

Planning de la journée :

- Avant la récréation CM1 a
- Après la récréation CM1 b

Les deux classes ont eu à étudier ce problème du certificat d'études 1923 (les francs ont été remplacés par des euros) :

Un fermier a vendu 26 moutons, les uns à 112 €, les autres à 140 €.

Il a reçu en tout 3 192 €.

Combien avait-il de moutons de chaque sorte ?

En guise d'échauffement, on a commencé par une remarque historique : la première utilisation connue de la résolution de problèmes pour enseigner les maths est le manuscrit remis à Charlemagne par Alcuin d'York aux alentours de l'an 800. Combien de siècles se sont écoulés depuis ?

Peu de bonnes réponses...

1 Analyse grammaticale de l'énoncé

1.1 Combien de phrases ?

La première question portait sur le nombre de phrases dans l'énoncé. Les réponses les plus fréquentes étaient

- 2 (c'est le nombre de points finissant des phrases, une phrase interrogative n'étant pas nécessairement perçue comme une phrase)
- 3 (la bonne réponse)

1.2 Quels verbes ?

La question suivante a porté sur les verbes : puisqu'il y a 3 phrases, il y a 3 verbes. Lesquels ?

Le verbe *moutons* a souvent été proposé. Parfois aussi *sortes* a été considéré comme un verbe.

Les infinitifs ne sont pas toujours connus (*recevoir...*).

Le verbe *avoir* a plusieurs fois été répondu, surtout en CM1 b.

Il a également été demandé à quels temps sont les verbes, et dans quelles circonstances on utilise l'imparfait plutôt que le passé composé : cela donne une information importante aidant à comprendre le problème à résoudre, à savoir que les moutons de chaque sorte, le fermier les avait *avant* le reste des transformations.

1.3 Quel(s) sujet(s) ?

Question piège puisque *il* s'appliquant au fermier, les phrases ont toutes le même sujet qui est le fermier.

C'est à ce stade qu'il a été conseillé aux élèves d'imaginer la couleur de la chemise du fermier pour mieux visualiser la situation-problème (certaines élèves ont beaucoup d'imagination, la vie du fermier est un vrai roman d'aventures, et les moutons sont parfois imaginés ayant la couleur rose...). En CM1 a les moutons à 112 € étaient noirs et les moutons à 140 € étaient rouges, alors qu'en CM1 b les moutons à 112 € étaient blancs et ceux à 140 € étaient noirs. L'essentiel étant qu'on puisse évoquer les deux sortes de moutons sans passer du temps à citer leur prix.

1.4 Chronologie

- Dans un premier temps, le fermier a 26 moutons (on ne sait pas de quelle couleur).
- Ensuite il les vend : il n'a plus les moutons, mais il a de l'argent.
- Enfin il compte son argent : 3 192 €.

2 Recherche arithmétique

2.1 La malédiction de l'animateur IREMI

En 1923 lorsque ce problème avait été posé, on espérait que les élèves le résolvent par la fausse position. Aujourd'hui comme on sait que la solution est formée de nombres entiers, il y a 25 possibilités (on n'ose imaginer que le fermier ne vende que des moutons noirs ou que des moutons blancs) :

- 1 mouton blanc et 25 moutons noirs,

- 2 moutons blancs et 24 moutons noirs,
- 3 moutons blancs et 23 moutons noirs,
- ...
- 25 moutons blancs et 1 mouton noir.

On a donc, *a priori*, une chance sur 25 (soit 4 % de chances) qu'un.e élève tombe par hasard sur la bonne solution. En fait *a posteriori* on n'imagine pas les élèves choisir des solutions où il y a peu de moutons d'une couleur donnée (en fait les versions 13-13 ou 20-6 ou 21-5 ont été proposées). Mais si un élève pense spontanément (et c'est son premier choix) qu'il faut 16 moutons à 112 € et 10 moutons à 140 € on est en droit de se demander si c'est de la chance ou de l'intuition...

2.2 Multiplications posées en début de CM 1

Lorsque les élèves ont estimé qu'il y avait de fortes chances que la solution soit 20 moutons blancs et 6 moutons noirs, ils avaient, en guise de vérification, à effectuer

- la multiplication de 20 par 112 (pour savoir combien rapportait la vente des 20 moutons blancs),
- la multiplication de 6 par 140 (pour savoir combien rapportait la vente des 6 moutons noirs),
- l'addition de 2 240 € et 840 € (pour savoir combien le fermier a gagné, selon cette hypothèse),
- la comparaison de 3 080 € avec 3 192 € pour (en l'occurrence) invalider l'hypothèse selon laquelle il aurait vendu 20 moutons à 112 €.

