

Représenter les nombres...



... sur un support

L'unité



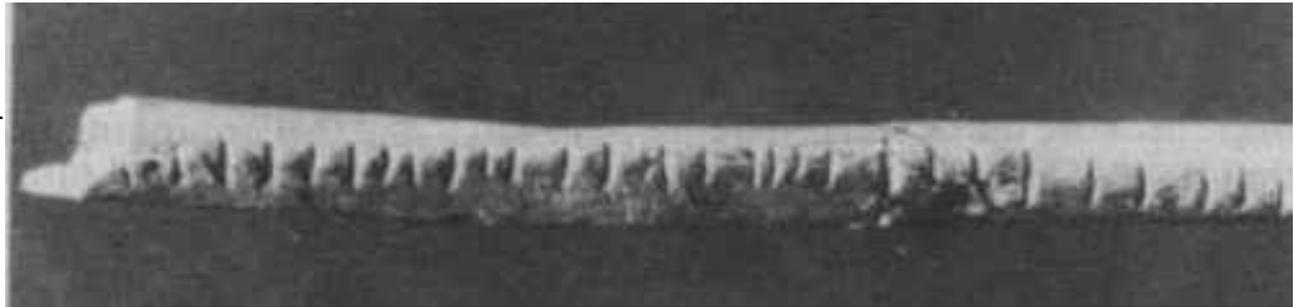
• — ∪ ∩ 2 1 1

«un nombre est la multitude composée d'unités»

Euclide, ÉLEMENTS VII.

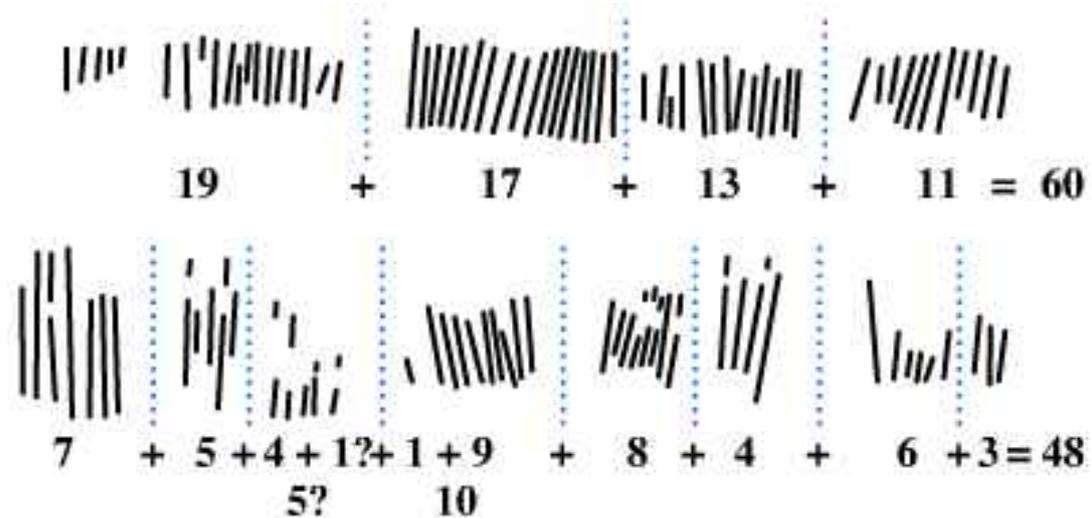
Quand?

L'os de Lebombo, \approx 35 000 an
(Swaziland)

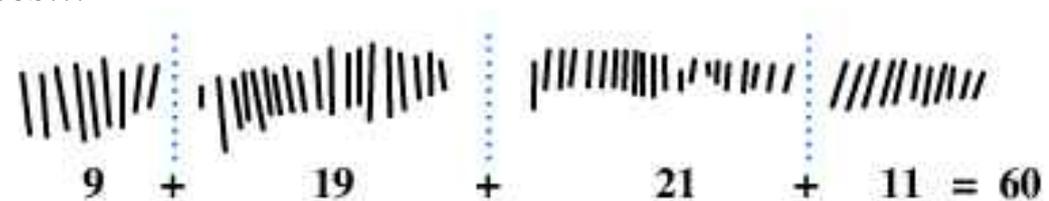


Les os d'Ishango, \approx 20 000 ans

(Lac Édouard, RDC, découverts en 1950)



des tentatives d'interprétations mathématiques diverses...



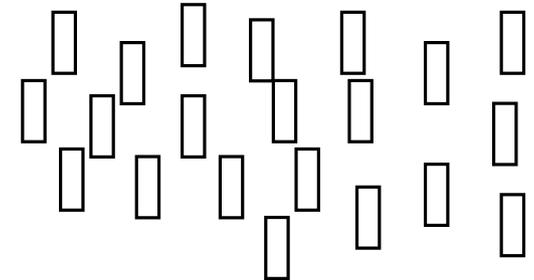
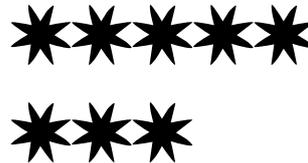
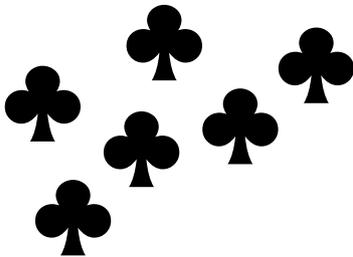
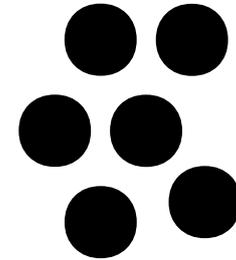
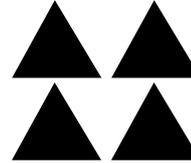
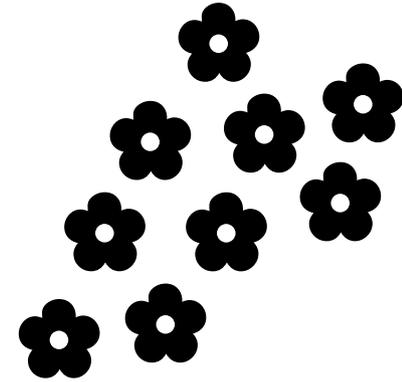
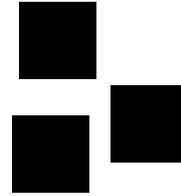
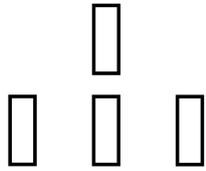
Numération additive



