LA GÉOMETRIE DE LA GUITARE

Si la guitare est plus facile à jouer que par exemple un violon, c'est en grande partie grâce à ses frettes, petites barres en général métalliques disposées sur le manche à intervalles irréguliers :

La longueur de corde entre le chevalet (extrémité de la corde se trouvant du côté du corps de la guitare) et la frette détermine la note jouée ; aussi l'emplacement des frettes est-il déterminant. Où donc doit-on placer les frettes sur un manche de guitare pour garantir la justesse de celle-ci ? Comme on va le voir, le problème est géométrique.

1. **Préliminaires**
   (a) Intervalles musicaux
   La sensibilité de l'oreille humaine aux hauteurs des sons étant sensiblement logarithmique, pour comparer deux sons, on considère le logarithme du rapport de leurs hauteurs. Plus précisément, un rapport de 2 entre deux fréquences étant perçu comme une octave, qui est découpée en 12 intervalles d'un demi-ton chacun, la suite des inverses des longueurs de la corde entre le chevalet et les frettes successives (soit la suite des fréquences des notes jouées) est géométrique, de raison r tel que $r^{12} = 2$, soit $r = \sqrt[12]{2}$. On distingue les intervalles suivants :
   - La seconde, ou ton : r^2
   - La tierce mineure : r^3
   - La tierce majeure : r^4
   - La quarte : r^5
   - La quinte : r^7
   - La sixte majeure : r^9
   - La septième : r^{11}
   - L'octave : $r^{12} = 2$

Ces intervalles sont dits tempérés, et sont apparus sous cette forme sur les instruments à clavier du XVIIIème siécle. Avant ça, on leur préférait des valeurs approchées que nous verrons par la suite. On remarque que, alors que $r^6 = \sqrt{2}$ et $r^3 = \sqrt{\sqrt{2}}$ sont constructibles à la règle et au compas, le passage de r^3 à r nécessite la construction d'une racine cubique, qui est impossible en valeur exacte.
L'unité de mesure standard des intervalles musicaux est le « cent » défini comme le produit de 1200 par le logarithme en base 2 du rapport des fréquences (qui sont inversement proportionnelles aux longueurs des cordes). En effet, si x est un rapport de fréquences (donc l'inverse d'un rapport de longueurs), $\dfrac{\ln x}{\ln 2}$ est, comme on le souhaite, fonction logarithmique de x , et vaut 0 lorsque $x = 1$ et 1 lorsque $x = 2$ (octave). Alors un demi-ton vaut 100 cents, un ton vaut 200 cents, une quinte vaut 700 cents etc. Et une octave vaut 1200 cents. L'intérêt de cette unité de mesure est que l'oreille humaine est incapable de distinguer deux sons distants de moins d'environ 8 cents, et donc lorsque l'erreur commise est inférieure à environ $8 - 10$ cents, elle n'est pas perceptible par un auditeur humain.

(b) Approximations de $\sqrt{2}$
Rappel : La suite des réduites de $\sqrt{2}$ (ou développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue) est définie par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 2b_n \\ b_{n+1} &= a_n + b_n \end{aligned}$$

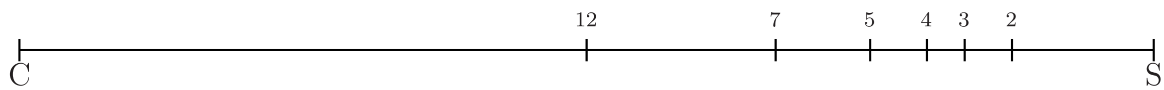
Les réduites de $\sqrt{2}$ sont alors les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$; la suite commence par 1 ; $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{7}{5}$; $\dfrac{17}{12}$; $\dfrac{41}{29}$ etc.
Une « bonne approximation »de $\sqrt{2}$ est une fraction $\dfrac{a}{b}$ irréductible telle que $a^2 = 2b^2 \pm 1$ (*on sait que si* $\dfrac{a}{b}$ *est une fraction irréductible,* a^2 *ne peut être égal à* $2b^2$ *, le mieux que l'on puisse faire est donc* $a^2 = 2b^2 \pm 1$ *...*).
Montrons que les réduites de $\sqrt{2}$ en sont de bonnes approximations :

- $1^2 = 2 \times 1^2 - 1$ donc la propriété est vraie au rang 0 ;
- Si $a_n^2 = 2b_n^2 - 1$, alors puisque $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $a_{n+1}^2 = (a_n + 2b_n)^2 = a_n^2 + 4a_nb_n + 4b_n^2$ et $2b_{n+1}^2 = 2a_n^2 + 4a_nb_n + 2b_n^2 = a_{n+1}^2 + a_n^2 - 2b_n^2 = a_{n+1}^2 - 1$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $a_{n+1}^2 = 2b_{n+1}^2 + 1$;
- De même, si $a_n^2 = 2b_n^2 + 1$ alors $a_{n+1^2} = 2b_{n+1}^2 - 1$...