Tous ces calculs ont été effectués sans calculatrice, sur feuille ou au tableau, et les erreurs de divination de la bonne solution ont été autant d'occasions de faire pratiquer les opérations posées (on remarque que la soustraction permettant de trouver le nombre de moutons noirs a été faite mentalement).

Des erreurs constatées au cours des calculs :

- manque de connaissance des tables de multiplication : $6 \times 2 = 7$ etc
- erreurs de décalage (oubli de multiplier par 10 lorsque qu'on multiplie par le chiffre des dizaines)
- erreurs de retenue, y compris dans les additions

- confusion entre les opérations ($6 + 8$ au lieu de 6×8 , soustractions au lieu d'additions etc)
- mauvaise estimation des ordres de grandeur (exemple en effectuant 112×10 on ne s'étonne pas de trouver moins que 112)...

Les élèves qui connaissaient l'abaque de Gerbert avaient vu en CE 2 une méthode de multiplication qui semble efficace. Par exemple pour effectuer 112×16 on commence par poser l'opération :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$

puis on pose le premier produit partiel :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline \leftarrow 112 \times 6 \end{array}$$

on l'effectue :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline \leftarrow 112 \times 6 = 672 \end{array}$$

on le place :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 672 \leftarrow 112 \times 6 = 672 \end{array}$$

On pose le second produit partiel :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 672 \leftarrow 112 \times 6 = 672 \\ \leftarrow 112 \times 10 \end{array}$$

on l'effectue :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 672 \leftarrow 112 \times 6 = 672 \\ \leftarrow 112 \times 10 = 1120 \end{array}$$

on le place :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 672 \leftarrow 112 \times 6 = 672 \\ 1120 \leftarrow 112 \times 10 = 1120 \end{array}$$

Enfin on additionne :

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 672 \leftarrow 112 \times 6 = 672 \\ 1120 \leftarrow 112 \times 10 = 1120 \\ \hline 1792 \end{array}$$

2.3 L'aide de Gerbert

Pour calculer le produit de 112 par 16 on peut avec profit utiliser l'abaque de Gerbert (que certains élèves connaissaient depuis le CE 2). On commence par poser les opérandes :

	①	①	②
milliers	centaines	dizaines	unités
		①	⑥

Il y a 3 chiffres non nuls dans 112 et 2 chiffres non nuls dans 16 donc il y a $3 \times 2 = 6$ multiplications élémentaires à effectuer. La préférence des élèves allait à l'ordre de droite à gauche (commencer par les unités); donc commencer par poser dans l'abaque le produit 2×6 :

	①	①	②
milliers	centaines	dizaines	unités
		①	②
		①	⑥

puis on ajoute 2×10 (soit 2 dizaines) :

	(1)	(1)	(2)
milliers	centaines	dizaines	unités
		(1) (2)	(2)
		(1)	(6)

puis 10×6 (soit 6 dizaines) :

	(1)	(1)	(2)
milliers	centaines	dizaines	unités
		(1) (2) (6)	(2)
		(1)	(6)

100×6

	(1)	(1)	(2)
milliers	centaines	dizaines	unités
		(1) (2) (6)	(2)
	(6)	(6)	
		(1)	(6)

puis 110...

	(1)	(1)	(2)
milliers	centaines	dizaines	unités
		(1) (2) (6)	(2)
	(6)	(6)	
	← (1)	← (1)	
		(1)	(6)

...fois 10 :

	(1)	(1)	(2)
milliers	centaines	dizaines	unités
(1) ←	(6) (1) ←	(1) (2) (6)	(2)
		(1)	(6)

en effet,

- à chaque étape on multiplie un nombre d'un chiffre par un nombre d'un chiffre donc on n'a que 2 jetons à poser sur l'abaque,
- il est facile de multiplier par 10 sur l'abaque de Gerbert (il suffit de décaler les jetons d'une case vers la gauche¹),
- et pour finir la multiplication il n'y a plus qu'à échanger des jetons comme par exemple remplacer (dans la colonne des dizaines) (1)(2)(6) par (9) et (dans la colonne des centaines) (6)(1) par (7)