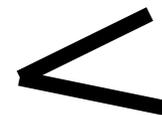
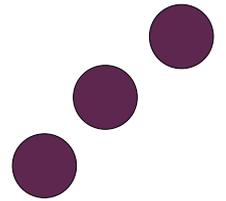
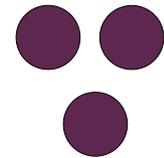
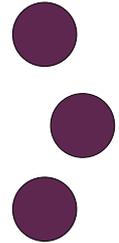
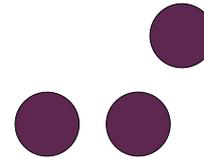
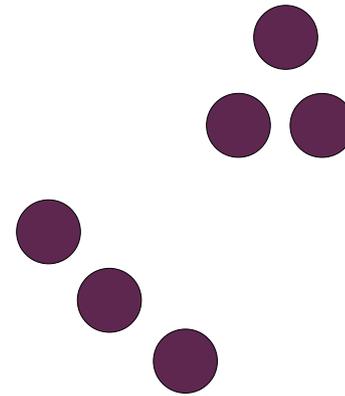
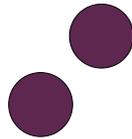
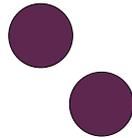
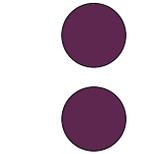
symboles/objets = groupes d'unités

... Oui, mais, regrouper par groupes de combien?

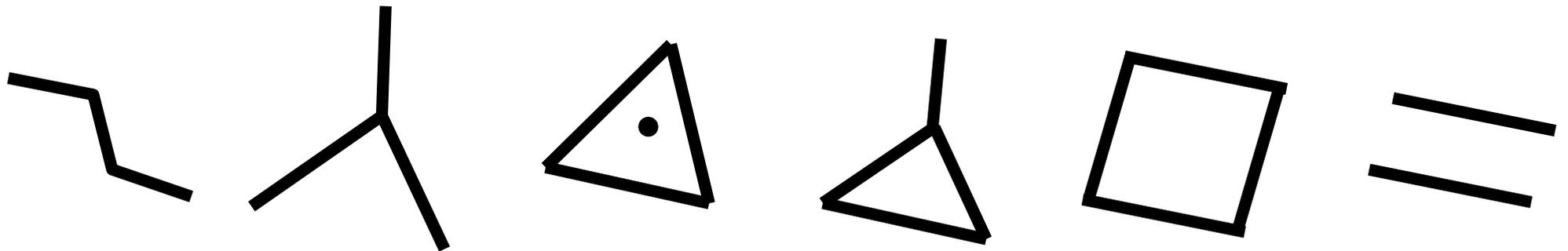
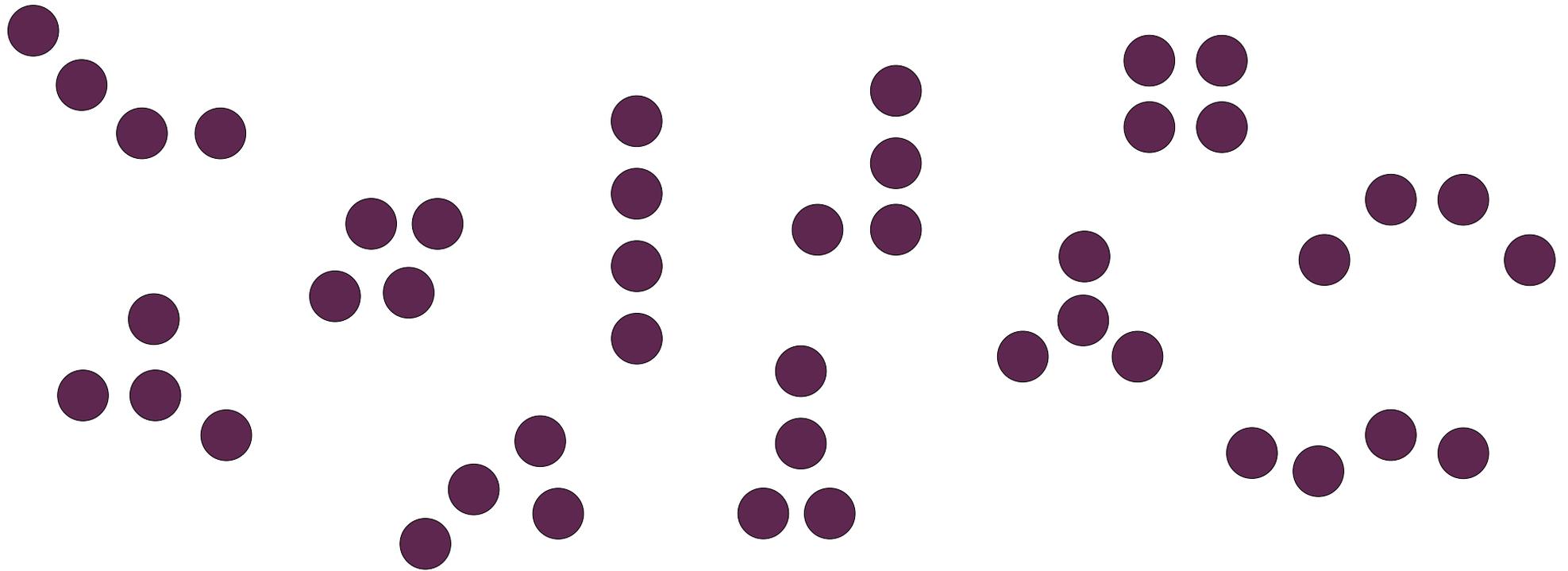
Les nombres dans notre cerveau