2. $\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\omega\rho\alpha\sigma$ **et** $\Pi\lambda\alpha\tau o$
Les grecs anciens savaient qu'en délimitant une corde à la moitié de sa longueur, on obtenait une octave, mais aussi qu'on obtenait :
- Une quinte au tiers de la longueur en partant du sillet de tête ou du bout du manche (*autrement dit,* $r^7 \simeq \dfrac{3}{2}$ *avec la définition précédente pour* r)

- Une quarte au quart de la longueur (*soit* $r^5 \simeq \dfrac{4}{3}$)
- Une tierce majeure au cinquième de la longueur (*soit* $r^4 = \sqrt[3]{2} \simeq \dfrac{5}{4}$)
- Une tierce mineure au sixième de la longueur (*soit* $r^3 = \sqrt{\sqrt{2}} \simeq \dfrac{6}{5}$)
- Un ton au huitième de la longueur (*soit* $r^2 = \sqrt[6]{2} \simeq \dfrac{9}{8}$)

La méthode de Platon pour poser des frettes (*du moins s'il y avait eu des guitares à l'époque de Platon...*) consisterait à poser la 12*e* frette à la moitié de la longueur de la corde, la 7*e* frette au tiers etc. Ce qui, pour les frettes numéro 2, 3, 4, 5, 7 et 12, donne la construction suivante : (C désigne le chevalet, et S le sillet de tête, ou "frette zéro")



On constate qu'il manque les frettes numéro 1, 6, 8, 9, 10 et 11 sur la première octave, mais on peut les rajouter par exemple en disant que $9 = 7 + 2$, et que donc en plaçant une frette au huitième de la longueur mesurée à partir de la septième frette, on obtient la neuvième frette... Pour la première frette, puisque $r^2 \simeq \dfrac{9}{8}$ alors $r \simeq \sqrt{\dfrac{9}{8}}$ qu'on sait construire.

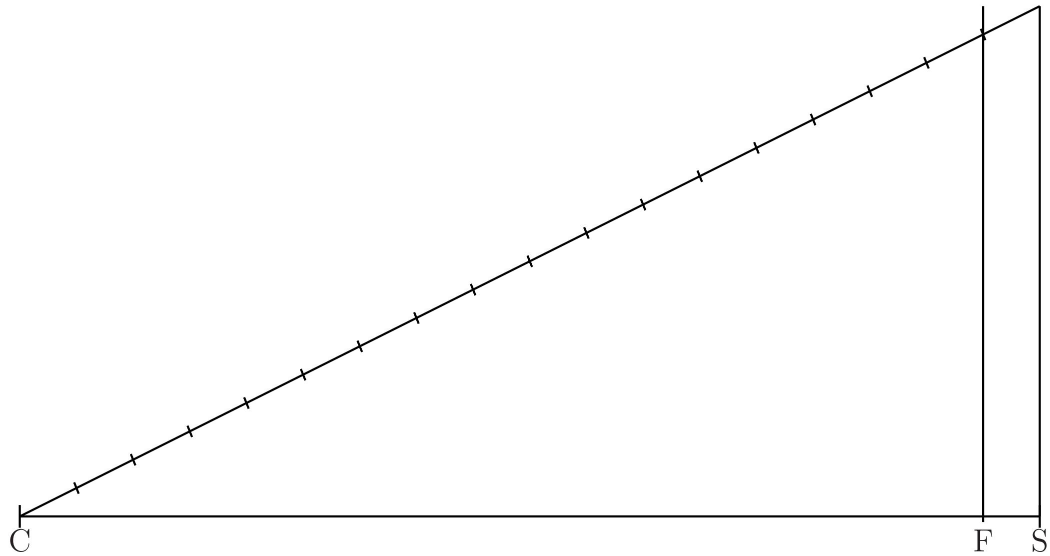
Les Pythagoriciens, quant à eux, reconnaissaient des qualités magiques aux nombres 1, 2, 3 et 4 et rejetaient donc la tierce majeure car elle faisait intervenir le nombre 5, jugé moins parfait que ceux de la "tétrade magique" ; ils lui préféraient la tierce dite "pythagoricienne" qui est la seconde de la seconde, soit $\dfrac{9}{8} \times \dfrac{9}{8} = \dfrac{81}{64}$.