L'activité est donc une bonne occasion de réviser les additions et multiplications posées, ce d'autant plus si les solutions proposées sont nombreuses à ne pas être la bonne : pour vérifier si le fermier a vendu 16 moutons blancs (donc 10 moutons noirs), on

- calcule $112 \times 16 = 1792$,
- calcule $140 \times 10 = 1400$,
- calcule $1792 + 1400 = 3192$,

1. ce qui prédestine l'abaque de Gerbert au calcul sur les décimaux parce que diviser par 10 se fait en décalant les jetons d'une case vers la droite

- compare les 3192 trouvés avec les 3192 de l'énoncé ce qui est du calcul posé motivé.

La difficulté la plus surprenante est celle qu'il y a à multiplier un nombre par 10 ou 20 : on pensait qu'à l'issue du CE 2 les élèves seraient nombreux à trouver facile ce genre de multiplication, et ce n'est clairement pas le cas (d'où la proposition de faire pratiquer plus l'abaque de Gerbert²).

Les élèves ne semblaient pas savoir que pour trouver le complément à 26 on effectue une soustraction.

3 Raisonnement

Une hypothèse émise au début de la résolution du problème est que le fermier a vendu 20 moutons blancs (donc 6 moutons noirs). Vérification :

- $20 \times 112 = 2240$
- $6 \times 140 = 840$
- $2240 + 840 = 3080$
- $3080 < 3192$

La solution proposée n'est pas bonne mais on sait plus : elle est plus petite. La question est alors de savoir si on va essayer avec un nombre de moutons blancs plus petit que 20, ou plus grand que 20. Plusieurs élèves sont tombés dans le piège *on veut plus que 3080 donc on doit prendre plus que 20*. Les élèves les meilleurs en calcul sont ceux qui ont compris qu'il fallait prendre moins que 20 moutons blancs (en fait, plus que 6 moutons noirs). Mais combien moins ? Plutôt 19 ou plutôt 5 ?

La plupart des choix des élèves se sont portés sur 5. Vérification :

- $5 \times 112 = 560$
- $21 \times 140 = 2940$
- $560 + 2940 = 3500$
- $3500 > 3192$

Plusieurs élèves ont alors pensé qu'il fallait prendre encore moins que 5 moutons blancs.

2. Il vaut mieux éviter de parler d'*ajouter un zéro* parce que lorsqu'on multiplie par 10 un nombre décimal ce n'est pas ce qu'on fait.

Lorsqu'ils ont compris qu'il fallait entre 6 et 19 moutons blancs, il n'y a pas eu de dichotomie (essayer la moyenne entre 5 et 20) hormis un élève qui a proposé 13. Mais parce que 13 est la moitié de 26.

4 Annexe

Voici la solution proposée par ChatGPT :

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser un système d'équations pour déterminer le nombre de moutons vendus à 112 € et le nombre de moutons vendus à 140 €.

4.0.1 Données :

- Le fermier a vendu 26 moutons au total.
- Certains moutons ont été vendus à 112 €, d'autres à 140 €.
- Le total de la recette est de 3 192 €.

4.0.2 Étapes de résolution :

1. Définition des variables :

- Soit x le nombre de moutons vendus à 112 €.
- Soit y le nombre de moutons vendus à 140 €.

2. Écrire les équations :

- Le nombre total de moutons est 26, donc : $x + y = 26$ (1)
- La recette totale est de 3 192 €, donc la somme des montants payés pour les moutons est : $112x + 140y = 3\,192$ (2)

3. Résolution du système d'équations :

- De l'équation (1), nous pouvons exprimer y en fonction de x :
$$y = 26 - x$$
- Remplaçons y dans l'équation (2) : $112x + 140(26 - x) = 3\,192$
- Simplifions cette équation : $112x + 140 \times 26 - 140x = 3\,192$
$$112x + 3\,640 - 140x = 3\,192$$

$$-28x + 3\,640 = 3\,192$$

$$-28x = 3\,192 - 3\,640$$

$$-28x = -448$$

$$x = \frac{-448}{-28} = 16$$

4. Calcul de y :

- En remplaçant ($x = 16$) dans l'équation (1) : $y = 26 - 16 = 10$

4.0.3 Conclusion :

Le fermier a vendu **16 moutons à 112 €** et **10 moutons à 140 €**.