Histoire des probabilités

Marion Le Gonidec

Depuis quand fait-on des probas/stats?

L'homme joue depuis toujours avec le hasard

- Avec le hasard pur:

  En Egypte et en Inde, on jouait aux dés et aux osselets il y a 5000 ans,

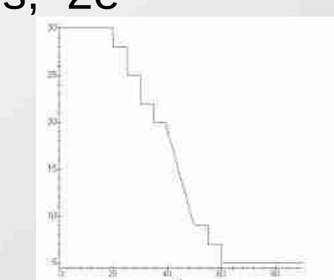
- Et avec le hasard raisonné aussi:

  Le backgammon date de presque 5000 ans.

L'homme a toujours pris et mesuré les risques pour gagner de l'argent et le faire fructifier...

  Prêts à la grosse aventure chez les grecs, 4e siècle avant JC

  Tables d'Ulpianus (regulation rente viagères) chez les romains, 2e siècle



Depuis quand fait-on des probabilités?

Du matériel „statistique“ disponible

- Dès l'antiquité

    Recensements en Egypte, en Grèce, et dans l'Empire romain

- Au moyen-age

    Angleterre:

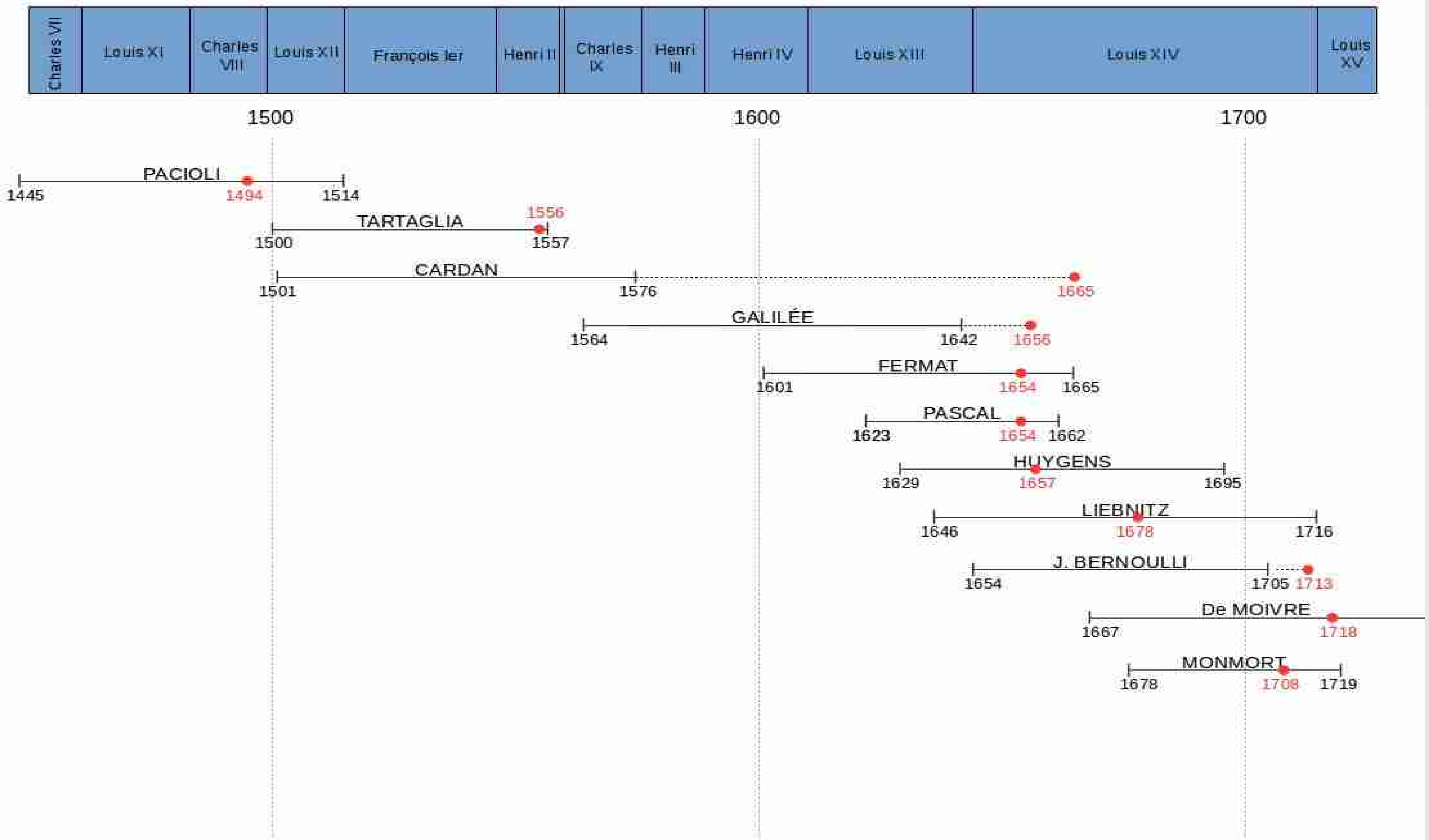
    1086, recensement général de la population par Guillaume le conquérant en vue de construire un système d'imposition

    dès le 12ieme siècle, publications régulières de tables de mortalité

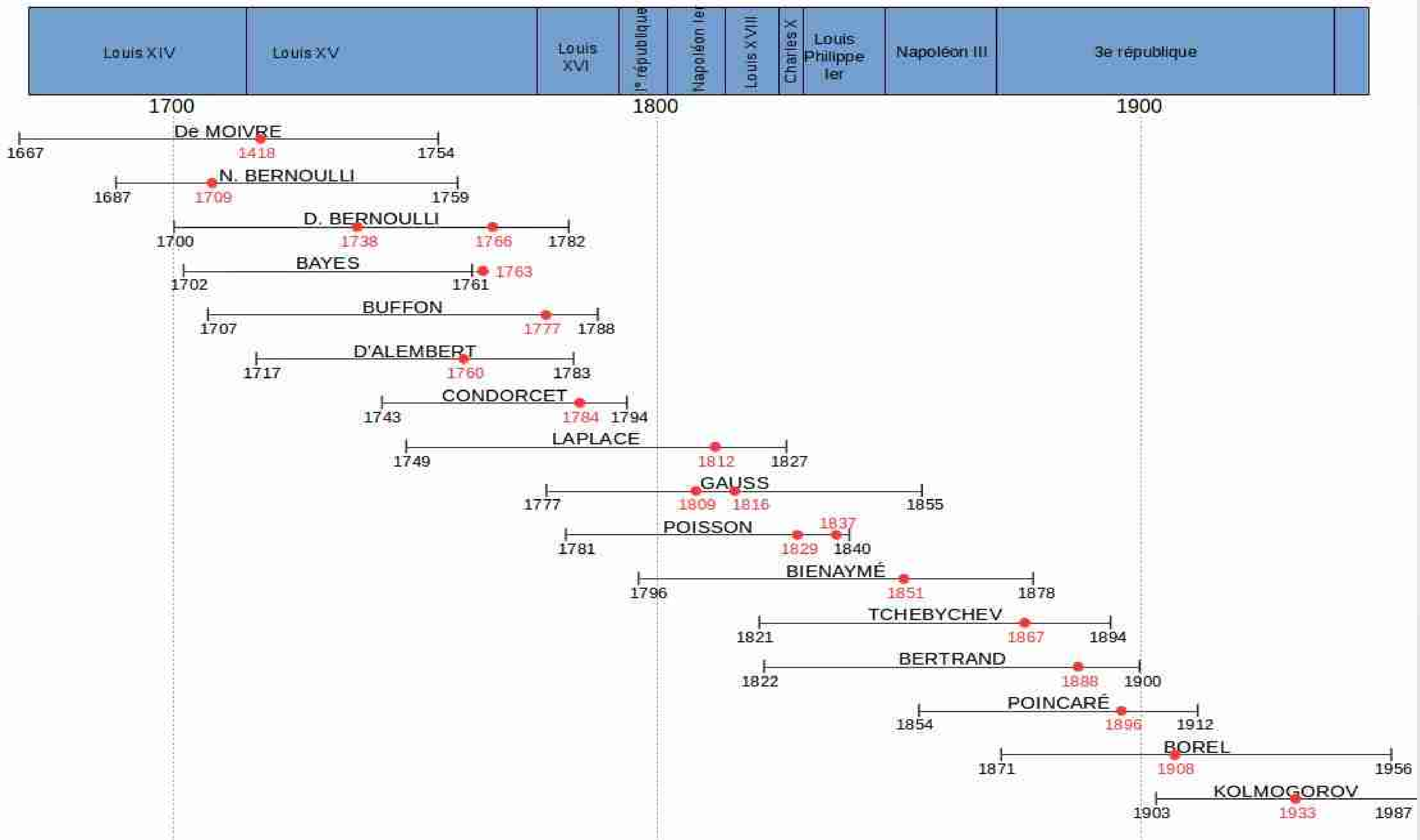
    Venise:

    à la fin 13ieme, recensement et collecte de données commerciales, annualisés en 1421.

Chronologie



Chronologie



Le problème des probabilités

Des barrières morales et religieuses à l'idée de hasard

- Quand il n'y a pas un Dieu de la chance...
  - Tyché chez les grecs,
  - Fortuna chez les grecs et les romains,
  - Ganesh chez les indous.

... Dieu (en général) n'aime pas trop:

  - Les jeux de hasard... et encore moins lorsque de l'argent est mis en jeu,
  - Les gens qui gagnent de l'argent sans rien faire.

- Dieu et l'argent...

  Dans la bible et le coran: *les prêts à intérêt sont proscrits.*

- Dieu et les jeux...
  - Dans le coran: *les jeux de hasard sont interdits*
  - Dans la loi oral juive: *les joueurs sont discrédités*
  - Dans la bible: *Il n'y a pas de hasard, c'est Dieu qui décide*

Dieu et les jeux...

- Dans le Coran

« ô les croyants! Le vin, les jeux de hasard, les pierres dressées, les flèches de divination ne sont qu'une abomination, œuvre du Diable. Écartez-vous en, afin de réussir.»

- Dans la loi orale juive

La Michna *inclut dans la liste des personnes dont on ne peut pas tenir compte des témoignages les joueurs de dés ainsi que les parieurs aux courses...*

- Dans la Bible

«On agite les dés dans le gobelet, mais quelle que soit la décision, elle vient du seigneur.»

Jeux et sociétés civiles

- Chez les spartes et les romains

  le jeu est interdit sauf ceux propres à développer la force physique

- Si la bible n'interdit pas les jeux, l'église s'en charge!

  au 9ieme siècle, le concile de Mayenne prévoit d'excommunier tout fidèle ayant joué une somme d'argent aux dés...

- Moyen-Age

  Le jeu est interdit au peuple... mais les nobles jouent tout les temps

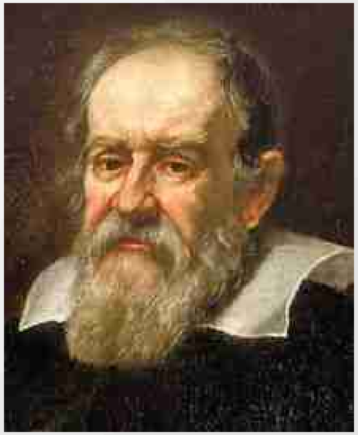
  Premier casino européen à Venise vers 1640.

Les premiers ouvrages...

CARDAN (1501-1576) :

De ludo aleae, traité écrit vers 1560,

...mais publié seulement en 1665.



GALILÉE (1564-1642) :

Sulla scoperta dei dadi, écrit vers 1620,

...mais publié seulement en 1656.

Le problème du duc de Toscane...

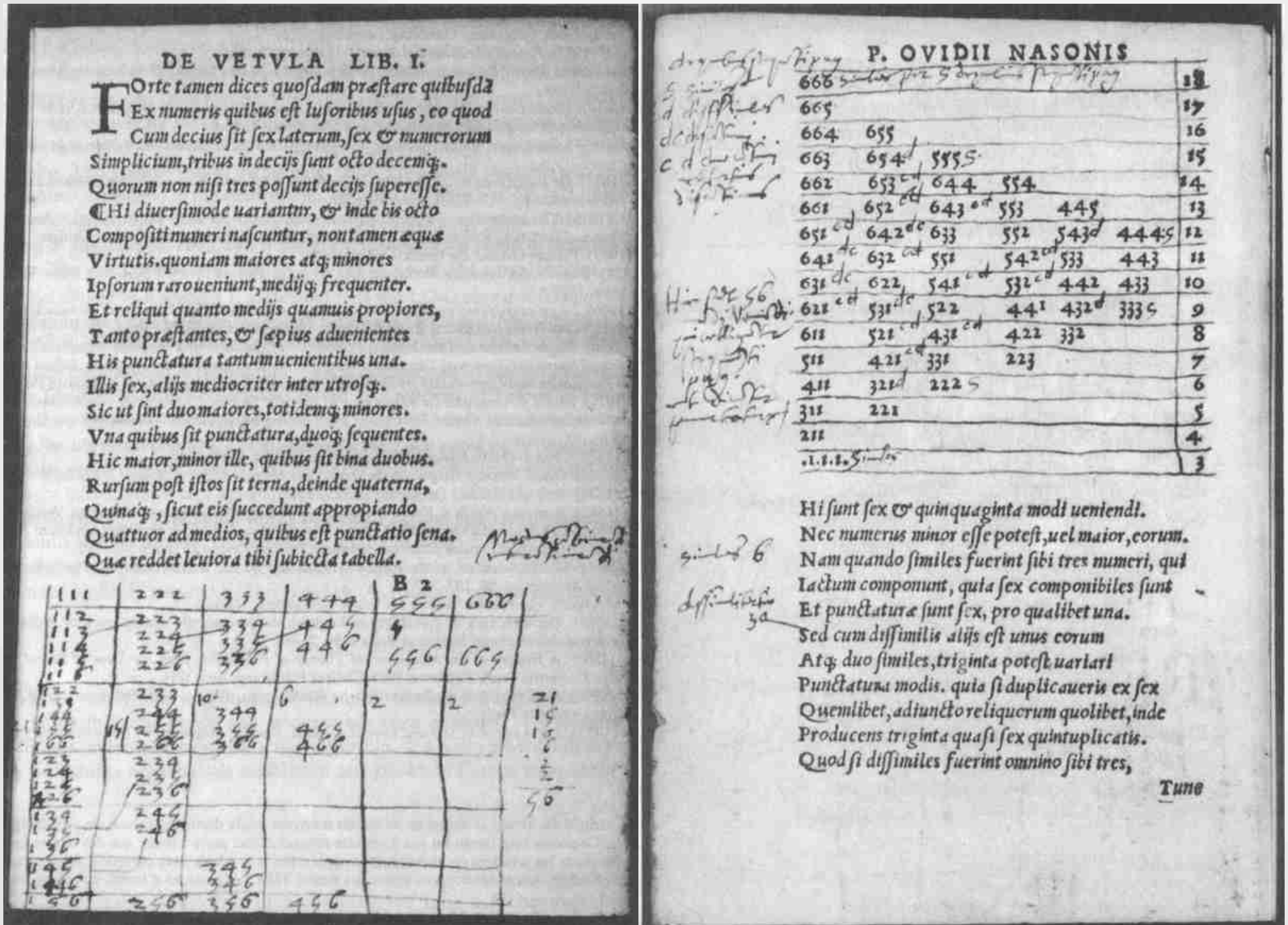
On jette 3 dés... et on parie sur la somme des faces

Le problème du duc de Toscane...