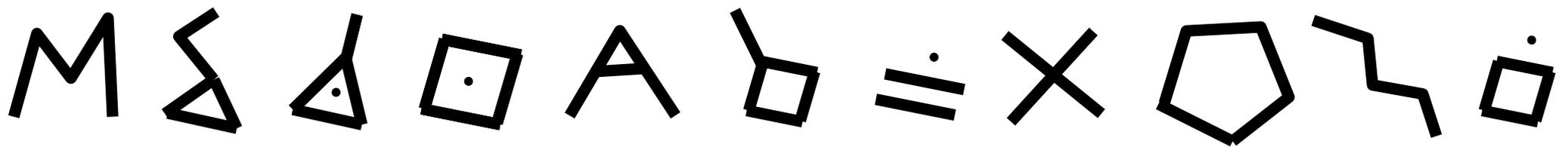
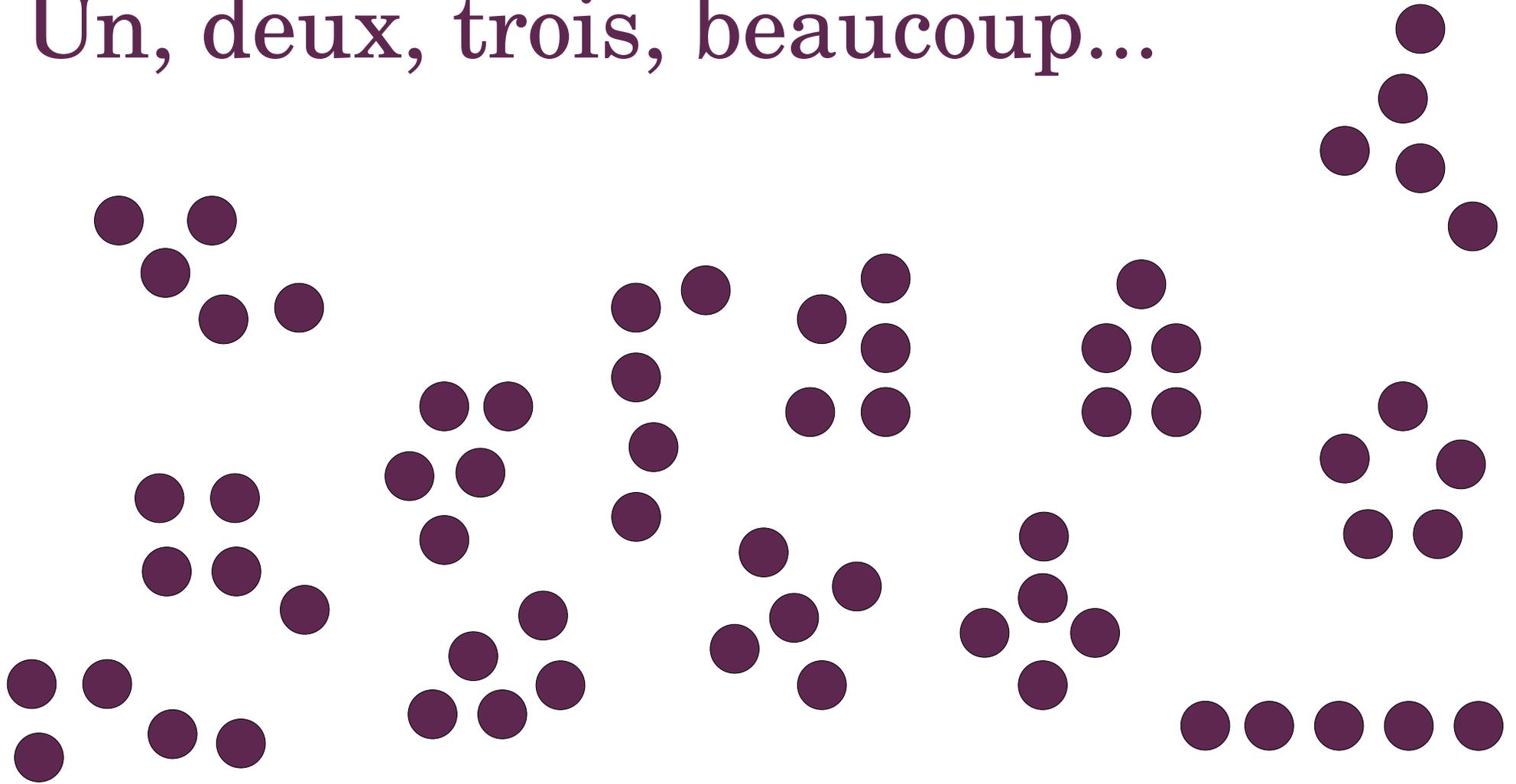
Un, deux, trois, beaucoup...