Frettes	*Platon*	*Erreur(cents)*	*Pythagore*	*Erreur(cents)*
2	$1,1250$	$3,9$	$1,1250$	$3,9$
3	$1,2000$	$15,6$	$1,1852$	$-5,9$
4	$1,2500$	$-13,7$	$1,2656$	$7,8$
5	$1,3333$	$-2,0$	$1,3333$	$-2,0$
7	$1,5000$	$2,0$	$1,5000$	$2,0$
12	$2,0000$	$0,0$	$2,0000$	$0,0$

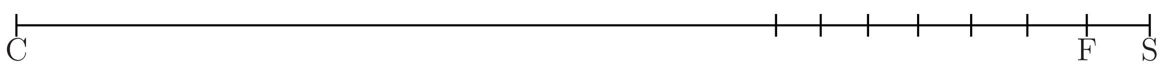
Dans le tableau ci-dessus, les rapports de fréquence sont donnés, ainsi que les erreurs relatives par rapport à la suite géométrique de raison r vue ci-dessus, données en cents ; on voit que les frettes 3 et 4 de la méthode "de Platon" sonneront, l'une un peu trop aigüe, l'autre un peu trop grave, par rapport à la gamme tempérée. Ceci dit, il s'agit ici d'une expérience de pensée puisque les instruments frettés ne sont apparus qu'à la Renaissance en Europe, époque où le compas était considéré comme le plus noble des outils...

3. **Vincenzo Galilei**

   Né à Florence vers 1520, Vincenzo Galilei était un célèbre luthiste de son époque, très porté sur la théorie musicale, et les arts et sciences en général. Il est mort en 1591, toujours à Florence, laissant deux fils, Michelangelo le luthiste, et Galileo le savant, et de nombreux écrits sur la théorie musicale et les tablatures de luth, notamment cette construction pour placer les frettes sur le manche d'un luth :



F est la position de la frette numéro 1, et la construction, basée sur le théorème de Thalès, est basée sur le fait que $r \simeq \dfrac{18}{17}$, approximation de $\sqrt{\dfrac{9}{8}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \simeq \dfrac{3}{2} \times \dfrac{12}{17}$, elle-même obtenue en remplaçant $\sqrt{2}$ par son approximation rationnelle $\dfrac{17}{12}$.
Une fois que la première frette est posée, on peut itérer le procédé, construisant ainsi une suite de raison $\dfrac{18}{17}$, ce qui donne ceci (jusqu'à la 7e frette) :

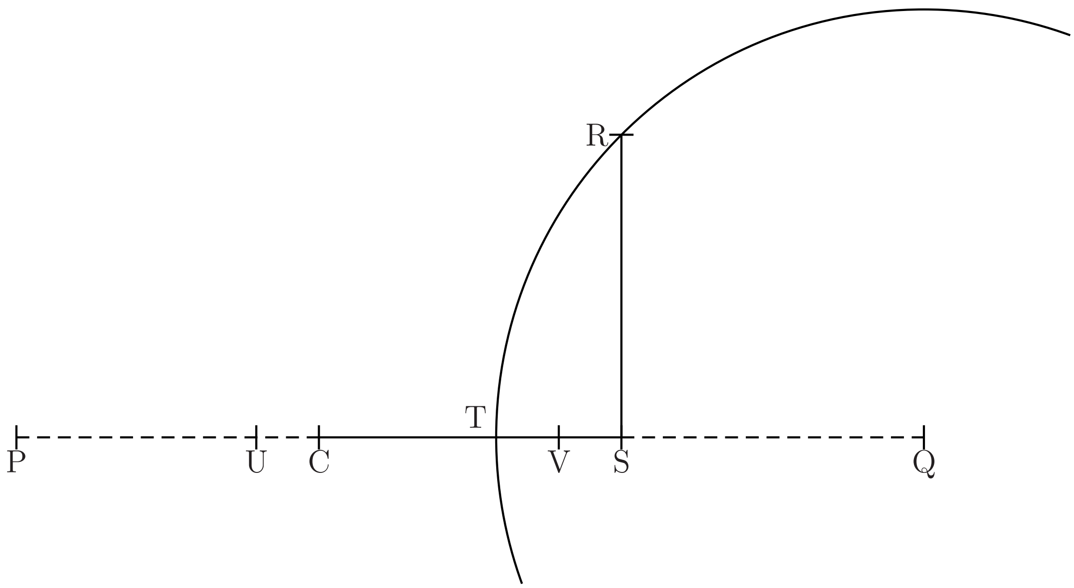


et les erreurs d'approximation :