On jette 3 dés... et on parie sur la somme des faces

«Bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même chance, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12...»

Le poème *De Vetula* *(R. De Fournival, 1260)*



DE VETVLA LIB. I.

Forte tamen dices quosdam præstare quibusdã
Ex numeris quibus est lusoribus usus, eo quod
Cum decius sit sex laterum, sex & numerorum
Simplicium, tribus in decijs sunt octo decemq;.
Quorum non nisi tres possunt decijs superesse.
Hi diuersimode uariantur, & inde bis octo
Compositi numeri nascuntur, non tamen æquæ
Virtutis. quoniam maiores atq; minores
Ipsorum raro ueniunt, medijq; frequenter.
Et reliqui quanto medijs quamuis propiores,
Tanto præstantes, & sæpius aduenientes
His punctatura tantum uenientibus una.
Illis sex, alijs mediocriter inter utrosq;.
Sic ut sint duo maiores, totidemq; minores.
Vna quibus sit punctatura, duoq; sequentes.
Hic maior, minor ille, quibus sit bina duobus.
Rursum post istos sit terna, deinde quaterna,
Quinaq; , sicut eis succedunt appropiando
Quattuor ad medios, quibus est punctatio sena.
Quæ reddet leuiora tibi subiecta tabella.

B 2

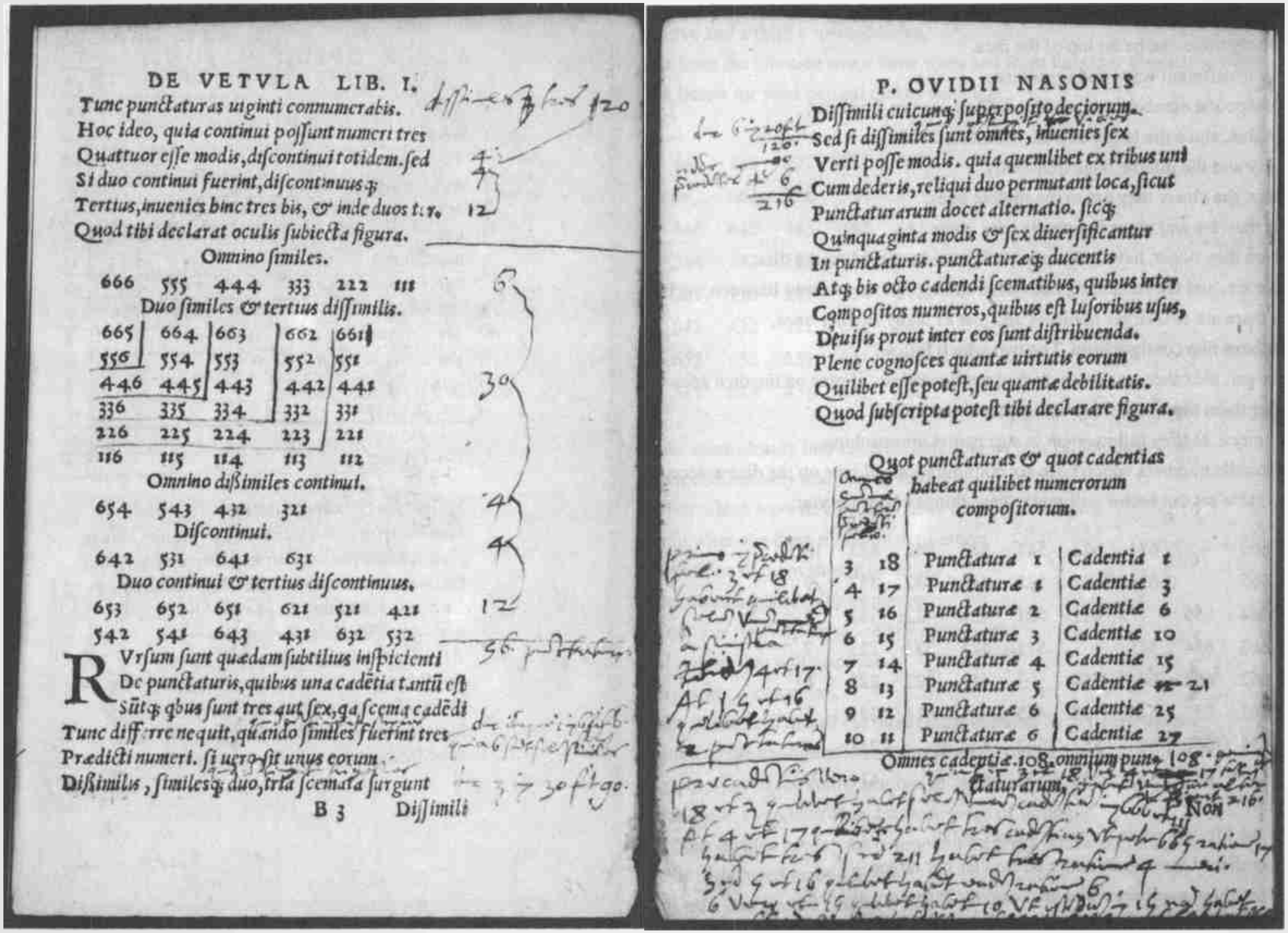
P. OVIDII NASONIS

666						18
665						17
664	655					16
663	654	555				15
662	653	644	554			14
661	652	643	553	445		13
651	642	633	552	543	444	12
641	632	551	542	533	443	11
631	622	541	532	442	433	10
621	531	522	441	432	333	9
611	521	431	422	332		8
511	421	331	223			7
411	321	222				6
311	221					5
211						4
.1.1.1.						3

Hi sunt sex & quinquaginta modi ueniendi.
Nec numerus minor esse potest, uel maior, eorum.
Nam quando similes fuerint sibi tres numeri, qui
Iactum componunt, quia sex componibiles sunt
Et punctaturæ sunt sex, pro qualibet una.
Sed cum dissimilis alijs est unus eorum
Atq; duo similes, triginta potest uariari
Punctatura modis. quia si duplicaueris ex sex
Quemlibet, adiuncto reliquorum quolibet, inde
Producens triginta quasi sex quintuplicatis.
Quod si dissimiles fuerint omnino sibi tres,

Tunc

Le poème *De Vetula* *(R. De Fournival, 1260)*



DE VETVLA LIB. I.

Tunc punctaturas uiginti connumerabis.
Hoc ideo, quia continui poſſunt numeri tres
Quattuor eſſe modis, diſcontinui totidem. ſed
Si duo continui fuerint, diſcontinuusque
Tertius, inuenies hinc tres bis, & inde duos ter.
Quod tibi declarat oculis ſubiecta figura.

Omnino ſimiles.

666 555 444 333 222 111

Duo ſimiles & tertius diſſimilis.

665	664	663	662	661
556	554	553	552	551
446	445	443	442	441
336	335	334	332	331
226	225	224	223	221
116	115	114	113	112

Omnino diſſimiles continui.

654 543 432 321

Diſcontinui.

642 531 641 631

Duo continui & tertius diſcontinuus.

653 652 651 621 521 421
542 541 643 431 632 532

RVrſum ſunt quædam ſubtilius inſpicienti
De punctaturis, quibus una cadētia tantū eſt
Sūtque qbus ſunt tres aut ſex, quia ſcema cadēdi
Tunc differre nequit, quando ſimiles fuerint tres
Prædicti numeri. ſi uero ſit unus eorum
Diſſimilis, ſimilesque duo, tria ſcemata ſurgunt

B 3 Diſſimili

P. OVIDII NASONIS

Diſſimili cuicunque ſuperpoſito deciorum.
Sed ſi diſſimiles ſunt omnes, inuenies ſex
Verti poſſe modis. quia quemlibet ex tribus uni
Cum dederis, reliqui duo permutant loca, ſicut
Punctaturarum docet alternatio. ſicque
Quinquaginta modis & ſex diuerſificantur
In punctaturis. punctaturæque ducentis
Atque bis octo cadendi ſcematibus, quibus inter
Compoſitos numeros, quibus eſt luſoribus uſus,
Diuiſis prout inter eos ſunt diſtribuenda.
Plene cognoſces quantæ uirtutis eorum
Quilibet eſſe poteſt, ſeu quantæ debilitatis.
Quod ſubſcripta poteſt tibi declarare figura.

Quot punctaturas & quot cadentias
habeat quilibet numerorum
compoſitorum.

3	18	Punctatura 1	Cadentia 1
4	17	Punctaturæ 1	Cadentiæ 3
5	16	Punctaturæ 2	Cadentiæ 6
6	15	Punctaturæ 3	Cadentiæ 10
7	14	Punctaturæ 4	Cadentiæ 15
8	13	Punctaturæ 5	Cadentiæ ~~15~~ 21
9	12	Punctaturæ 6	Cadentiæ 25
10	11	Punctaturæ 6	Cadentiæ 27

Omnes cadentiæ. 108. omnium punctaturarum 108.

Le poème *De Vetula* *(1260)*

«Peut-être cependant diras-tu que certaines (sommes) l'emportent sur d'autres parmi les nombres possibles pour les joueurs, pour la raison que, puisque le dé a six faces et six nombres simples, sur trois dés il y en a dix-huit, dont trois seulement peuvent se présenter sur les dés.

Ces nombres varient de diverses manières, et de là naissent deux fois huit nombres composés (3, 4, 5, ..., 16, 17, 18)*, qui ne sont pas d'égale force, puisque les plus grands* (17, 18) *et les plus petits* (3, 4) *d'entre eux viennent rarement, et les moyens fréquemment* (10, 11)*.*

Et plus tous les autres se rapprochent autant que l'on veut des moyens, meilleurs ils sont et plus souvent ils se présentent... »

Le poème *De Vetula* *(1260)*

- Les 56 configurations par valeurs de somme

18	666	631 622 541 532 442 433	10
17	665	621 531 522 441 432 333	9
16	664 655	611 521 431 422 332	8
15	663 654 555	511 421 331 223	7
14	662 653 644 554	411 322 222	6
13	661 652 643 553 445	311 221	5
12	651 642 633 552 543 444	211	4
11	641 632 551 542 533 443	111	3

Le poème *De Vetula* *(1260)*

- Les 56 configurations par valeurs de somme

18	666	631 622 541 532 442 433	10
17	665	621 531 522 441 432 333	9
16	664 655	611 521 431 422 332	8
15	663 654 555	511 421 331 223	7
14	662 653 644 554	411 322 222	6
13	661 652 643 553 445	311 221	5
12	651 642 633 552 543 444	211	4
11	641 632 551 542 533 443	111	3

Le poème *De Vetula* (1260)

- Les 56 configurations par valeurs de somme

18	666	631 622 541 532 442 433	10
17	665	621 531 522 441 432 333	9
16	664 655	611 521 431 422 332	8
15	663 654 555	511 421 331 223	7
14	662 653 644 554	411 322 222	6
13	661 652 643 553 445	311 221	5
12	651 642 633 552 543 444	211	4
11	641 632 551 542 533 443	111	3

- Configurations par type:

  triples: 1 façon

  double: 3 façons

  autres: 6 façons

Triples: 666 555 444 333 222 111

Doubles: 665 664 663 662 661
556 554 553 552 551
446 445 443 442 441
336 335 334 332 331
226 225 224 223 221
116 115 114 113 112

Suites: 654 543 432 321

Non-suites: 642 641 631 531

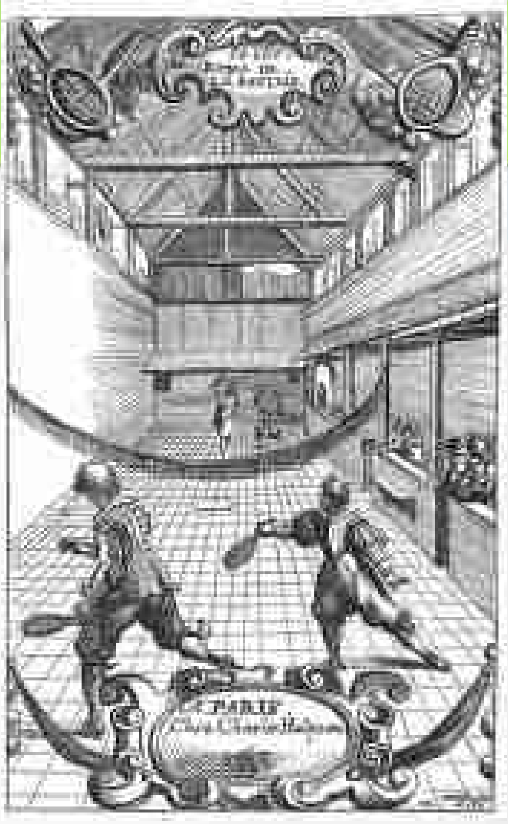
2 à la suite, 1 non: 653 652 651 621 521 421
542 541 643 431 632 532

Le poème *De Vetula* *(1260)*

«... et c'est ainsi que de cinquante-six manières ils se différencient en ce qui concerne les configurations de points; et ces configurations, par deux cent seizes manières de tomber, lesquelles ayant été réparties entre les nombres composés possibles pour les joueurs, selon qu'elles doivent être distribuées entre eux, ***tu connaitra pleinement quelle valeur peut avoir l'une quelconque d'entre elles, ou quelle perte****.»*

3 & 18	1 configuration possible,	1 façon de tomber
4 & 17	1 configuration possible,	3 façons de tomber
5 & 16	2 configurations possibles,	6 façons de tomber
6 & 15	3 configurations possibles,	10 façons de tomber
7 & 14	4 configurations possibles,	15 façons de tomber
8 & 13	5 configurations possibles,	21 façons de tomber
9 & 12	6 configurations possibles,	25 façons de tomber
10 & 11	6 configurations possibles,	27 façons de tomber

Le problème des Partis



Le problème posé par Pacioli (1494):

Une brigade joue à la paume :

il faut 60 pour gagner, chaque coup vaut 10.

L'enjeu est de 10 ducats.