Un, deux, trois, beaucoup...



Un, deux, trois, beaucoup...



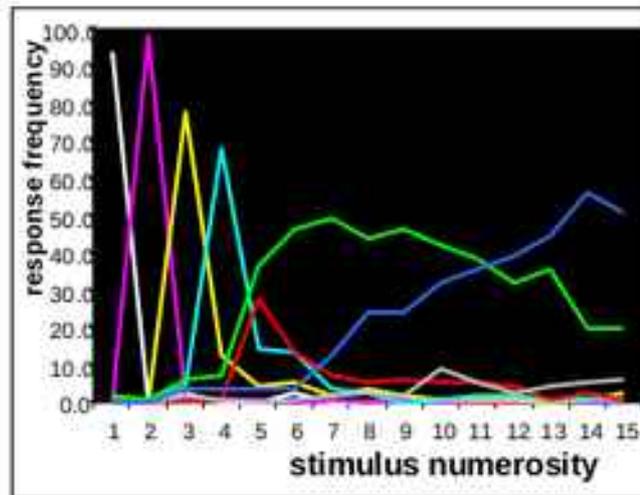
1, 2, 3, 4, 5, 10, un peu, beaucoup...



Cognition numérique en l'absence d'un lexique numérique

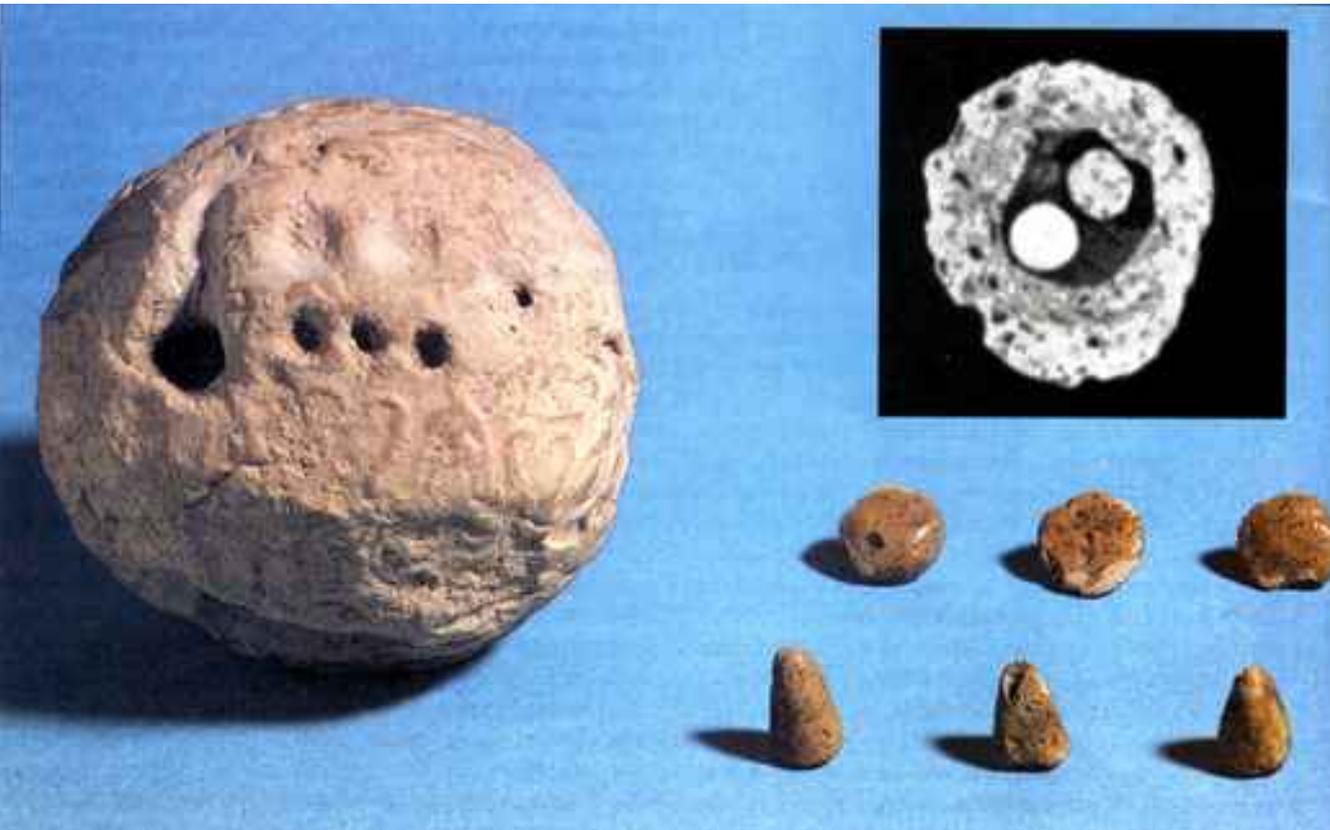
Pica, Lemer, Izard, & Dehaene, Science, 2004

- pug ma = un
- xep xep = deux
- ebapug = trois
- ebadipdip = quatre
- pug pōgbi = cinq, une main
- xep xep pōgbi = deux mains
- adesu/ade gu = quelques, peu
- ade/ade ma = beaucoup