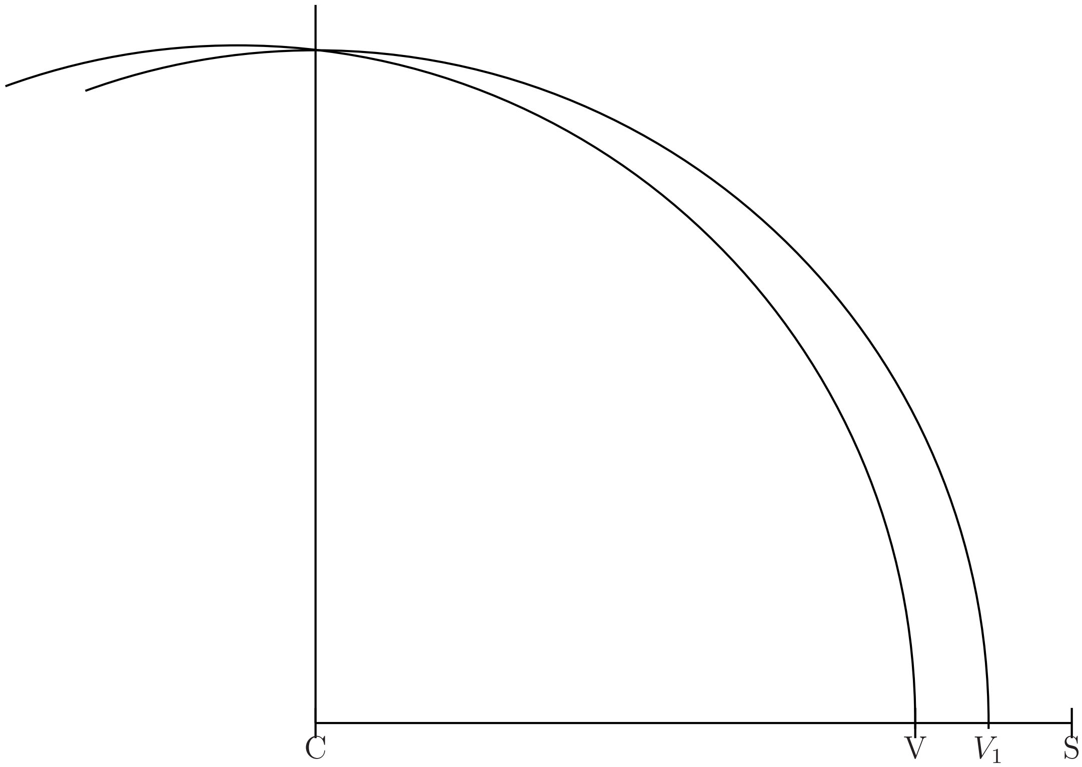
$Frettes$	$Rapports$	$Erreur(cents)$
1	$1,0588$	$-1,0$
2	$1,1211$	$-2,1$
3	$1,1871$	$-3,1$
4	$1,2569$	$-4,2$
5	$1,3308$	$-5,2$
6	$1,4091$	$-6,3$
7	$1,4920$	$-7,3$
8	$1,5798$	$-8,4$
9	$1,6727$	$-9,4$
10	$2,7711$	$-10,5$
11	$2,8753$	$-11,5$
12	$1,9856$	$-12,5$

Comme on s'en doutait, l'erreur est fonction croissante du numéro de la frette, et ne devient vraiment intolérable qu'après la 7e frette, qui est souvent la dernière sur un luth.

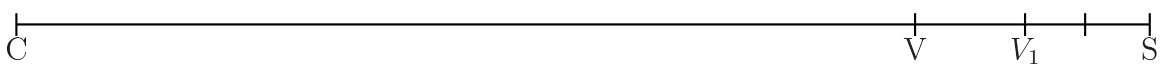
4. **Marin Mersenne**
L'abbé Marin Mersenne (1588-1648) n'était pas seulement arithméticien, il était aussi géomètre et musicologue. Aussi, en 1636, proposait-il cette construction pour la quatrième frette :



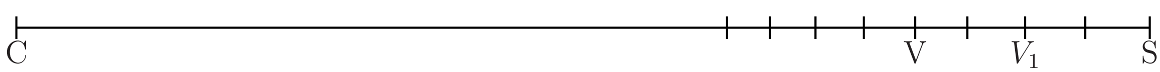
Comme d'habitude, C est le chevalet, et S le sillet de tête ; on a PC=CS=SQ par construction ; R est le point de la perpendiculaire au manche de la guitare (ou du luth...) menée par S, tel que CS=SR. Le cercle de centre Q passant par R coupe le manche en T. U est le milieu de [PT] et la longueur PU est reportée en CV. V est la position de la quatrième frette cherchée. En effet on voudrait $\dfrac{CS}{CV} \simeq \sqrt[3]{2}$ et on a $\dfrac{CS}{CV} = \dfrac{2}{3-\sqrt{2}}$ par construction. Or $\dfrac{2}{3-\sqrt{2}}$ est une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ connue depuis les travaux sur la célèbre duplication du cube, comme on peut le vérifier en calculant son cube, dont la valeur exacte est $\dfrac{8}{45-29\sqrt{2}}$; si, dans cette dernière expression, on remplace $\sqrt{2}$ par son approximation rationnelle $\dfrac{41}{29}$, on trouve 2...
Si $\dfrac{CS}{CV} \simeq \sqrt[3]{2}$, on obtient la deuxième frette par construction de V_1 tel que $CV_1 = \sqrt{CV}$ (en prenant pour unité la longueur du manche), ce qui donne le point suivant :