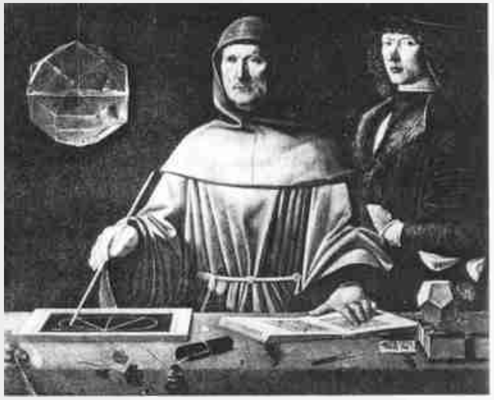
Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20.

On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp…

Habillage de problèmes juridiques de partage ou d'indemnisation

Le problème des Partis

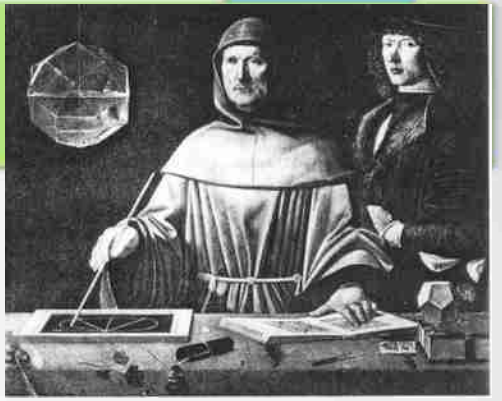
Pacioli (1494) → Cardan (1539) → Tartaglia (1556)



→ Forestani (1603)

→ Pascal & Fermat (1654)

Solution de Pacioli



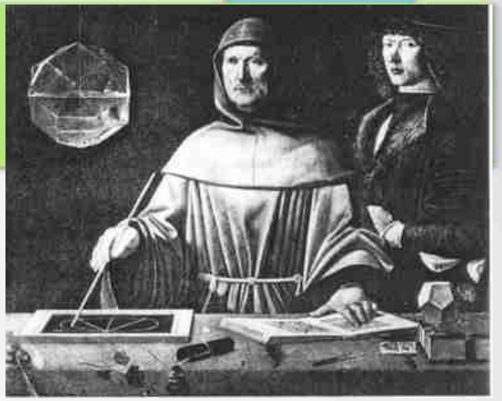
Répartir l'enjeu selon les points déjà gagnés

Ils ont marqué 70 pts au total. On repartit les 10 ducats selon les proportions marquées:

- *50/70 soit 5 septièmes pour le premier,*
- *20/70 soit 2 septièmes pour le second*

Le premier recoit donc 7,14 ducats et le second 2,86.

Solution de Pacioli



<u>Répartir l'enjeu selon les points déjà gagnés</u>

Ils ont marqué 70 pts au total. On repartit les 10 ducats selon les proportions marquées:

- *50/70 soit 5 septièmes pour le premier,*
- *20/70 soit 2 septièmes pour le second*

Le premier recoit donc 7,14 ducats et le second 2,86.

Remarque de Tartaglia: *«Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer tout et le second rien; ce serait tout à fait déraisonnable que pour 10, il doive tirer tout.»*

Solution de Tartaglia

Tenir compte de l'écart de points:

L'écart de gain est proportionnel à l'écart de points.

- *On calcule l'écart entre les 2 équipes:*

  50-20 = 30 pts

- *On rapporte ce résultat au total de 60 à atteindre : 30/60= ½*

  Cet écart représente ½ du total des points nécessaires pour gagner.

- *L'écart de gain entre les 2 joueurs est égal à ½ des 10 ducats mis en jeu soit 5 ducats.*

Le premier reçoit donc 7,5 ducats et le second 2,5.

Solution de Forestani

Tenir compte de la durée maximale du jeu

- *Un jeu dure au plus 11 coups.*
- *5 en on été gagné par le premier, 2 par le 2ieme*
- *Les 4 = 11 – (5+2) jeux restants ne sont pas tranchés*
- *On donne donc (5+ 2)/11ièmes de la mise au premier*

  et (2+2)/11ièmes de la mise au second

Le premier reçoit donc 6,36 ducats et le second 3,64.

Solution de Cardan

<u>Repartir l'enjeu selon les points qu'il reste à marquer</u>

- *Il reste 1 jeu au premier pour gagner*
- *Il reste 4 jeux à marquer au second pour gagner*
- *Il fait intervenir les „progressions“ associées*

1+2+3+4 = 10 et 1 =1

donne 10/11ieme au premier, 1/11ieme au second

Le premier reçoit donc 9,1 ducats et le second 0,9.

Les solutions de Pascal et Fermat

<u>Imaginer tout ce qu'il pourrait se passer si le jeu continue...</u>

Un des problèmes proposés à Pascal par le chevalier de Méré:

Deux joueurs misent chacun 32 pistoles.

Ils jouent une série de parties d'un jeu de ***hasard équitable.***

Le premier qui gagne trois parties emporte les 64 pistoles.

Mais le jeu est interrompu alors que le premier joueur a gagné deux parties et l'autre une...

Comment les 64 pistoles doivent-elles être réparties ?

La solution de Pascal

2-1

3-1 2-2

Si au coup suivant on a 3-1 → le premier gagne 64 pistoles

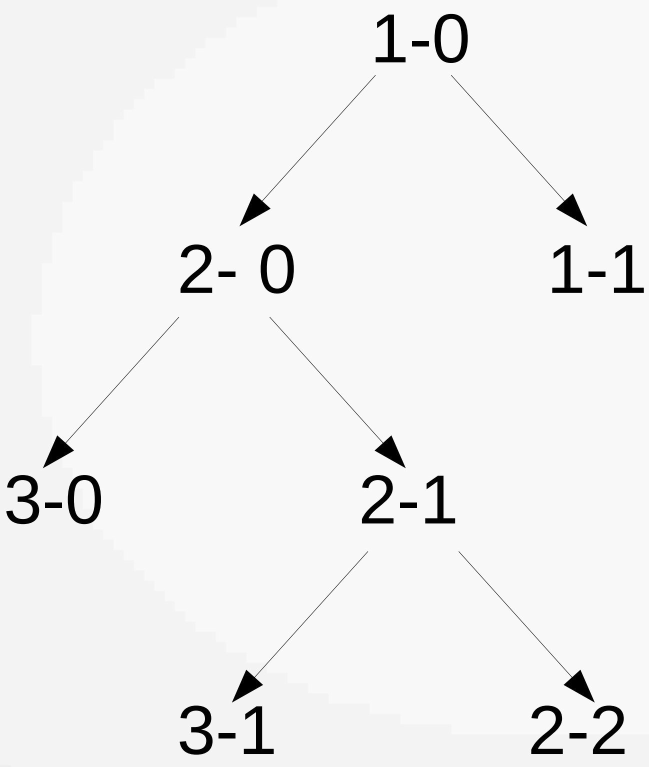
Si au coup suivant on a 2-2 → les 2 partagent, le premier gagne 32 pistoles

On calcule la moyenne des gains possibles: (64+32)/2=48

Le premier reçoit 48 pistoles et le second 16.

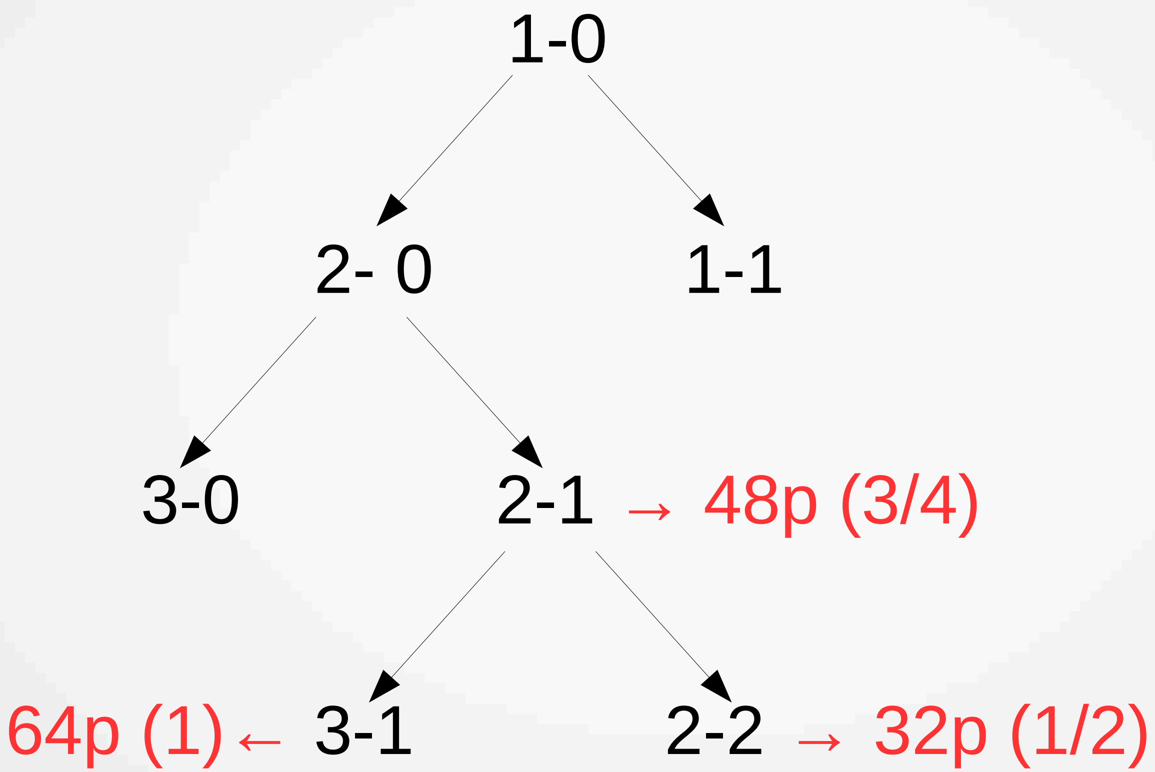
La solution de Pascal

Et si seulement une partie a été jouée?



La solution de Pascal

Et si seulement une partie a été jouée?



La solution de Pascal

Et si seulement une partie a été jouée?

1-0

2- 0

1-1 → 32p (1/2)

64p (1) ← 3-0

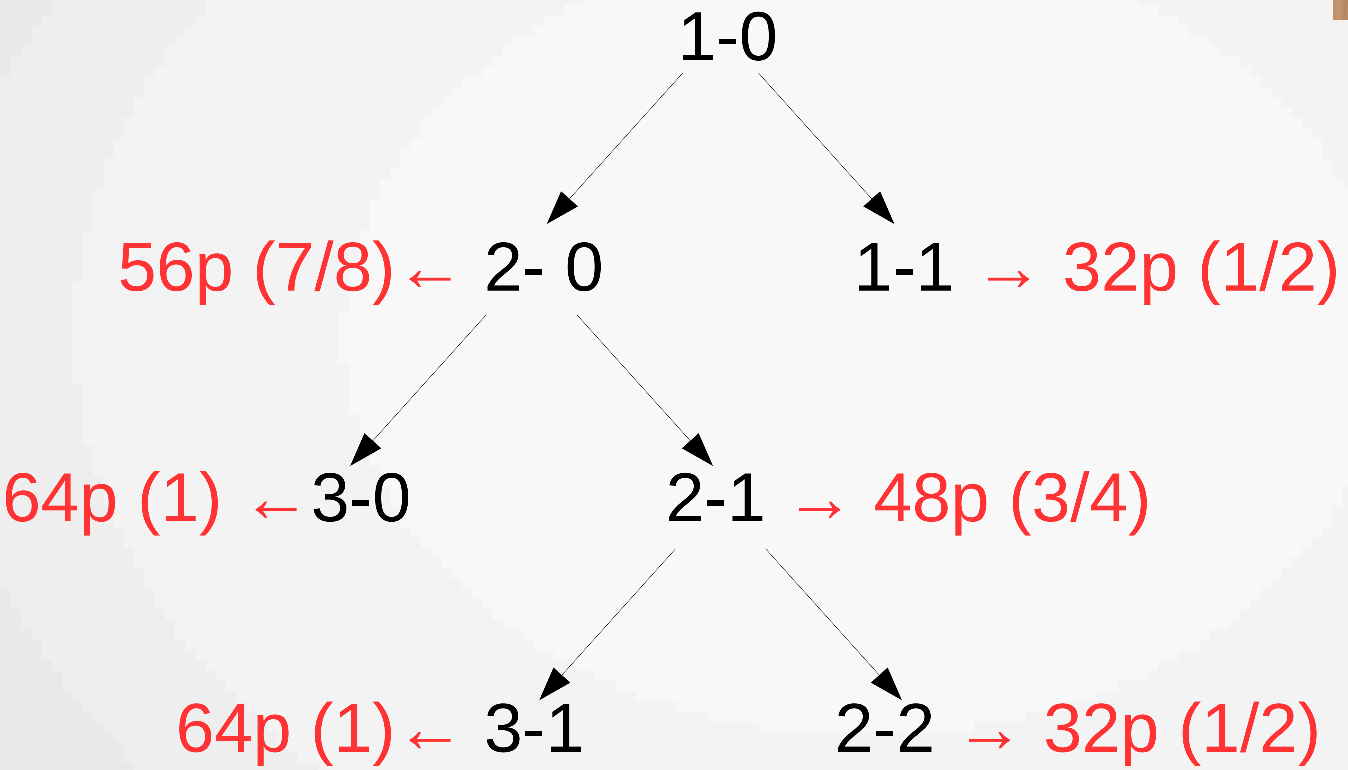
2-1 → 48p (3/4)

64p (1) ← 3-1

2-2 → 32p (1/2)

La solution de Pascal

Et si seulement une partie a été jouée?



La solution de Pascal

Et si seulement une partie a été jouée?

1-0 → 44p (11/16)

56p (7/8) ← 2- 0

1-1 → 32p (1/2)

64p (1) ← 3-0

2-1 → 48p (3/4)

64p (1) ← 3-1

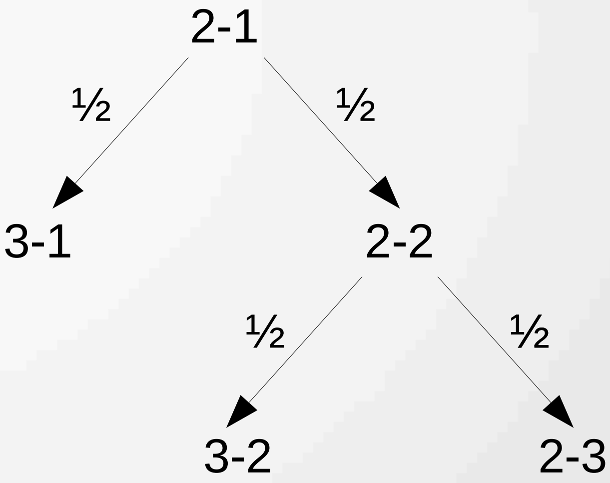
2-2 → 32p (1/2)

La solution de Fermat

On résume les futurs scores possibles dans un tableau jusqu'à ce que tous les parties soient gagnées...