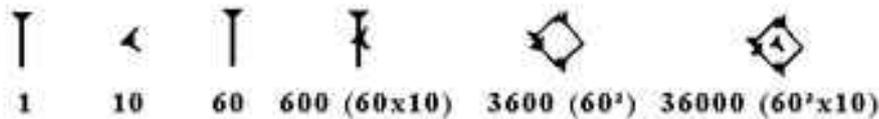
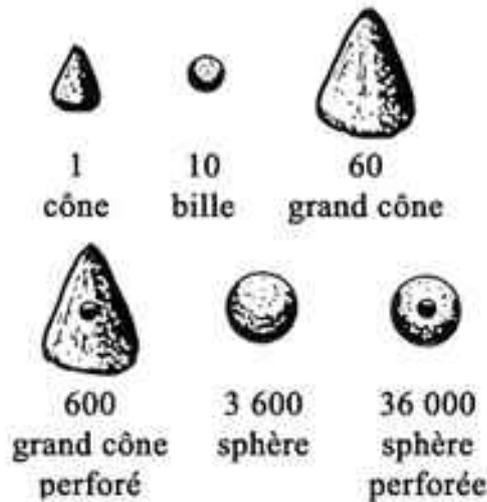


« *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group* », Pica, Lemer, Izard & Dehaene, Sciences, 2002.

Le premier outil de calcul...



Numération additive, base hybride 10-60



Avec les doigts de la main gauche on compte les dizaines



Avec la main droite, on compte avec le pouce, les phalanges de chaque doigt



La comptabilité se fait sur une tablette d'argile par la suite

1 = ∇	16 = ◀∇∇∇	31 = ◀◀∇	46 = ◀◀∇∇∇
2 = ∇∇	17 = ◀∇∇∇	32 = ◀◀∇∇	47 = ◀◀∇∇∇
3 = ∇∇∇	18 = ◀∇∇∇	33 = ◀◀∇∇∇	48 = ◀◀∇∇∇
4 = ∇∇∇	19 = ◀∇∇∇	34 = ◀◀∇∇∇	49 = ◀◀∇∇∇
5 = ∇∇∇	20 = ◀◀	35 = ◀◀∇∇∇	50 = ◀◀
6 = ∇∇∇	21 = ◀◀∇	36 = ◀◀∇∇∇	51 = ◀◀∇
7 = ∇∇∇	22 = ◀◀∇∇	37 = ◀◀∇∇∇	52 = ◀◀∇∇
8 = ∇∇∇	23 = ◀◀∇∇∇	38 = ◀◀∇∇∇	53 = ◀◀∇∇∇
9 = ∇∇∇	24 = ◀◀∇∇	39 = ◀◀∇∇∇	54 = ◀◀∇∇∇
10 = ◀	25 = ◀◀∇∇∇	40 = ◀◀	55 = ◀◀∇∇∇
11 = ◀∇	26 = ◀◀∇∇∇	41 = ◀◀∇	56 = ◀◀∇∇∇
12 = ◀∇∇	27 = ◀◀∇∇∇	42 = ◀◀∇∇	57 = ◀◀∇∇∇
13 = ◀∇∇∇	28 = ◀◀∇∇∇	43 = ◀◀∇∇∇	58 = ◀◀∇∇∇
14 = ◀◀∇∇	29 = ◀◀∇∇∇	44 = ◀◀∇∇∇	59 = ◀◀∇∇∇
15 = ◀◀∇∇	30 = ◀◀	45 = ◀◀∇∇∇	

Comptage des 60 unités sur les doigts

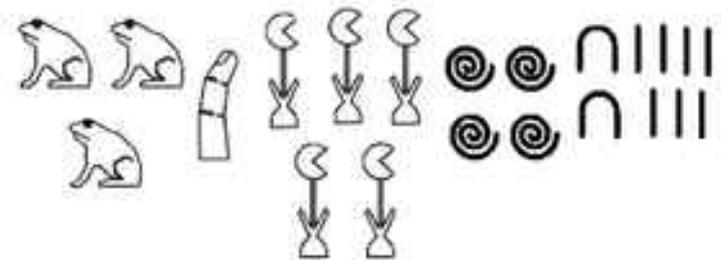
Numération additive en base 10



Chez les égyptiens

							1	Baton
							10	Anse de panier
							100	Papyrus
							1 000	Lotus
							10 000	Doigts
							100 000	Grenouille
							1 000 000	Dieux

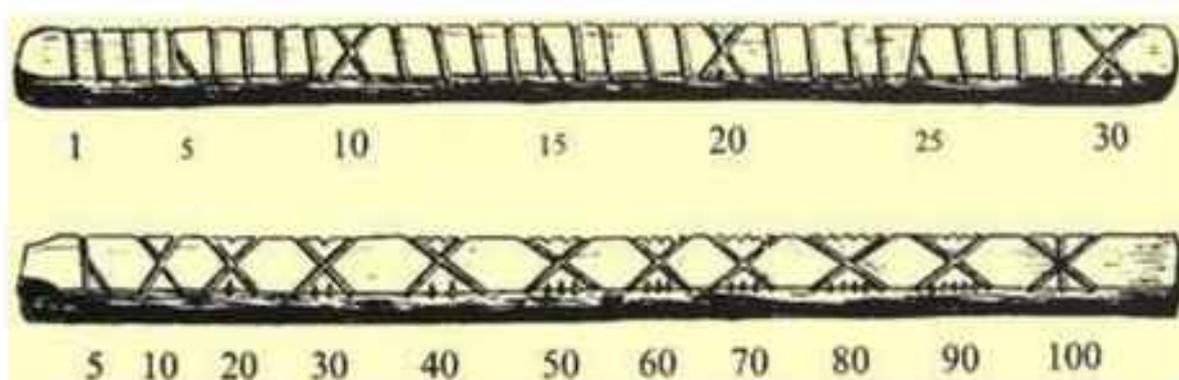
315426 =



Numération additive en base 10, sous base 5

- Empire romain

I	V	X	L	C	D	M	↯	↱	↲	↳
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000	50 000	100000