(on a mené par l'intersection de la perpendiculaire au manche en C et du cercle de diamètre [PV], un cercle de centre C), construction qu'on peut itérer pour obtenir la frette numéro 1 :



Il suffit alors de recommencer toute la construction sur la longueur de corde allant du chevalet à la frette numéro 1, pour obtenir les frettes 5 et 3, etc. Pour les frettes de 1 à 8, on obtient ceci :



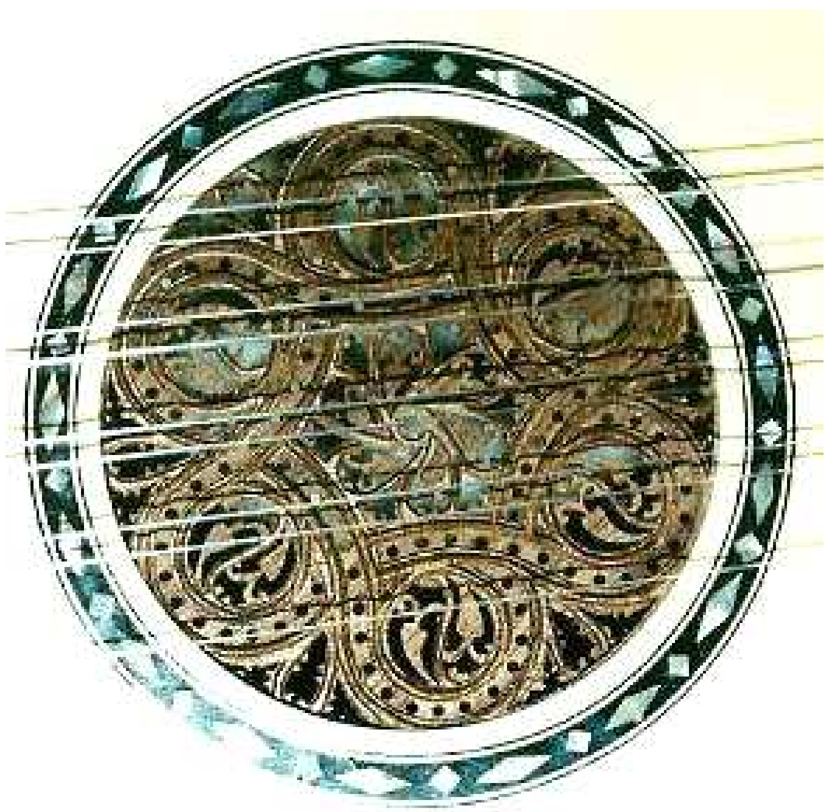
Pour ce qui est des erreurs d'approximation de cette méthode, elles sont elles aussi fonction croissante du numéro de frette, mais restent totalement acceptables (c'est-à-dire inaudibles) tant qu'on reste en-deçà de la huitième frette qui était à peu près la dernière utilisée sur un luth :

$Frettes$	$Rapports$	$Erreur(cents)$
1	$1,0597$	$0,4$
2	$1,1230$	$0,9$
3	$1,1901$	$1,3$
4	$1,2612$	$1,8$
5	$1,3365$	$2,2$
6	$1,4164$	$2,6$
7	$1,5010$	$3,1$
8	$1,5906$	$3,5$

5. **Le siècle des Lumières**

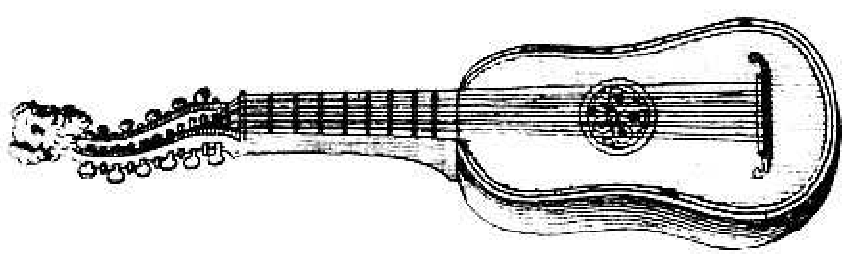
   (a) Le mystère Stradivarius

   Le plus célèbre des luthiers, Antonio Stradivari (1644-1737), fabriquait certaines des plus anciennes guitares baroques connues, dont celles-ci :