2-1	3-1	3-2
		4-1
	2-2	3-2
		2-3

on le ferait aujourd'hui sur un graphe:



La solution de Fermat

<table>
<tr><td rowspan="4">2-1</td><td rowspan="2">3-1</td><td>3-2</td><td rowspan="2">½</td></tr>
<tr><td>4-1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2-2</td><td>3-2</td><td>¼</td></tr>
<tr><td>2-3</td><td></td></tr>
</table>

Le premier joueur gagne

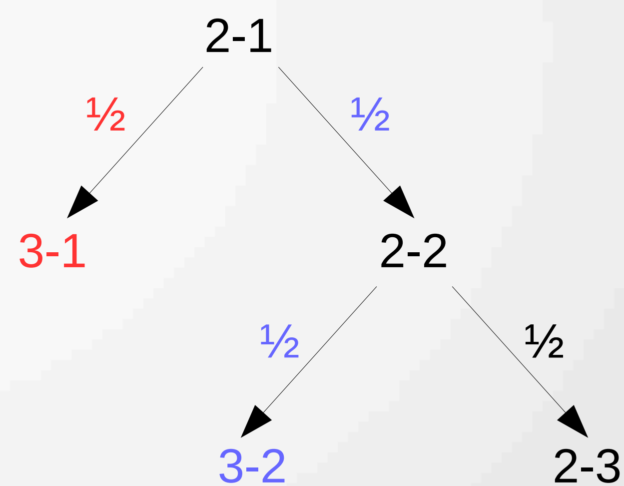
- Au premier coup avec une chance sur 2

  ou 2 chance sur 4:

  Score 3-1 ½

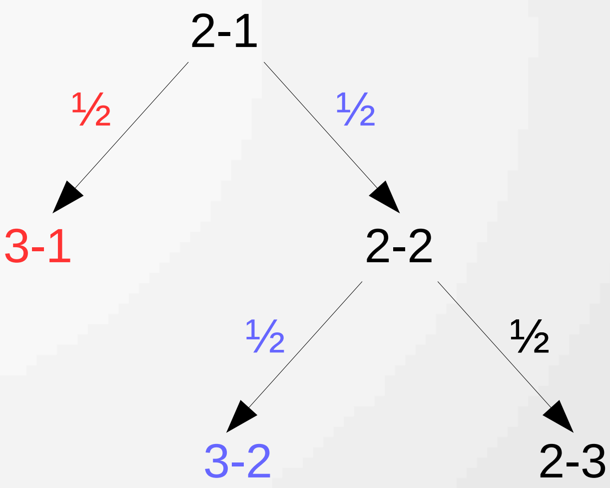
- Au coup suivant avec une chance sur 4:

  Score 3-2 ¼ = ½ x ½



La solution de Fermat

2-1	3-1	3-2	½
		4-1	
	2-2	3-2	¼
		2-3	



Le premier joueur gagne

- Au premier coup avec une chance sur 2

  ou 2 chances sur 4:

  Score 3-1 ½

- Au coup suivant avec une chance sur 4:

  Score 3-2 ¼ = ½ x ½

Il a donc 3 chances sur 4 de gagner ½ + ½ x ½ = ¾...

Le premier joueur recoit ¾ de la mise: ¾ x 64 = 48 Pistoles

La solution de Fermat

<table>
<tr><td rowspan="16">1 - 0</td><td rowspan="8">1 - 1</td><td rowspan="4">1 - 2</td><td rowspan="2">1 - 3</td><td>1 - 4</td><td></td></tr>
<tr><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2 - 1</td><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="2">2 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="8">2 - 0</td><td rowspan="4">2 - 1</td><td rowspan="2">2 - 2</td><td>2 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>3 - 2</td><td>1/16</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="2">2 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3 - 0</td><td rowspan="2">3 - 1</td><td>3 - 2</td><td rowspan="4">4 x 1/16</td></tr>
<tr><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4 - 0</td><td>4 - 1</td></tr>
<tr><td>5 - 0</td></tr>
</table>

1/4 + 1/4 + 3/16 = 11/16

Le premier gagne les 11/16 iemes des 64 pistoles soit... 44 pistoles!

Et pour le jeu de Paume?

5-2 → 9,375D (15/16)

10D (1) ← 6-2 5-3 → 8,75D (7/8)

10D (1) ← 6-3 5-4 → 7,5D (3/4)

10D (1) ← 6-4 5-5 → 5D (1/2)

...sous réserve que les 2 partis soient de force égale

… ou pas!

La solution de Fermat

S‘il est notoire que le premier joueur est 2 fois plus fort que le second...

<table>
<tr><td rowspan="4">2-1</td><td rowspan="2">3-1</td><td>4-1</td><td rowspan="2">2/3</td></tr>
<tr><td>3-2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2-2</td><td>3-2</td><td>1/3*2/3</td></tr>
<tr><td>2-3</td><td></td></tr>
</table>

Alors il doit gagner (2/3+2/9), soit 8/9 de la mise initiale…

A propos des 4 méthodes...

Expérience en classe de TS, 1996, N. Vogel.

Travail autour du problème des partis

Cadre: 6h combinatoire + 2h proba élémentaires en classe

Seuls 13 sur 34 élèves ont eu un enseignement de proba avant.

Devoir maison (1/5):

Jeu équitable en 8 points. Mise totale 84€. Quelle répartition des gains selon les scores:

a) 7-5 b) 1-0 c) 7-0

- 8 font le partage de Pascal & Fermat, avec l'approche de Pascal.
- 18 font le partage de Pacioli proportionnel aux points
- 1 fait le partage de Tartaglia en tenant compte des écarts
- Aucun ne fait le partage de Cardan ou Forestani
- 3 envisagent une répartition 42-42 dans les 3 cas dont un qui pense que la chance pourrait tourner...
- 4 n'ont pas répondu

- Chez ceux qui ont fait des probabilités avant, 46% proposent la repartition proportionnelle aux probabilités
- Chez les autres, seulement 10%.

Les idées de Pascal et Fermat

Méthode pour faire les partis entre deux joueurs par le moyen du triangle arithmétique, Fermat (1665)

- Analyse combinatoire

- La mesure de la difficulté d'un gain/perte (probabilité que l'évènement arrive) donnée par $\dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombres de cas possibles}}$

- Les gains/pertes possibles sont comptés proportionnellement au nombre de chances qu'ils ont d'apparaitre.

L'espérance mathématique

Christiaan Huygens (1629-1695)

De Ratiociniis in alea ludo, 1657

Concept d'espérance mathématique (expectatio)

«Avoir p chances d'obtenir A et q chances d'obtenir B me vaut $\frac{pA+qB}{p+q}$ *.»*

Exemple: 3 chances sur 4 de gagner 4 euros, une chance sur 4 de tout perdre. L'espérance est de ¾ x 4 + ¼ x 0 = 3 euros...

… cela permet de garantir des **paris équitables** pour les 2 camps...

Croix ou pile?

Jeu équitable:

Gain et pertes possibles doivent s'équilibrer

Si je mise 1 euro, la „moyenne“ de mes gains doit être égale à 1 euro.

Pour quel gain noté G parier raisonnablement qu'une croix sortira en deux coups?

Croix X

Pile-Croix P X

Pile-Pile P P

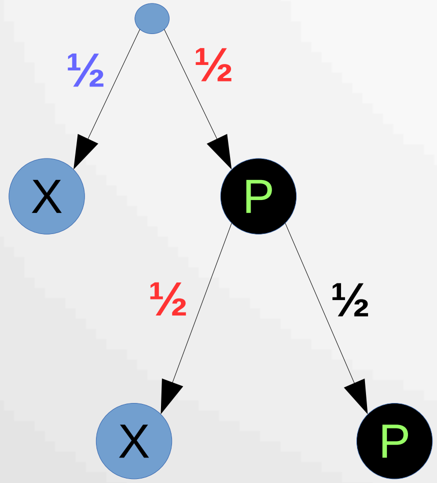
Croix ou pile?

- Avec la méthode de Fermat...

X	X-X	½
	X-P	
P	P-X	¼
	P-P	

½ + ¼ = ¾ → 3 chances sur 4.

- … ou avec un graphe.



½ + ½ x ½ = ¾ → 3 chances sur 4.

Croix ou pile?

- 3 chances sur 4 de gagner G euros
- 1 chance sur 4 de perdre.

Espérance de gains: $\frac{3xG+1x0}{4} = \frac{3}{4} G$

Pour que le jeu soit équitable, il faut que $\frac{3}{4} G = 1$.

et donc que G = 4/3 = 1,3333....

Le jeu est équitable si: Pour 1 euro joué, on en gagne 1,33...

- Si on vous propose moins... ce n'est pas la peine de jouer!
- Si on vous propose plus... allez-y!

D'Alembert et le Croix ou pile? (1754)

Combien parier qu'une croix sortira en 2 coups?

Croix - Pile-Croix - Pile-Pile

Pourquoi envisager Croix - Croix et Croix – Pile?

D'Alembert:

2 cas favorables – 1 cas défavorable

→ 2 chances sur 3 de gagner.

D'Alembert et le Croix ou pile? (1754)

Combien parier qu'une croix sortira en 2 coups?

Croix - Pile-Croix - Pile-Pile

Pourquoi envisager Croix - Croix et Croix – Pile?

D'Alembert:

2 cas favorables – 1 cas défavorable

→ 2 chances sur 3 de gagner.

«L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le calcul des probabilités.», Joseph Bertrand, 1889.

- Pourquoi se trompe-t-il?
- Il pointe certaines lacunes des définitions
- Le contexte:

  Les probabilités sortent du cadre des jeux...
  - Evaluation de l'espérance de vie et (re)-calcul des rentes à vie
  - Evaluation des risques commerciaux
  - Evaluation des risques en médecine
  - Evaluation des témoignages et jurisprudence!

    Degrés de certitude, espérance morale...

Des doutes sur l'espérance mathématique

«On peut peser du cuivre et le donner pour or, la balance reste sans reproche.»

Joseph Bertrand (1822-1900)

- Les frères Huygens et l'espérance de vie
- N. Bernoulli et le paradoxe de Saint-Petersbourg
- N. Bernoulli et les risques médicaux

Espérance de vie, vie moyenne et vie probable...

L'espérance mathématique dans la vraie vie...

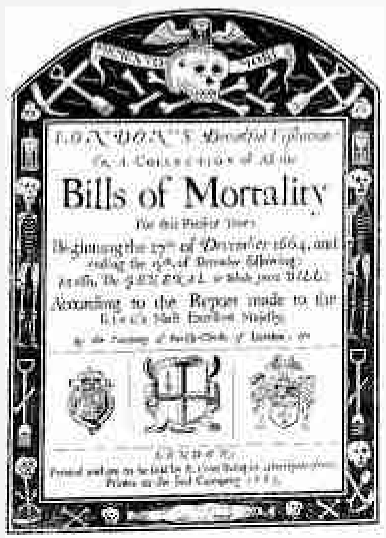
Le joueur et le banquier...

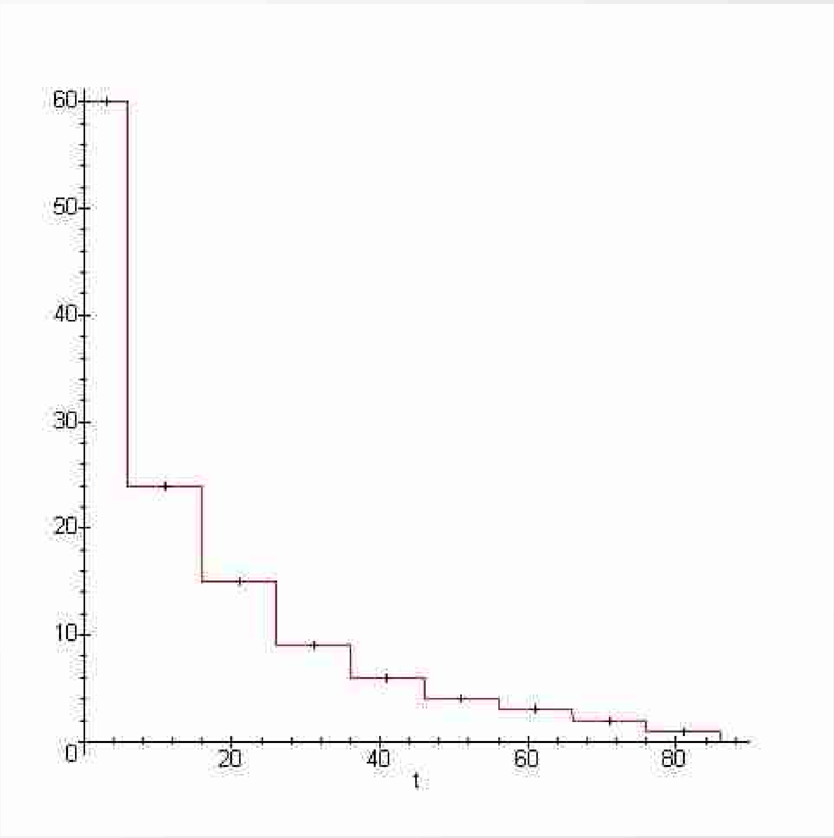
...une discussion familiale chez les Huygens en 1669.

La table de Graunt

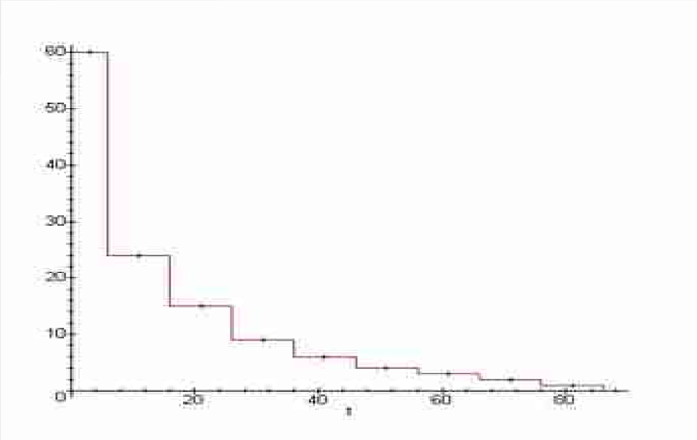
Table de survie de 100 individus „conçus et animés“ (1661)

Longévité	...6	...16	...26	...36	...46	...56	...66	...76	...86
effectif	64	40	25	16	10	6	3	1	0





Attention! Ce ne sont pas des données réelles!