- Grèce (acrophonique)

*Entailles de bergers trouvées en Dalmatie,
 extrait de "Histoire universelle des chiffres" Georges Ifrah - Editions Robert Laffont 1994*

	└┘	△	└┘ [△]	H	└┘ ^H	X	└┘ ^X	M	└┘ ^M
1	5	10	50	100	500	1.000	5.000	10.000	50.000
	pente	deka	pentedeka	hekaton	pentehekaton	khiloi	pentekiloi	myrioi	pentemyrioi

Le principal inconvénient...

$$\text{DCXXIV} + \text{CCLXVII} = ???$$

$$\text{DCXXIV} - \text{CCLXVII} = ???$$

« Pour commencer, calcule grossièrement... mais non, pas avec des cailloux! sur tes doigts!... le montant global des tributs que nous versent les cités alliées...» Aristophane, 5^e- 4^e av JC

Du caillou au jeton...



DCXXV + DLXVII

(625+567)

\overline{C}	\overline{X}	M	C	X	I
			● ● ● ● ● ●	● ●	● ● ● ● ●

			D	L	V
			●		●
\overline{C}	\overline{X}	M	C	X	
I			●	● ●	

DCXXV + DLXVII

(625+567)

\overline{C}	\overline{X}	M	C	X	I
			● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	● ● ● ● ● ● ●	● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

			D	L	V
			● ●	●	● ●
\overline{C}	\overline{X}	M	C	X	
I			●	● ● ●	● ●

DCXXV + DLXVII

(625+567)

\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	I
			●●●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●●

\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	I
			●●●●●●●●●●	●●●●●●●●	●●●●●●●●●●

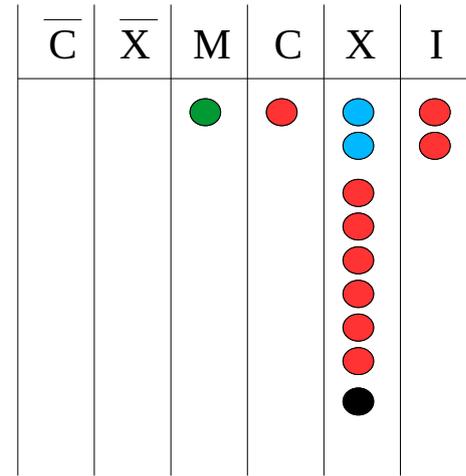
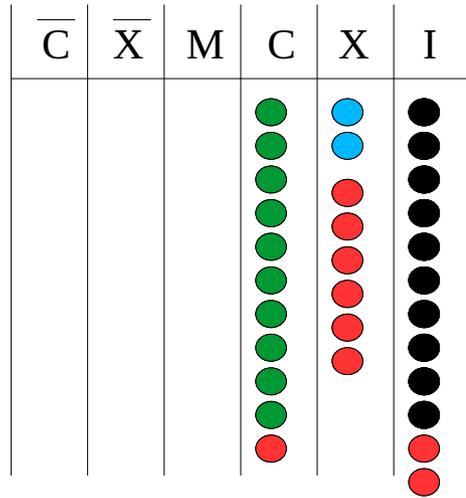
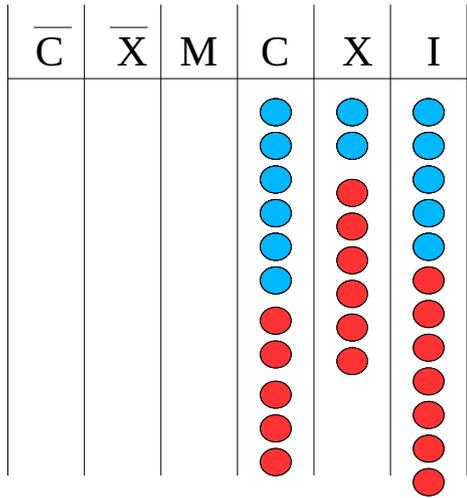
\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	I
		●	●	●●●●●●●●●●	●●

			D	L	V
			●●	●	●●
\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	
I			●	●●●●●	●●

			D	L	V
			●●	●	●●
\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	
I			●	●●●●●	●●