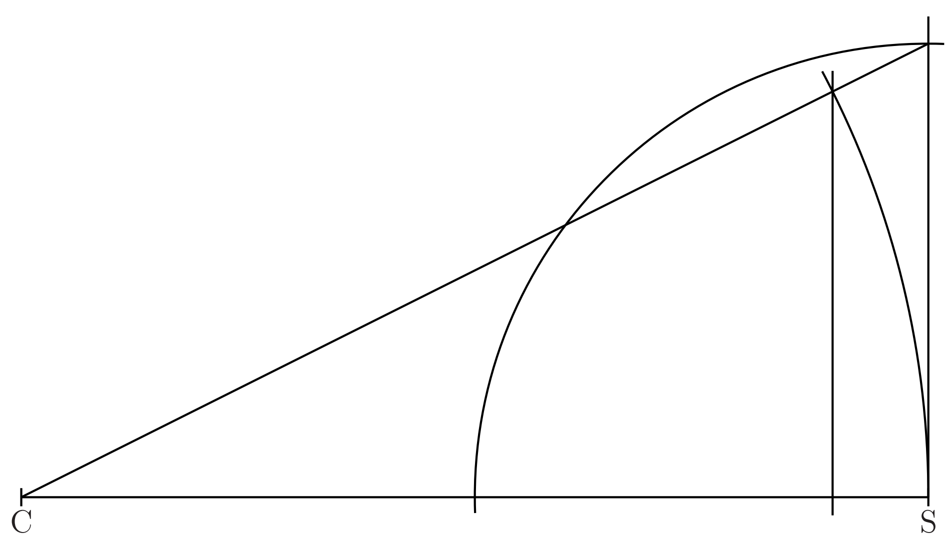


Comme on le voit sur les rosaces de ces deux guitares, Stradivarius adorait la géométrie (il utilisait par exemple un compas pour dessiner le célèbre motif des ouïes des ses violons : $\int$ (symbole d'ailleurs très utilisé en mathématiques...) et il n'est pas impossible qu'il ait eu vent des travaux de Mersenne et s'en soit inspiré. Mais il adorait aussi le secret, et ne semble avoir rien publié sur ce sujet...

(b) L'Encyclopédie
Jean Henri LeRond d'Alembert (1717-1783), celui des Encyclopédistes qui s'occupait des sciences et de la musique, fut le premier à résoudre l'équation des cordes vibrantes ; il connaissait l'existence de la guitare, ainsi que le montre celle-ci, extraite de l'Encyclopédie, et sur laquelle les frettes sont nettement visibles (on en compte 8) :



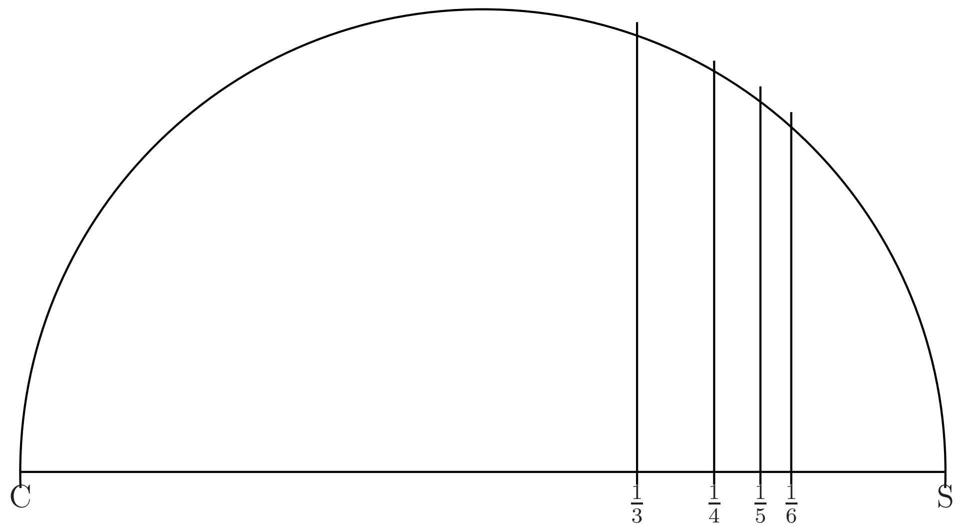
Dans la même Encyclopédie, il parle d'une « nouvelle » gamme que Rousseau attribue à un certain Boisgelou, et qui consiste à remplacer la quinte $\frac{3}{2}$ par son « approximation » $\sqrt{\sqrt{5}}$. Bien que d'Alembert ne propose pas la construction, cette approximation mène à $r \simeq \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ qui est constructible à la règle et au compas, comme par exemple la méthode ci-dessous pour la deuxième frette (la première s'en déduisant par la construction vue au paragraphe sur Mersenne) :



Ici le cercle de centre S passe par le milieu du manche.
(*Cette construction est en fait celle du pentagone régulier, et l'approximation pourrait bien être liée à la mystique du nombre d'or...*)