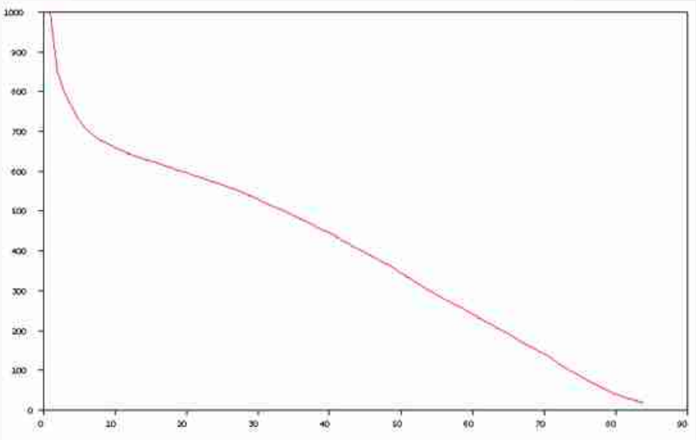
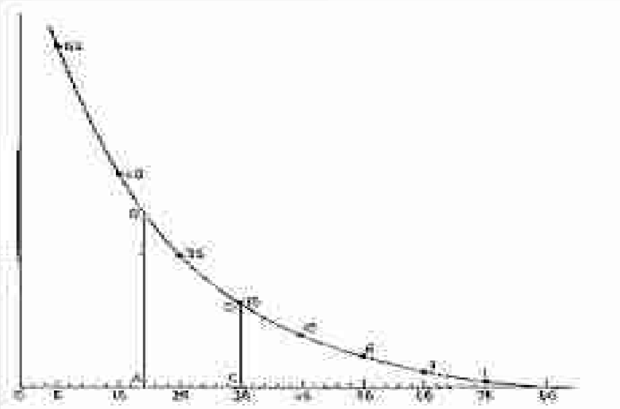


Table de Graunt (1661)

Table de Halley – Survie à Breslau (1693)

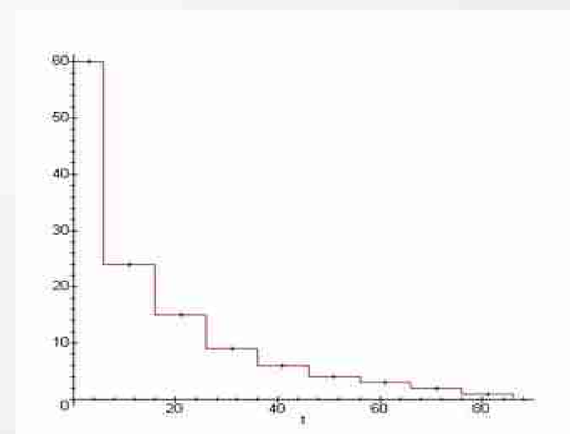


Combien de temps nous reste-t-il à vivre?

Le point de vue de Lodewijk

Le reste de vie à la naissance:

Age	→ 6	→16	→26	→36	→46	→56	→66	→76	→86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Age moy décès	3	11	21	31	41	51	61	71	81

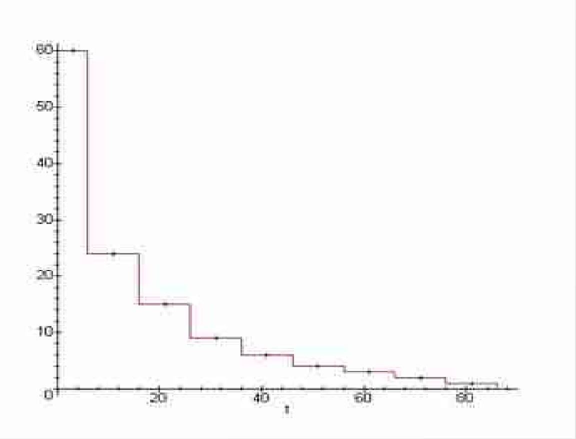


Le point de vue de Lodewijk

Le reste de vie à la naissance:

Age	→ 6	→16	→26	→36	→46	→56	→66	→76	→86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Age moy décès	3	11	21	31	41	51	61	71	81
Années vécues	108	264	315	279	246	204	183	142	81

TOTAL: 1822 années vécues.



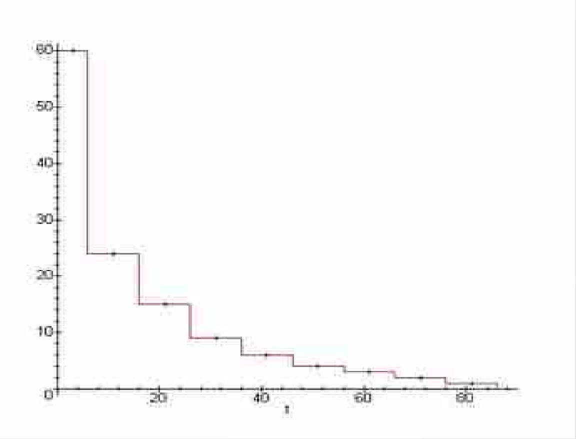
Le point de vue de Lodewijk

Le reste de vie à la naissance:

Age	→ 6	→16	→26	→36	→46	→56	→66	→76	→86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Age moy décès	3	11	21	31	41	51	61	71	81
Années vécues	108	264	315	279	246	204	183	142	81

TOTAL: 1822 années vécues.

*«Ces 1822 ans partagez esgalement entre 100 personnes il vient pour chacun **18 ans et environ 2 mois**, qui est l'aage de chaque personne créée ou conceüe, l'une portant l'autre.»*



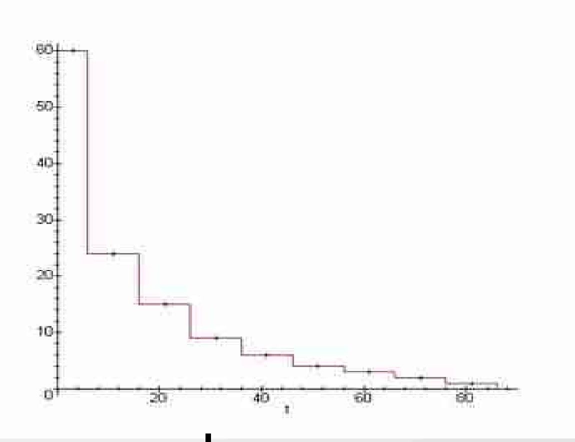
Vie moyenne <u>à la naissance</u> est 18 ans et 2 mois... mais si on a déjà 6 ou 16 ans?

Le point de vue de Lodewijk

Le reste de vie à 6 ans:

Age	→ 6	→16	→26	→36	→46	→56	→66	→76	→86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Age moy décès	3	11	21	31	41	51	61	71	81
Années vécues	108	264	315	279	246	204	183	142	81

«J'oste premièrement les 108 ans (qui est l'aage des 36 enfants qui meurent en dessoubs de 6 ans) de tout ce nombre de 1822 ans; reste 1714 ans lesquels doivent estre partagez entre les 64 personnes qui restent...»



1714/64 = 26,78 soit environ 26 ans et 10 mois, auxquels on retranche les 6 années déjà vécues!

Les restes de vies...

Age	0	6	16	26	36	46	56	66	76
Reste de vie	18 ans 2 mois	20 ans 10 mois	20 ans 3 mois	19 ans 4 mois	17 ans 6 mois	15 ans	12 ans 8 mois	8 ans 4 mois	5 ans

«... la partie est environ égale lors qu'on gage qu'une personne de 6 ou une de 16 vivront encore 20 ans.»

Partie égale: autant de chance de gagner que de perdre...

- Une personne de 6 ou 16 ans a à peu près une chance sur 2 de vivre 20 ans
- Une personne de 6 a à peu près autant de chance qu'une personne de 16 de vivre 20 ans de plus

Le point de vue de Christiaan

Une personne de 6 ou 16 ans a a peu près une chance sur 2 de vivre 20 ans?

pour 100 personnes nées...60 meurent avant 16 ans!

Age	→ 6	→16	→26	→36	→46	→56	→66	→76	→86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Nb survivants	64	40	25	16	10	6	3	1	0

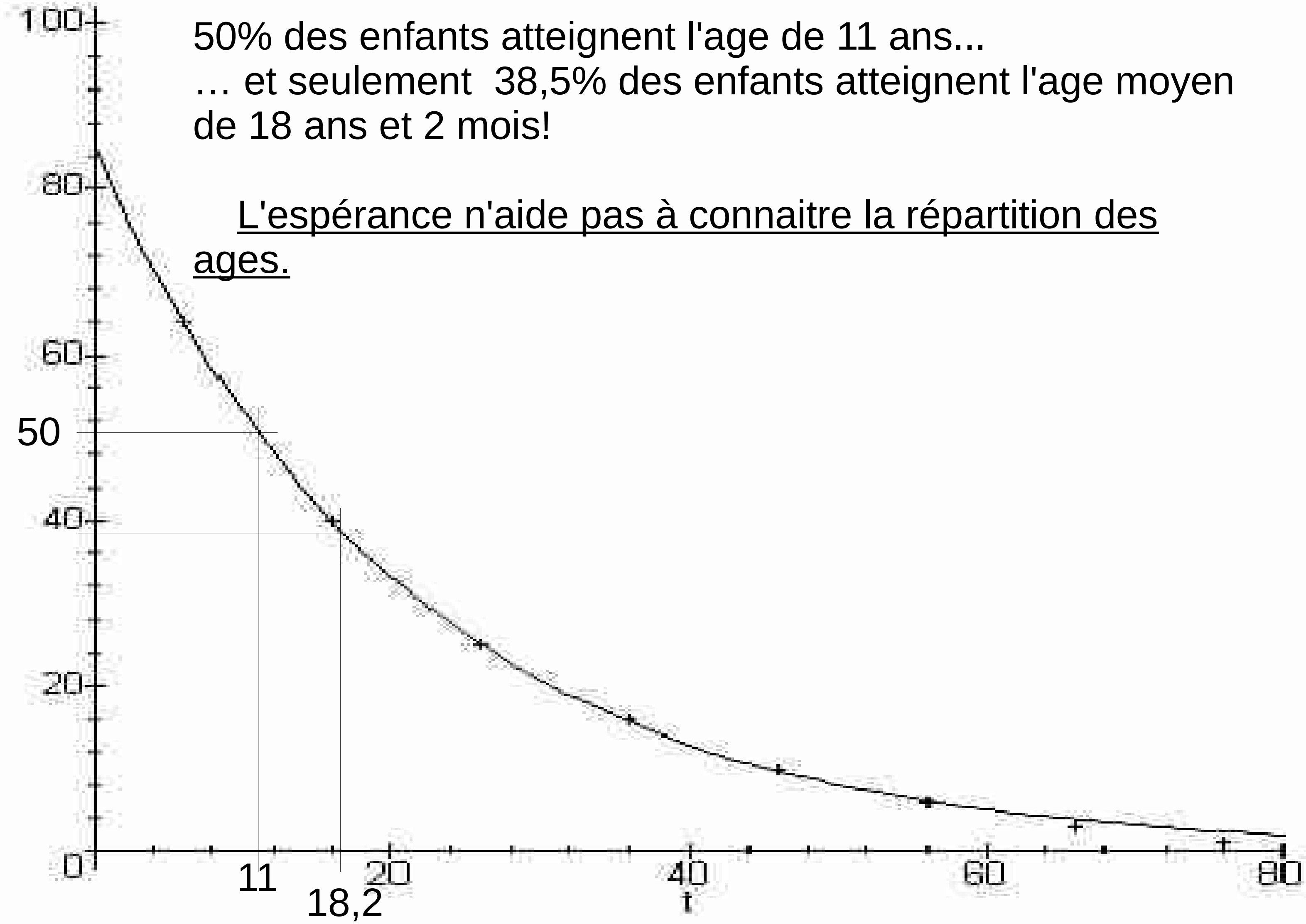
Christiaan force le trait… il imagine:

Si 90 personnes meurent avant 6 ans et 10 vivent jusqu'à 152 ans et 2 mois, la moyenne sera toujours de 18 ans et 2 mois! *«... cependant, qui gageroit, qu'un enfant conceu parviendroit alors a l'age de 6 ans seulement auroit grand désavantage, puis que de dix il n'y a qu'un qui y parvient.»*

Survie moyenne et Survie médiane

50% des enfants atteignent l'age de 11 ans...
… et seulement 38,5% des enfants atteignent l'age moyen de 18 ans et 2 mois!

<u>L'espérance n'aide pas à connaitre la répartition des ages.</u>



Le point de vue de Christiaan

Une personne de 6 a à peut près autant de chance qu'une personne de 16 ans de vivre 20 ans de plus?

Age	→ 6	→ 16	→ 26	→ 36	→ 46	→ 56	→ 66	→ 76	→ 86
Nb décès	36	24	15	9	6	4	3	2	1
Nb survivants	64	40	25	16	10	6	3	1	0

- Pour les 64 enfants de 6 ans:

  Entre 6 et 26 ans: 24+15 = 39 décès – 25 survivants → 60,9% décès
- Pour les 40 enfants de 16 ans:

  Entre 16 et 36 ans: 15+9 = 24 décès – 16 survivants → 60% décès
- *«...il est donc un peut plus apparent pour un de 16 ans que pour un de 6 de vivre encore 20 ans.»*

- Manipulation de la notion d'espérance mathématique...
- … et limites de ses interprétations.

L'espérance ne renseigne pas vraiment sur la répartition des valeurs

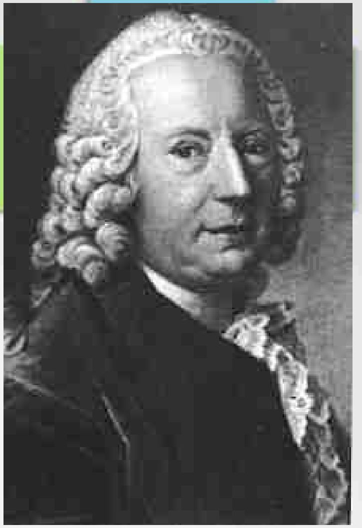
- Survie moyenne Vs survie médiane

«Ce sont donc deux choses différentes que l'espérance ou la valeur de l'age futur d'une personne, et l'aage auquel il y a égale apparence qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour régler les rentes à vie, et l'autre pour les gageures.»

- Prémices des probabilités conditionnelles & stat descriptives

Les chances peuvent changer si on tient compte de conditions...

Daniel Bernoulli et l'esperance morale...



Si l'espérance mathématique ne colle pas à la notion d'homme raisonnable, ce n'est peut-être pas la bonne notion...

Specimen theoriae novae mensura sortis, 1738

Paradoxe de Saint-Petersbourg (1713)

Pierre jete une pièce en l'air jusqu'à l'apparition du premier FACE...