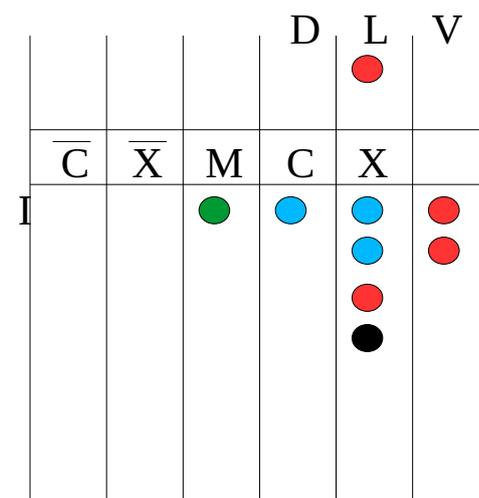
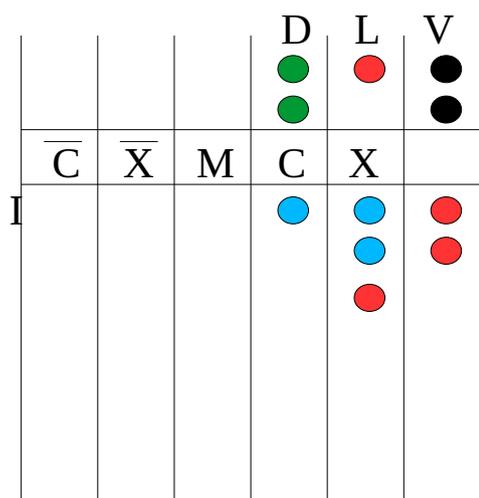
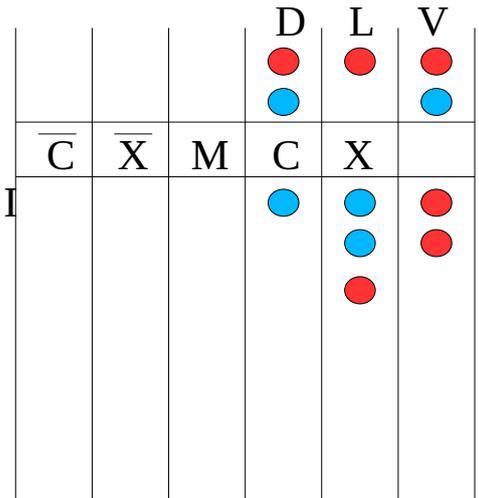
			D	L	V
				●	
\bar{C}	\bar{X}	M	C	X	
I		●	●	●●●●●●●●●●	●●

DCXXV + DLXVII (625+567)

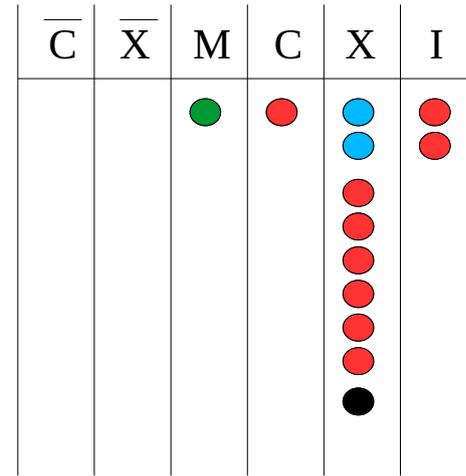
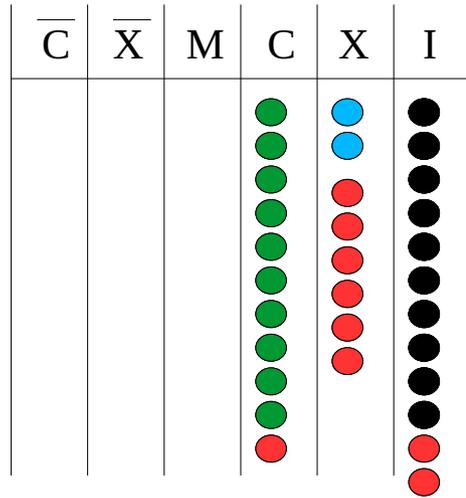
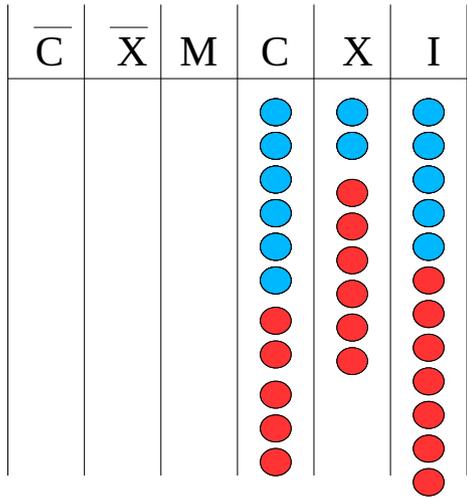


625+567 = 1192

DCXXV + DLXVII = MCLXXXII !

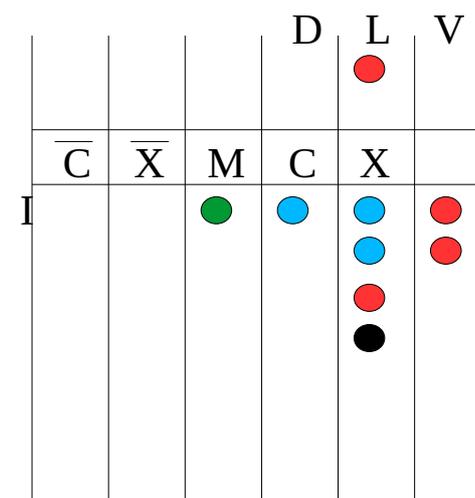
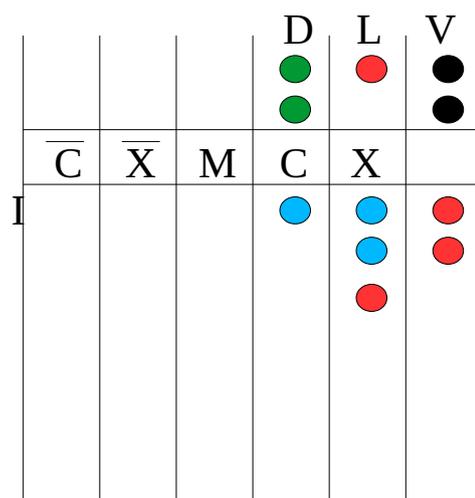
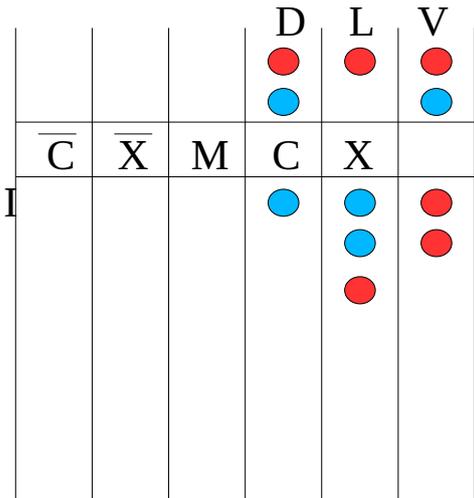


