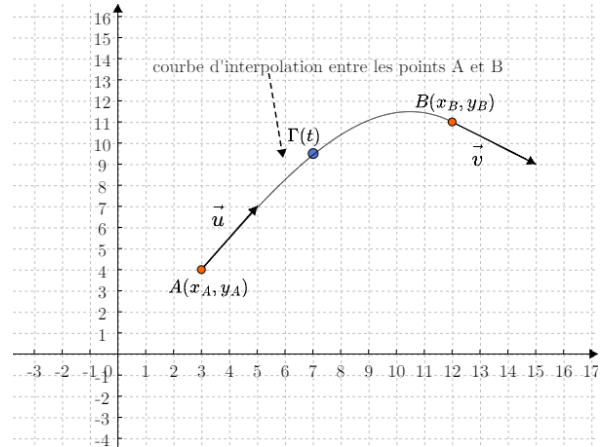


figure 2

2. Une première tentative

Laissons pour l'instant de côté les points A et B et focalisons nous sur les vecteurs vitesses. Puisque les vecteurs varient, c'est qu'il y a un vecteur accélération. Considérons que notre accélération est constante et qu'elle transforme le vecteur $\vec{u}$ en le vecteur $\vec{v}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, alors le vecteur accélération est égale à $\vec{a} = \vec{v} - \vec{u}$.

Maintenant, par intégration, et en utilisant le fait que $\Gamma'(0) = \vec{u}$ on obtient :

$$\Gamma'(t) = \vec{u} + t\vec{a} = t\vec{v} + (1-t)\vec{u}$$

. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tv_x + (1-t)u_x \\ tv_y + (1-t)u_y \end{bmatrix}$$

Remarque :

$\Gamma'(t)$ est simplement le barycentre des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ affecté des coefficients $1-t$ et t .

Au final, pour obtenir les équations horaires de notre courbe paramétrée il suffit d'intégrer une deuxième fois, puis en utilisant le fait que $\Gamma(0) = A$, on obtient :

$$\Gamma(t) = A + t\vec{u} + \frac{t^2}{2}\vec{a}$$
$$\begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + tu_x + t^2 \frac{v_x - u_x}{2} \\ y_A + tu_y + t^2 \frac{v_y - u_y}{2} \end{bmatrix}$$

3. Mise en évidence du "gap"

Par construction notre courbe paramétrée prend bien son départ au point A et a les bonnes pentes au départ et à l'arrivée, mais malheureusement elle n'a quasiment aucune chance de finir sa course au point B , et cela tout simplement par ce que pour l'instant nous n'avons jamais pris en compte la position du point B dans nos calculs.

Nous pouvons voir dans la figure ci-contre les vecteurs vitesses $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont trop petits ainsi la trajectoire du mobile est trop courte et n'atteint pas le point B .

Il se crée alors ce que nous appellerons un "gap" entre $\Gamma(1)$ et B .

Posons $\Delta = B - \Gamma(1)$ ie $\begin{bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B - f(1) \\ y_B - g(1) \end{bmatrix}$.

Après simplification, nous obtenons,

$$\Delta = B - A - \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$$

Notre but est maintenant de combler ce gap.

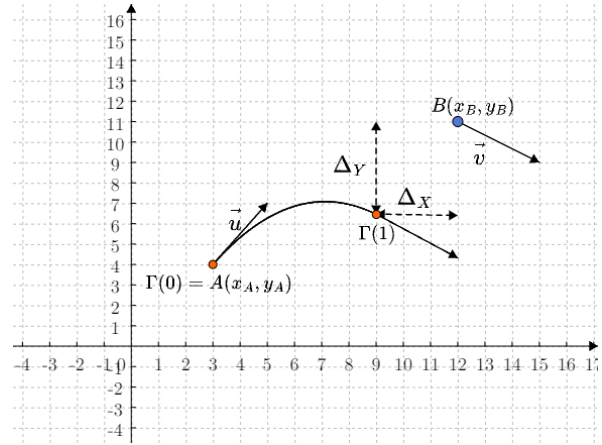


figure 3

4. Correction du gap

On sait que :

$$\Gamma'(t) = t\vec{v} + (1-t)\vec{u}$$

et

$$\Gamma(t) = A + t\vec{u} + \frac{t^2}{2}(\vec{v} - \vec{u})$$

L'idée maintenant est d'appliquer une correction polynomiale P_{corr} à Γ et définir ainsi $\tilde{\Gamma}$ par :

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) + P_{corr}(t) \times \Delta$$

de sorte à vérifier les quatre propriétés de départ :

1. $\tilde{\Gamma}(0) = A \iff P_{corr}(0) = 0$
2. $\tilde{\Gamma}(1) = B \iff P_{corr}(1) = 1$
3. $\tilde{\Gamma}'(0) = \vec{u} \iff P'_{corr}(0) = 0$
4. $\tilde{\Gamma}'(1) = \vec{v} \iff P'_{corr}(1) = 0$

Puisque $P'_{corr}(t)$ s'annule en 0 et en 1, le polynôme $t(1-t)$ divise $P'_{corr}(t)$.

Posons alors $P'_{corr}(t) = kt(1-t)$, en l'intégrant nous obtenons $P_{corr}(t) = k\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) + CTE$.

P_{corr} est le polynôme de plus petit degré apte à remplir les conditions 1-2-3 et 4.

- Puisque $P_{corr}(0) = 0$, $CTE = 0$ et $P_{corr}(t) = k\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)$.

- Puisque $P_{corr}(1) = 1$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P_{corr}(1) &= 1 \\ \iff k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) &= 1 \\ \iff k &= 6 \end{aligned}$$

On en déduit que P_{corr} existe et est unique égal à $P_{corr}(t) = 3t^2 - 2t^3$.

Enfin nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soient A et B deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Alors la courbe paramétrée polynomiale $\Gamma(t)$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\Gamma(t) = A + t\vec{u} + \frac{t^2}{2}(\vec{v} - \vec{u}) + (3t^2 - 2t^3)\Delta \text{ où } \Delta = B - A - \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$$

est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et vérifiant :- $\Gamma(0) = A$; $\Gamma(1) = B$; $\Gamma'(0) = \vec{u}$; $\Gamma'(1) = \vec{v}$.

III. Courbe d'interpolation cinématique VS Courbe de Bézier

La courbe de Bézier pour les $n + 1$ points de contrôle $(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n)$, est l'ensemble des points définis par la représentation paramétrique $P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot \mathbf{P}_i$ pour $t \in [0; 1]$ et où les B_i^n sont les polynômes de Bernstein.

La courbe de Bézier la plus largement utilisée est la courbe de Bézier cubique, et elle possède 4 points de contrôle, et on a alors :

$$P(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

et

$$P'(t) = -3(1-t)^2\mathbf{P}_0 + 3(1-t)(1-3t)\mathbf{P}_1 + 3(2-3t)t\mathbf{P}_2 + 3t^2\mathbf{P}_3$$

Il est facile de vérifier que :

- $P(0) = \mathbf{P}_0$
- $P(1) = \mathbf{P}_3$
- $P'(0) = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$
- $P'(1) = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$

En notant $A = \mathbf{P}_0$; $B = \mathbf{P}_3$; $\vec{u} = 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$ et $\vec{v} = 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$, on peut alors identifier la courbe de Bézier cubique P avec la courbe d'interpolation cinématique Γ .