… et propose à Paul de jouer:

F: 1 Ducats.

PF: 2 Ducats.

PPF: 4 Ducats.

PPPF: 8 Ducats.

PPPPF: 16 Ducats.

PPPPPF: 32 Ducats.

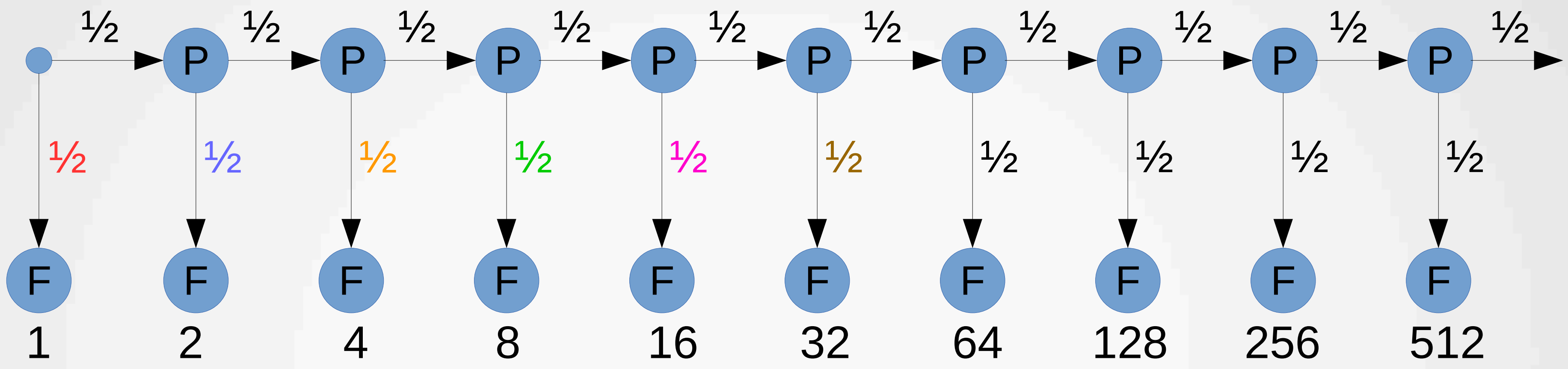
PPPPPPF: 64 Ducats.

PPPPPPPF: 128 Ducats.

P^nF: 2^n Ducats, etc.…

Il demande à Paul d'engager 20 ducats...

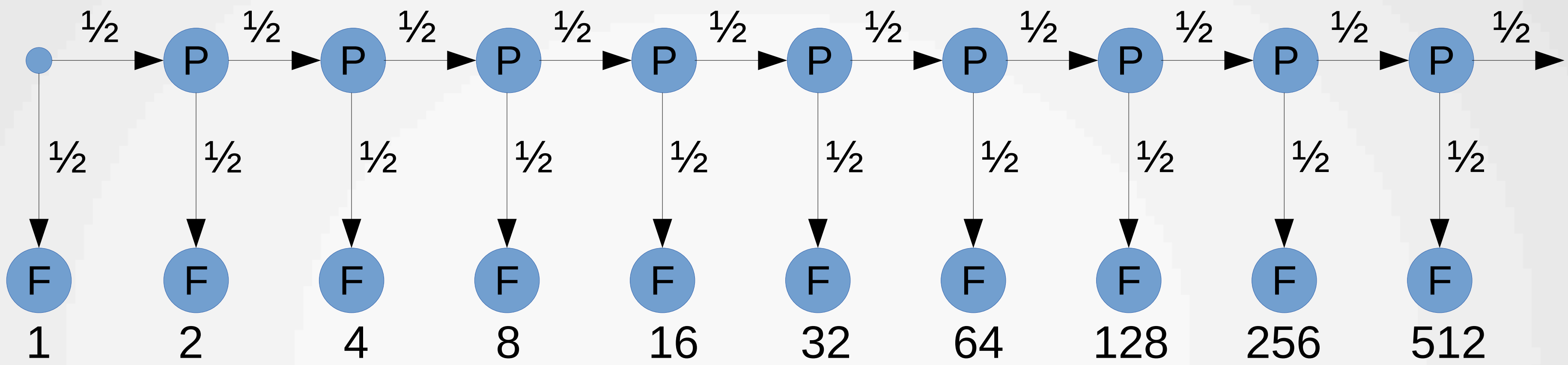
Paradoxe de Saint-Petersbourg



$$E = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 2 + (\tfrac{1}{2})^3 \cdot 4 + (\tfrac{1}{2})^4 \cdot 8 + (\tfrac{1}{2})^5 \cdot 16 + (\tfrac{1}{2})^6 \cdot 32 + (\tfrac{1}{2})^7 \cdot 64$$

$$+ (\tfrac{1}{2})^8 \cdot 128 + (\tfrac{1}{2})^9 \cdot 256 + (\tfrac{1}{2})^{10} \cdot 512 + \ldots$$

Paradoxe de Saint-Petersbourg



$$E = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 2 + (\tfrac{1}{2})^3 \cdot 4 + (\tfrac{1}{2})^4 \cdot 8 + (\tfrac{1}{2})^5 \cdot 16 + (\tfrac{1}{2})^6 \cdot 32 + (\tfrac{1}{2})^7 \cdot 64$$

$$+ (\tfrac{1}{2})^8 \cdot 128 + (\tfrac{1}{2})^9 \cdot 256 + (\tfrac{1}{2})^{10} \cdot 512 + \ldots + (\tfrac{1}{2})^{n+1} \cdot 2^n + \ldots$$

$$E = \tfrac{1}{2} \times (1 + 1 + 1 + 1 + \ldots.) = +\infty$$

«Bien que le sort éspéré de Paul soit infini, personne sain d'esprit ne vendrait volontiers son espoir pour 20 ducats .»

Paradoxe de Saint-Petersbourg

- Si on plafonne le gain à partir du 25ieme coup,

  (16 777 216D ≈ 268 500 000€ quand même!)

  l'espérance mathématique est seulement de 13 ducats...

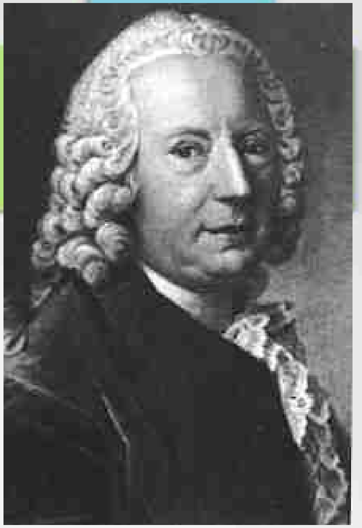
- Aversion au risque

  mise initiale élevée! 20 ducats ≈ 320€

- Espérance morale: $\dfrac{\text{Acroissement fortune}}{\text{fortune}}$
- Espérance mathématique Vs Espérance morale

  → prémices de la théorie de la décision.

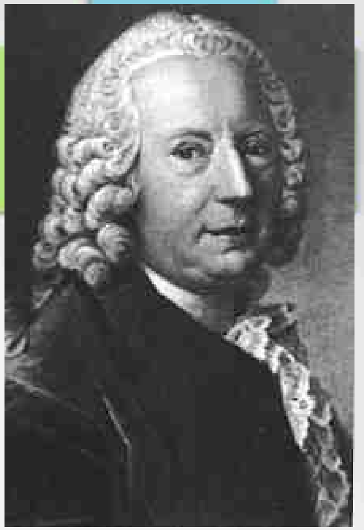
Daniel Bernoulli et la variole (1766)



Le problème de l'inoculation (1766):

- Mathématicien, physicien et médecin...
- Un première application des probabilités en médecine!

Daniel Bernoulli et la variole (1766)

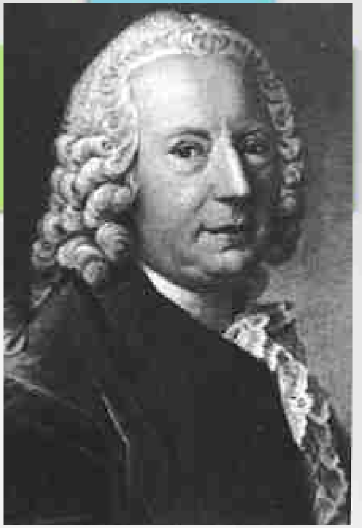


La variole (ou petite vérole)

- Affection virale éruptive contagieuse et immunisante (virus identifié en 1886)
- La variole suit l'homme depuis l'antiquité en Asie, en Europe depuis le 6e siècle.
- Au début du 18e siècle, elle est reponsable d'une mort sur 13 en moyenne en Europe.

- Pas de traitement spécifique pour les personnes inféctées
- De graves complications possibles: cicatrices, arthrite, infection des os, pneumonie, hémorragie grave, cécité, septicémie, inflammation cérébrale...
- Eradiquée depuis 1977

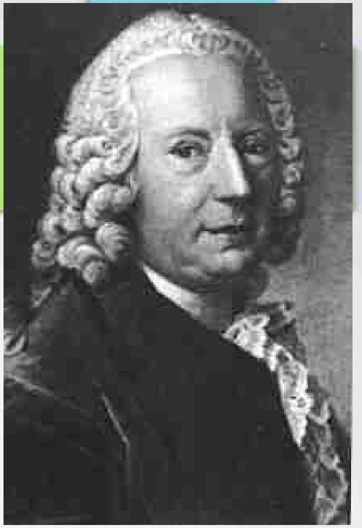
Daniel Bernoulli et la variole (1766)



L'inoculation, ancètre de la vaccination

- Pratiquée chez les chinois dès le 11e siècle
- Ramenée en Europe via la Turquie par Lady Montagüe au 18e siècle
- Sera supplantée par la vaccination au 19e siècle.

Daniel Bernoulli et la variole (1766)



La controverse...

L'inoculation est risquée: la mortalité varie de 1 à 2%

Polémique:

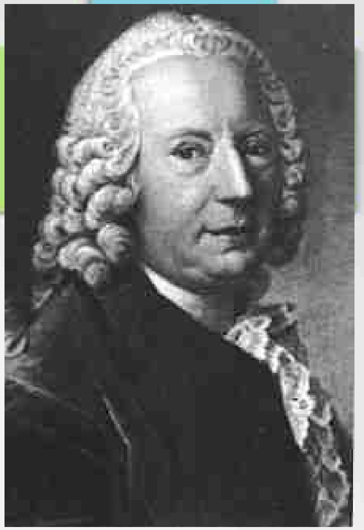
- Risque diffus dans le temps Vs Risque immédiat?
- Bénéfice de la société Vs bénéfice personnel?

… mais elle a aussi des partisans!

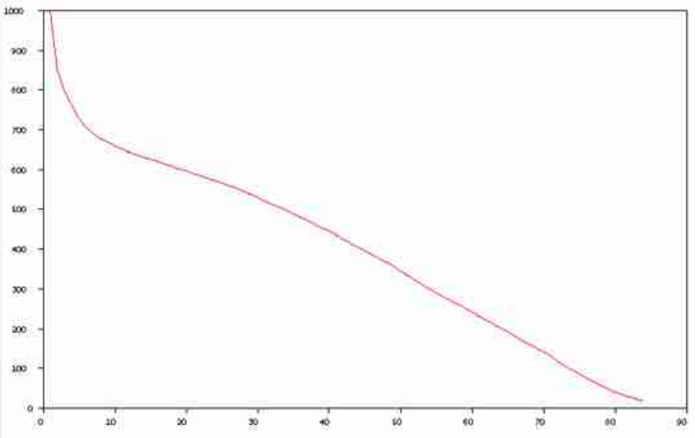
Voltaire *Sur l’insertion de la petite vérole*, XI° Lettre philosophique;

La Condamine, etc…

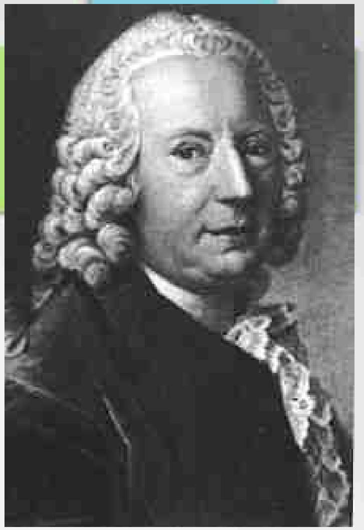
De maigres données...



- Proportion de personnes sensibles touchées par la maladie chaque année (1/8).
- Proportion de variolés qui meurent de la variole (1/7)
- Proportion de personnes qui meurent de l'inoculation (2/100)
- Table de Halley (1693)



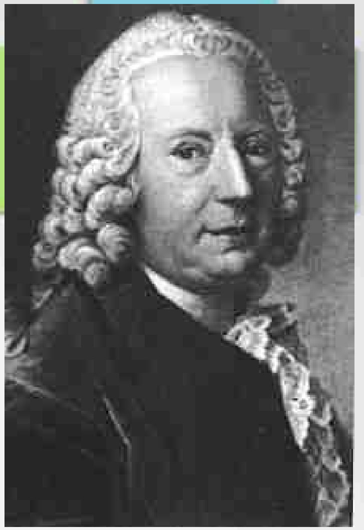
Les hypothèses



- *On ne contracte jamais 2 fois la variole*
- *Uniformité selon l'age du risque de contracter la variole*
- *Uniformité selon l'age des risques de mortalité une fois contractée la variole*

hypothèse adoptée faute de *«listes mortuaires pour la petite vérole, rangées suivant l'odre de l'âge de ceux qui en sont morts.»*

Les calculs



- Passage d'un modèle discrèt à un modèle continu

  → le taux de mortalité instantané devient la dérivée P' de la population totale P…

- Calcul de l'évolution S de la population sensible.