Frettes	*Valeurs exactes*	*Rapports*	*Erreur(cents)*
1	$\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	$1,0574$	$-3,4$
2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$1,1180$	$-6,8$
3	$\sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{8}}$	$1,1822$	$-10,3$
4	$\frac{5}{4}$	$1,2500$	$-13,7$
5	$\frac{5}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	$1,3217$	$-17,1$
6	$\frac{5\sqrt{5}}{8}$	$1,3975$	$-20,5$
7	$\sqrt{\sqrt{5}}$	$1,4953$	$-3,4$
8	$\frac{25}{16}$	$1,5625$	$-27,4$
9	$\frac{25}{16}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$	$1,6521$	$-30,8$
10	$\frac{25}{16}\frac{\sqrt{5}}{2}$	$1,7469$	$-34,2$
11	$\frac{25}{32}\sqrt{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$	$1,8472$	$-37,6$
12	$\frac{125}{128}$	$1,9531$	$-41,1$

Dans l'Encyclopédie, on trouve également cette figure (*due à J. J. Rousseau*) :

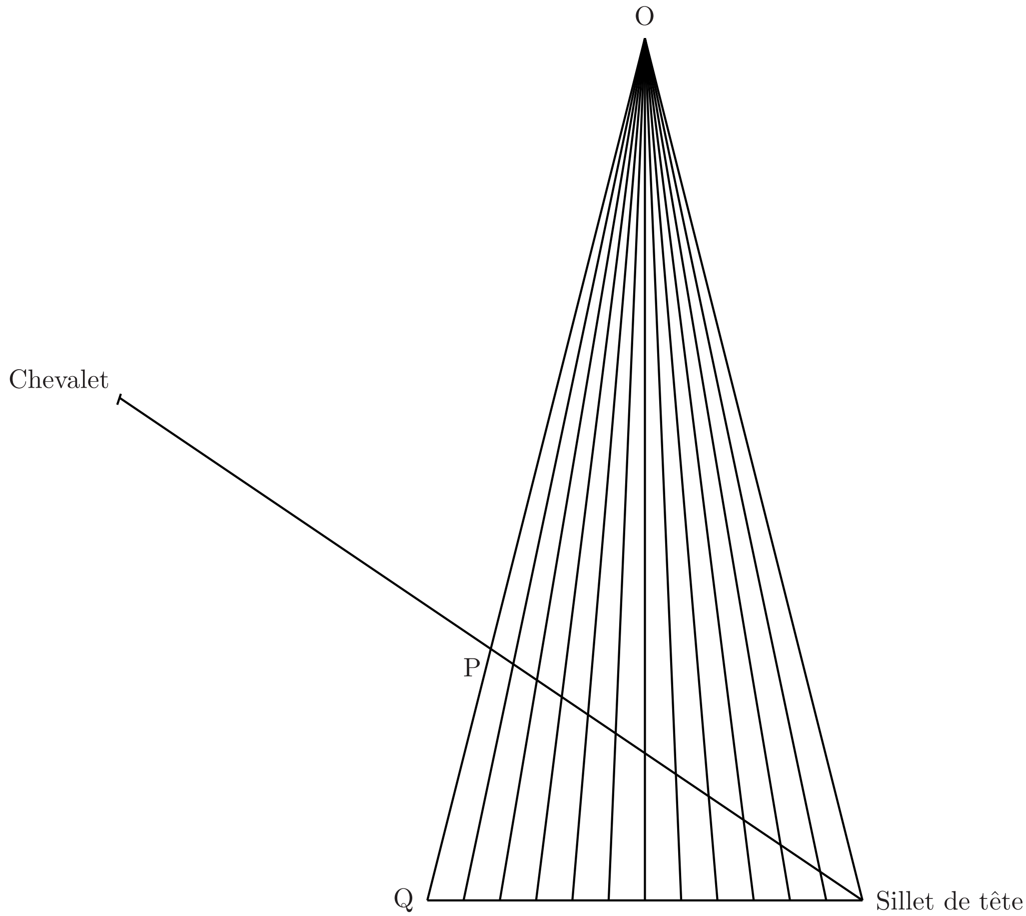


qui permet de construire des segments de longueurs respectives $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$. Reportées à partir de S, ces longueurs donnent les frettes 11, 10, 9 et 8 avec une plutôt bonne approximation pour les frettes 8 et 11 :

Frettes	*Longueurs exactes*	*Rapports*	*Erreur(cents)*
8	$1-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$	$1,5941$	$7,3$
9	$\dfrac{3}{5}$	$1,6667$	$-15,6$
10	$1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$1,7637$	$-17,7$
11	$1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	$1,8918$	$3,7$

(c) D. Strähle

En 1743, un certain Daniel P. Strähle publiait dans les annales de l'Académie Royale de Suède cette lumineuse méthode pour poser d'un coup les douze premières frettes sur une guitare :