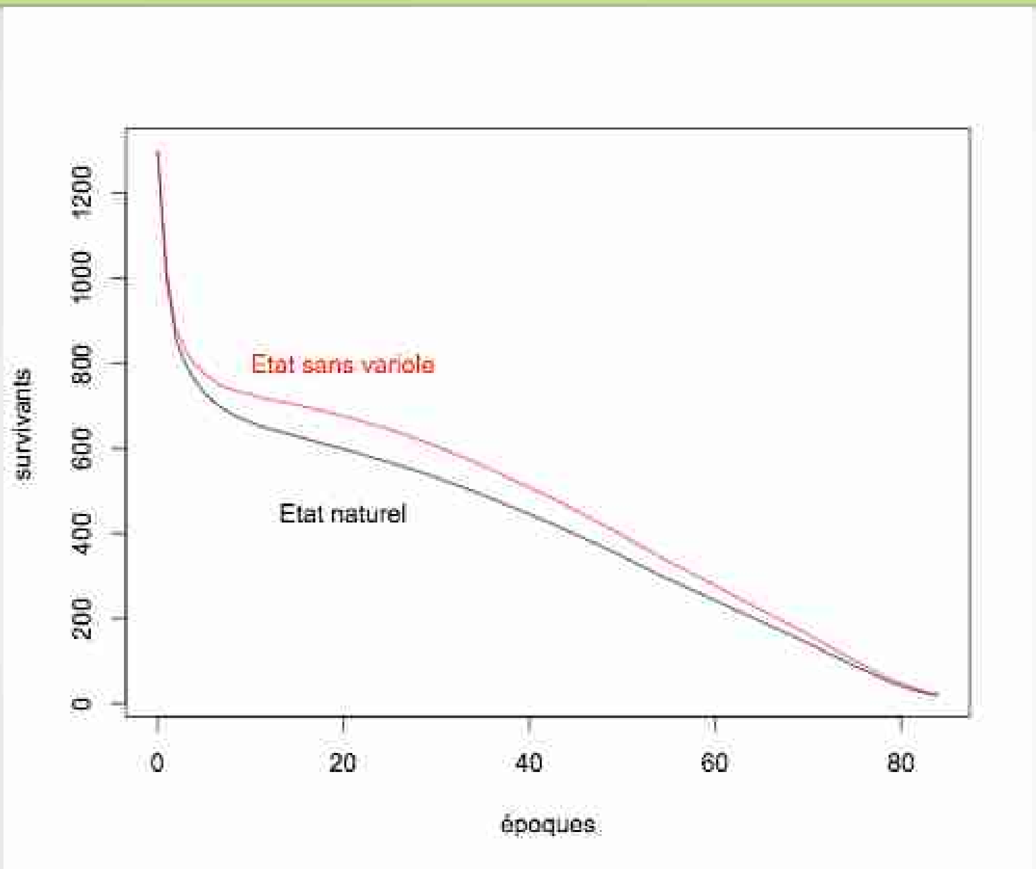
  → La fonction q = S/P suit une équation différentielle sympathique.

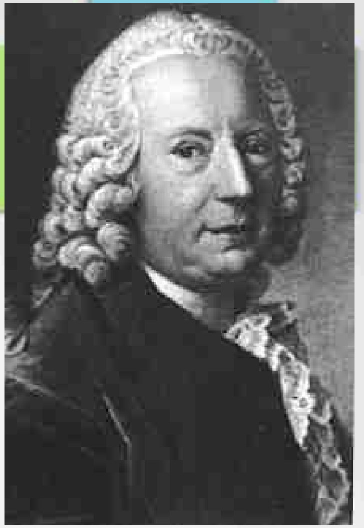
- Calcul du taux de mortalité instantané pour les causes autres que la variole

- Calcul de l'évolution Z d'une population sans variole

  → La fonction r = Z/P suit une équation différentielle sympathique.

Le bilan



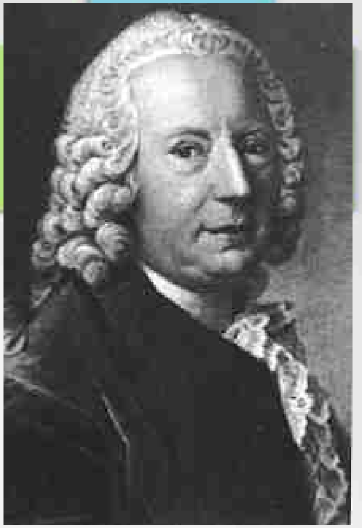


Population Naturelle: 26 ans, 7mois

Population sans Variole: 29 ans, 9 mois

Population sans Variole, avec Inoculation: 29 ans 7 mois

Portée des travaux



- Première incursion des probabilités dans la gestion des risques médicaux...
- D'Alembert toujours à la critique...

Les avantages de l'inoculation *«ne sont pas de nature à être apréciés mathématiquement.»*

Il attaque de toutes les hypothèses.

- Risque diffus dans le temps Vs Risque immédiat ?
- Bénéfice de la société Vs Bénéfice personnel ?

…. Pas de suite pendant presqu'un siècle!

Une autre question soulevées par D'alembert...

Dans le jeu „Croix ou Pile?“...

Les termes „cas favorables“ et „cas possibles“ sous-entendent que les cas considérés arrivent avec égale chance...

….et comment savoir si c'est a priori/a posteriori le cas?

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

Vous misez 4€

- Je gagne autant d'euros qu'il sera sorti de „Pile“
- vous gagnez autant d'euros qu'il sera sorti de „Face“

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
F	P	P	P	P	P	P	F

Vous misez 4€

- Je gagne autant d'euros qu'il sera sorti de „Pile“
- vous gagnez autant d'euros qu'il sera sorti de „Face“

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
P	P	P	F	F	P	P	P

Vous misez 4€

- Je gagne autant d'euros qu'il sera sorti de „Pile“
- vous gagnez autant d'euros qu'il sera sorti de „Face“

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
P	P	P	P	P	F	P	P

Vous misez 4€

- Je gagne autant d'euros qu'il sera sorti de „Pile“
- vous gagnez autant d'euros qu'il sera sorti de „Face“

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
P	P	P	P	P	F	P	P

Idée de Bayes:

Connaissant les résultats obtenus, déterminer la probabilité que la pièce soit vraiment truquée.

Idée de J. Bernoulli:

La certitude morale que la pièce est truquée peut être approchée autant que l'on désire en multipliant les observations...

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
P	P	P	P	P	F	P	P

Idée de Bayes:

Connaissant les résultats obtenus, déterminer la probabilité que la pièce soit vraiment truquée.

La probabilité inverse de Bayes (1763)

A partir des évènements passés, prévoir le futur...

Si on a réussi *n* fois et échoué *m* fois

En posant *p* = pobabilité d'avoir Pile:

Déterminer $\mathbf{P}(p \in [p_1 , p_2] \mid (n,m))$

- Les probabilités conditionnelles:

$$\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A\cap B)$$

- La fameuse formule d'inversion des probabilités conditionnelles:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\,\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

- Il se ramène, via un problème géométrique, à décrire des quantités aléatoires continues....

  Les calculs de probabilités deviennent des calculs d'aires!

  pour obtenir la formule:

$$\mathbf{P}(\, p \in [p_1 , p_2] \;|\; (n,m)\,) = \frac{\int_{[p1,\ p2]} p^n (1-p)^m \, dp}{\int_{[0,\ 1]} p^n (1-p)^m \, dp}$$

… C'est le début de l'inférence bayésienne!

Un petit lancer de pièces

Je lance une pièce 8 fois...

1	2	3	4	5	6	7	8
P	P	P	P	P	F	P	P

Idée de Bernoulli:

La certitude morale peut être approchée autant que l'on désire en multipliant les observations...

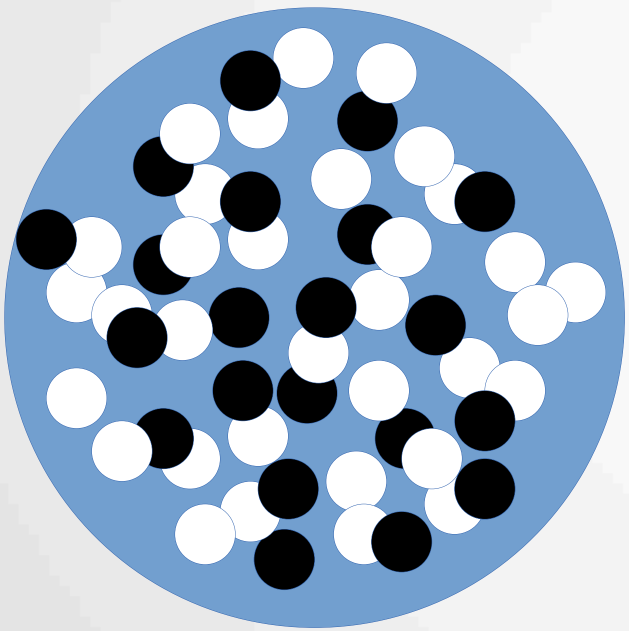
Jacob Bernoulli (1654-1705)

Ars conjectandi, édité en 1713

*« **Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori**, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire **en observant l'issue de nombreux exemples semblables**...»*

Jacob Bernoulli. L'approche fréquentiste

50 boules dans une urne: 30 blanches, 20 noires



3 chances sur 5 de tirer une boule blanche

2 chances sur 5 de tirer une boule noire

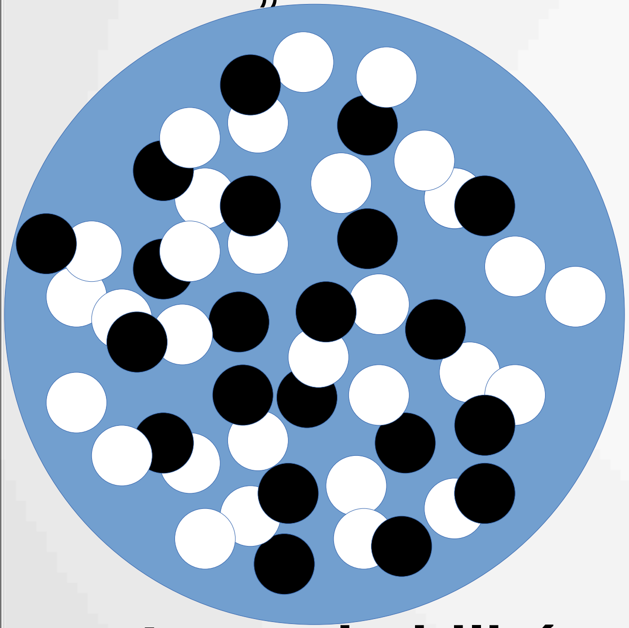
«Il est cherché si vous pouvez faire cela un nombre si élévé de fois qu'il revient 10 fois, 100 fois, 1000 fois, etc plus probable, c'est à dire plus moralement certain que le nombre de billes blanches et noires tirées sont dans le rapport 3-2 comme elles le sont dans l'urne plutôt que dans un rapport différent.»

...

Jacob Bernoulli. L'approche fréquentiste

La loi des grands nombres:

La fréquence de succès tend vers le rapport entre le nombre de cas „fertiles“ et le nombre de cas possibles.



Fréquence de succès $F_n = \frac{\text{Nb de boules noires tirées}}{\text{Nb de boules tirées}}$

La probabilité que cette fréquence soit loin de 2/5 lorsque la série s'allonge tend vers 0.

$$P(\,|F_n - 2/5| > \varepsilon\,) \;\rightarrow\; 0 \text{ quand n tend vers l'infini}$$

Et pour ma pièce?

Je fais n lancers de pièce.

Loi des grands nombres:

Le nombre de cotés „Pile“ obtenus a de fortes chances d'être très proche de n/2:

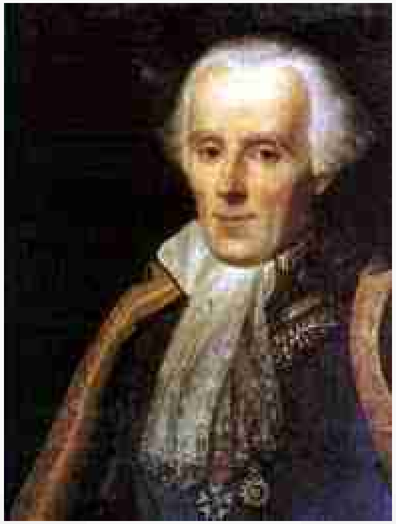
$$\mathbf{P}(|F_n-1/2| > \varepsilon) \text{ est faible}$$

Cela n'exclut pas un cas avec n cotés „Pile“ obtenus même si cela a très peu de chance d'arriver... mais très peu de combien?

Dire qu‘elle est „faible“ ne suffit pas toujours!

Le problème des erreurs

Moivre (1667-1754) → Laplace (1749-1827) → Gauss (1777-1855)



avec en bonus, enfin des réponses à des questions de Galilée!

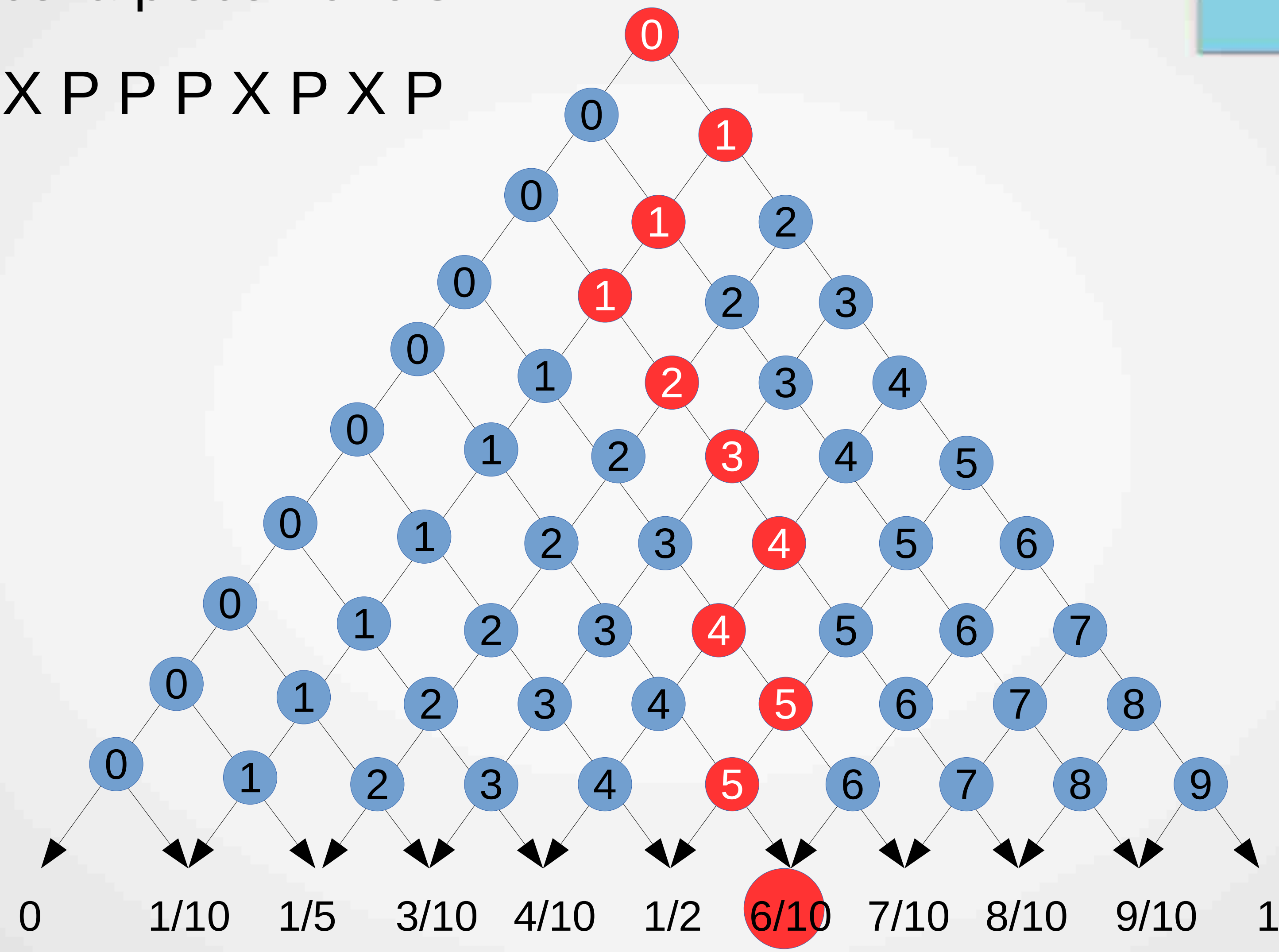
- Quelle est la proportion exacte de séries avec très peu ou beaucoup de pile?
- Peut-on limiter raisonnablement le nombre d'observations
  - en minimisant l'écart $|F_n - 1/2|$
  - En contrôlant le risque de se tromper en affirmant que $|F_n - 1/2| < \varepsilon$?

Connaître la loi de $|F_n - 1/2|$... et pour n grand !

Le problème des erreurs...

On lance la pièce 10 fois...

P X X P P P X P X P



1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

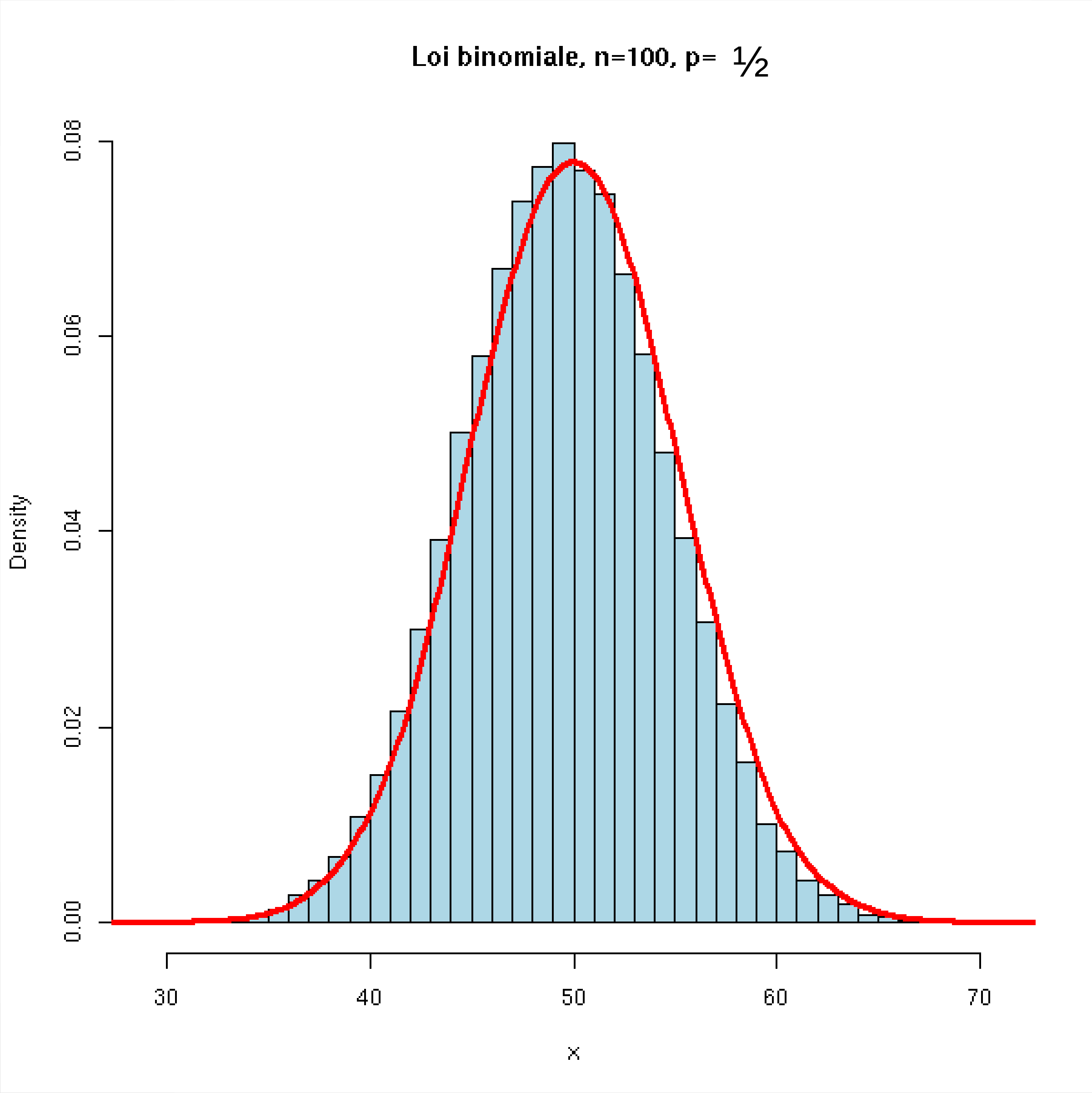
1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

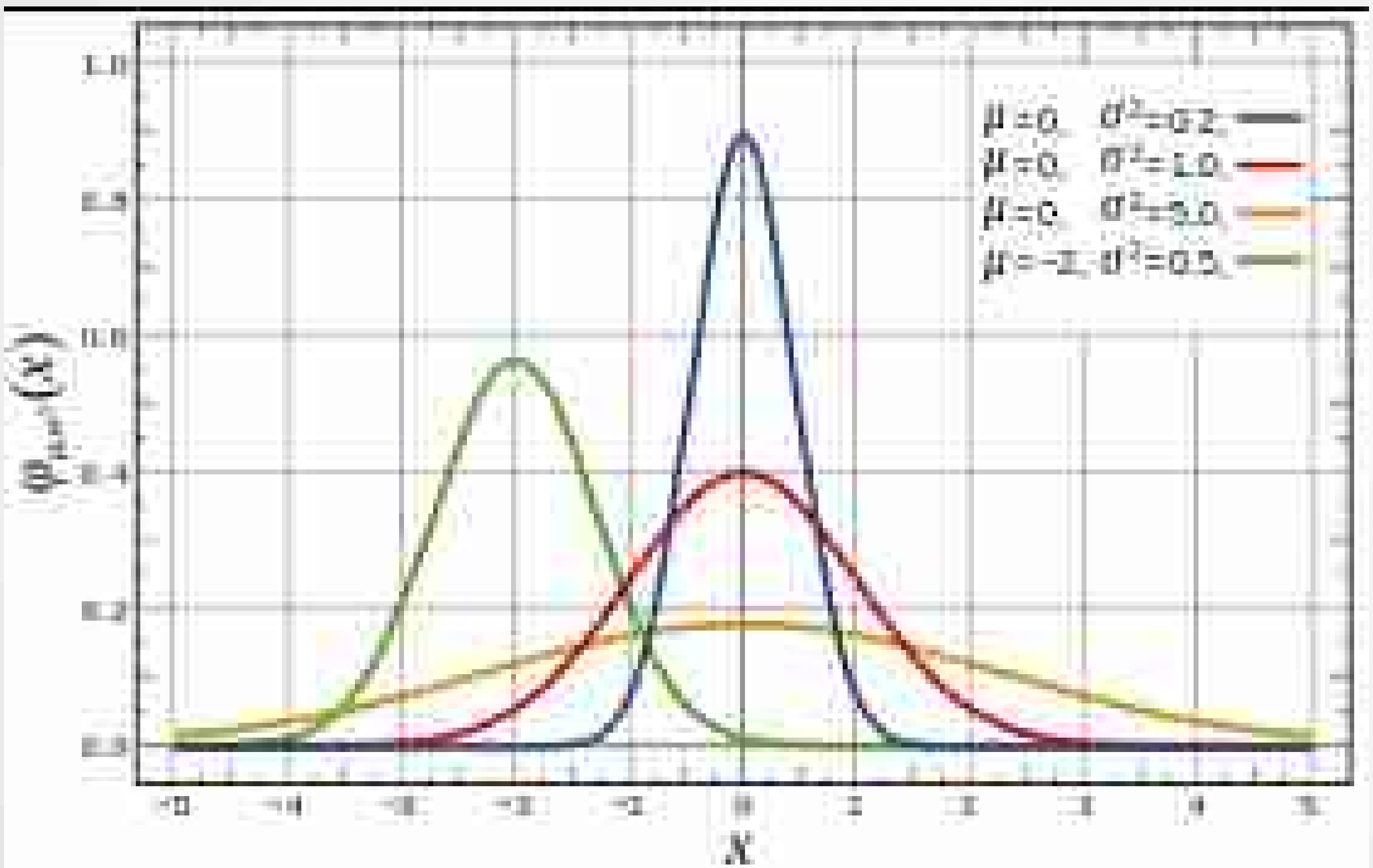
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

La répartition des erreurs...

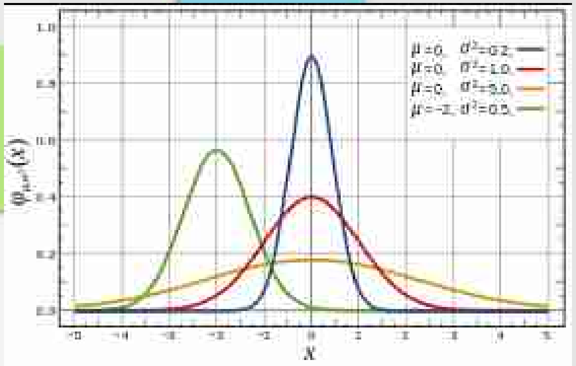


La loi normale



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Le(s) théorème(s) central limite



$$\frac{F_n - m}{s\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$$

Pour n grand, $F_n \sim \mathcal{N}(m, ns^2)$

La répartition des „erreurs“ autour de la moyenne attendue suit une loi normale...

- De très fortes probabilités que la **fréquence observée soit proche de la moyenne attendue**
- Une répartition **symétrique**
- Les **écarts importants** sont de moins en moins probables et surtout <u>**quantifiables**</u>!

Le(s) théorème(s) central limite et La loi normale

- **1713. Prémices chez J. Bernoulli:**

  Loi faible des grands nombres et loi binomiale.

- **1718, Moivre précise les calculs de Bernoulli:**

  Loi forte des grands nombres

  Première apparition en tant que loi limite d'une loi binomiale 1/2: TCL.

- **1786, 1810, 1812, Laplace généralise les travaux précédents:**

  Extension du TCL aux autres lois binomiales

  Développement de la théorie des fonctions caractéristiques

  Notion de loi normale multidimensionnelle

- **1809, 1823, Gauss et la méthode des moindres carrés (Legendre):**

  Apparition de la loi normale lors de l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour estimer une grandeur astronomique à partir d'observations.

  Elle apparait comme solution d'une équation différentielle.

… puis Lyapounov 1901, **Lévy 1910**, Kolmogorov-Gnedenko 1939

Et la suite?

- Développement des Probabilités

  Début 20e siècle, les probabilités rejoignent la théorie de la mesure sur l'impulsion de E. Borel

  Axiomatisation de la théorie des probabilités par A. Kolmogorov (1939)

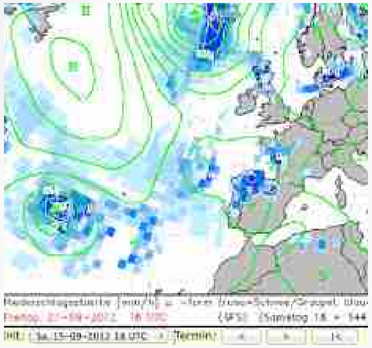
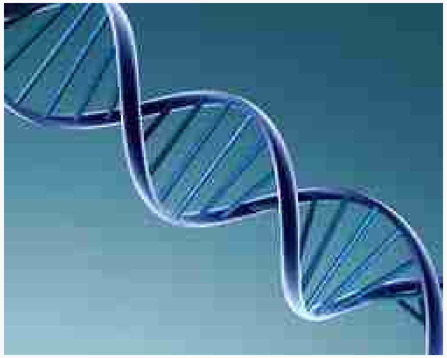
  Théorie des processus

- Développement des statistiques
- Théorie des jeux et théorie de la décision
- Théorie de l'information

Des applications multiples...

- Modélisation de phénomènes aléatoires

  Physique, biologie, finances...


- Aide à la décision – test statistiques

  Finance, médecine, jeux & paris, sondages



Déterminisme Vs Non déterminisme

«...car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence.»

Jacob Bernoulli, 1713

*«Nous devons donc envisager **l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme cause de celui qui va suivre.** Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : **rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux**...»*

Pierre Simon de Laplace, 1840

Déterminisme Vs Non déterminisme

Remise en cause à partir de 1920-1930:

- Physique quantique
- Principe d'incertitude d'Heisenberg

Déterminisme Vs Non déterminisme

Remise en cause à partir de 1920-1930:

- Physique quantique
- Principe d'incertitude d'Heisenberg

«Dieu ne joue pas au dés»

Albert Einstein

Déterminisme Vs Non déterminisme

Remise en cause à partir de 1920-1930:

- Physique quantique
- Principe d'incertitude d'Heisenberg

«Dieu ne joue pas au dés»

Albert Einstein

« Einstein, cessez de dire à Dieu ce qu'il doit faire ! »

Niels Bohr

Déterminisme Vs Non déterminisme

Remise en cause à partir de 1920-1930:

- Physique quantique
- Principe d'incertitude d'Heisenberg

«Dieu ne joue pas au dés»

Albert Einstein

« Einstein, cessez de dire à Dieu ce qu'il doit faire ! »

Niels Bohr

« Non seulement Dieu joue aux dés mais il les jette parfois là où on ne peut les voir. »

Stephen Hawking

Déterminisme Vs Non déterminisme

Quelle est la part du hasard?

Tout est hasard et le déterminisme est un effet de la loi des grands nombres.

ou

Tout est déterministe et l'aléatoire est un effet d'un chaos déterministe.

ou

Un mélange des 2?

En guise de conclusion...

«C’est là la branche la plus singulière et la plus curieuse des mathématiques.

Si nous analysons un jugement quelconque de notre esprit, nous y trouverons toujours, plus ou moins dissimulé, un calcul de probabilité.

On pourrait dire dans une certaine mesure, que l’homme le plus simple qui attend le matin le lever du soleil doit sa foi de voir surgir le jour à une application inconsciente de la loi des grands nombres de Bernoulli.»

Volterra, 1906