On a $QS = \frac{1}{2}CS$, $OQ = OS = CS$ et $PQ = \frac{7}{24}OQ$; le segment [QS] est découpé en douze divisions equidistantes, et les droites joignant ces graduations à O coupent le manche en douze positions où sont les frettes.
La méthode vient de la géométrie projective, puisqu'on réalise l'homographie $y = \frac{17-5x}{17+7x}$, où x est la longueur allant du sillet à la graduation considérée sur [QS] (en posant $QS = 1$), et y est la longueur correspondante sur le manche (allant du chevalet à la frette considérée). Ainsi, si $x = 0$ (sillet), on a $y = 1$ (corde complète), si $x = 1$, on a $y = \frac{1}{2}$ (moitié de la corde), et si $x = \frac{1}{2}$, on a $y = \frac{29}{41}$; on reconnaît l'inverse d'une approximation de $\sqrt{2}$, en effet $r^6 = \sqrt{2}$.
Quelles fonctions homographiques approchent bien la fonction 2^x sur l'intervalle $[0;1]$? La fonction $y = h_2(x) = \frac{(2\sqrt{2}-2)x+2}{(\sqrt{2}-2)x+2}$ présente la particularité de donner des valeurs exactes pour $x = 0$, $\frac{1}{2}$ et 1 . Remplacer cette fonction par la fonction homographique approchée $y = h_1(x) = \frac{17+7x}{17-5x}$ revient à remplacer $\sqrt{2}$ par $\frac{24}{17}$ qui en est une "presque bonne" approximation, puisque $2 \times 17^2 = 24^2 + 2$.
Les deux fonctions homographiques sont effectivement très précises :

frettes	$h_1(x)$	$h_2(x)$	erreur h_1	erreur h_2
1	$1,0603$	$1,0604$	$1,4$	$1,5$
2	$1,1237$	$1,1239$	$1,9$	$2,2$
3	$1,1905$	$1,1907$	$1,8$	$2,2$
4	$1,2609$	$1,2612$	$1,3$	$1,8$
5	$1,3352$	$1,3356$	$0,5$	$1,0$
6	$1,4138$	$1,4142$	$-0,5$	$0,0$
7	$1,4970$	$1,4975$	$-1,5$	$-1,0$
8	$1,5854$	$1,5858$	$-2,2$	$-1,8$
9	$1,6792$	$1,6796$	$-2,6$	$-2,2$
10	$1,7792$	$1,7795$	$-2,5$	$-2,2$
11	$1,8859$	$1,8861$	$-1,7$	$-1,5$
12	$2,0000$	$2,0000$	$0,0$	$0,0$

L'erreur maximale est 2,6 cents pour h_1 et 2,2 cents pour h_2 . De plus, sur les frettes 2 et 3, h_1 est même plus précise que h_2 dont elle est pourtant elle-même une approximation ! Pour le dire autrement, soit u_n la suite définie par $u_n = \frac{204+7n}{204-5n}$ (alors $h_1\left(\frac{n}{12}\right) = u_n$). Alors :

- Pour $n = 2$, $u_2 = \frac{109}{97}$ qui est une bonne approximation de $\frac{9}{8}$ ($97 \times 9 = 873 = 109 \times 8 + 1$),
- Pour $n = 3$, $u_3 = \frac{25}{21}$ qui est une bonne approximation de $\frac{6}{5}$;
- Pour $n = 4$, $u_4 = \frac{29}{23}$ qui est une bonne approximation de $\frac{5}{4}$;
- Pour $n = 5$, $u_5 = \frac{239}{79}$ qui est une bonne approximation de $\frac{4}{3}$;
- Pour $n = 7$, $u_7 = \frac{253}{169}$ qui est une bonne approximation de $\frac{3}{2}$.

6. **Aujourd'hui**
Sachant que la suite des longueurs est géométrique, on peut les calculer et les placer directement, sans avoir à faire de construction ; il est même possible d'imprimer un gabarit fait par un logiciel de CAO ! Puisque la suite des longueurs de corde l_n est géométrique de raison $2^{-\frac{1}{12}}$, la suite des largeurs de cases (délimitées par les frettes) vérifie $l_n - l_{n+1} = l_n - l_n \times 2^{-\frac{1}{12}} = l_n\left(1-2^{-\frac{1}{12}}\right)$ et est donc géométrique de raison $1-2^{-\frac{1}{12}} \simeq 0,056$: Chaque case est plus courte que la précédente de $5,6\%$. Pour calculer les longueurs de corde sur un tableur, on peut entrer « =NN*PUISSANCE(2;-1/12) » si "NN" désigne la case contenant la longueur de la corde à vide, et en recopiant cette formule vers le bas, le tableau se remplit des distances entre le chevalet et les différentes frettes.

Le Tampon, le 14 mai 2007
Alain Busser