DCXXV + DLXVII (625+567)

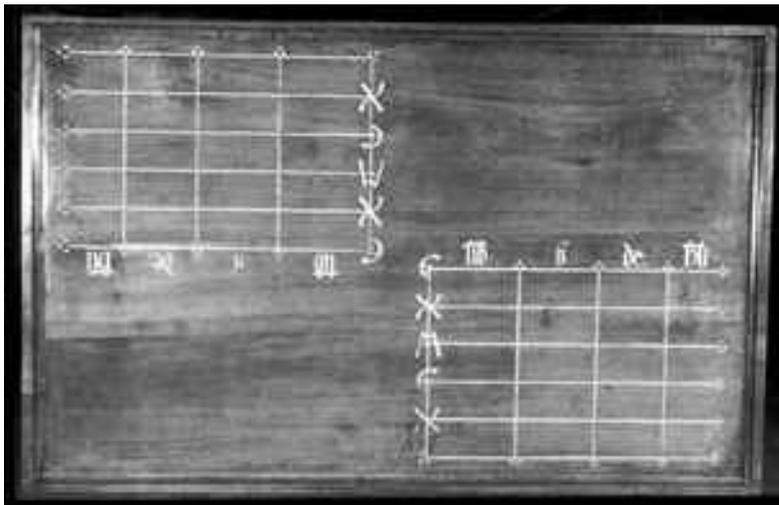
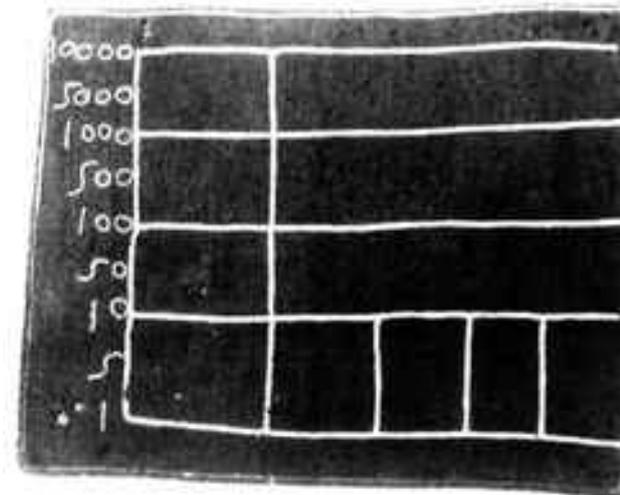


625+567 = 1192

DCXXV + DLXVII = MCLXXXII !

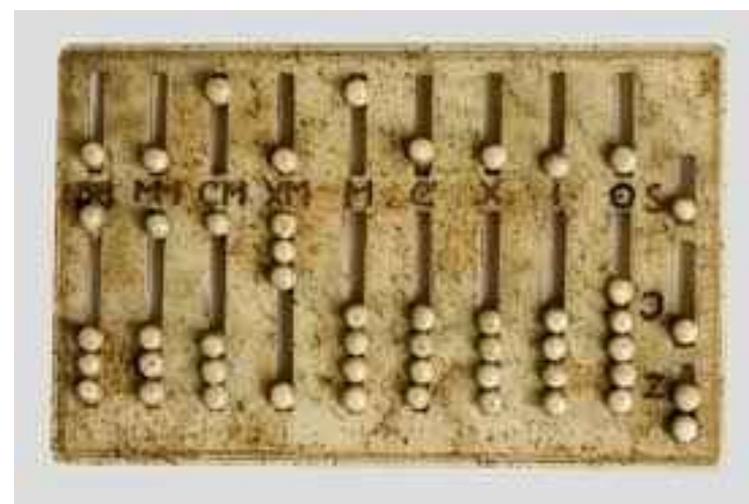
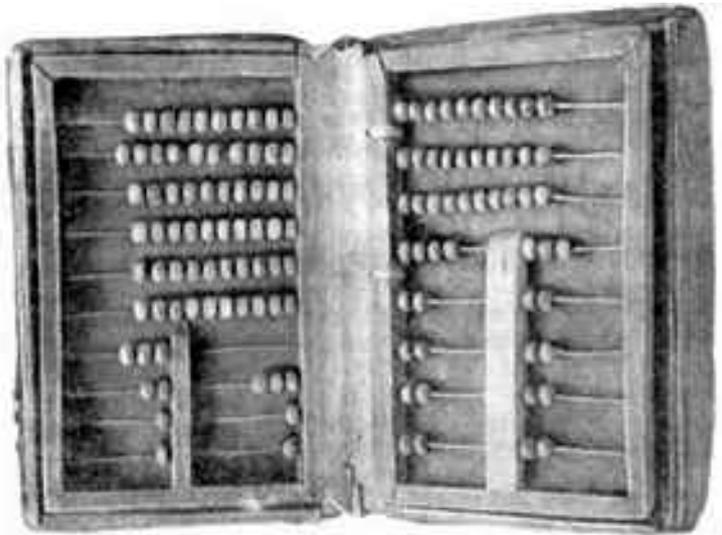


Du caillou au jeton...

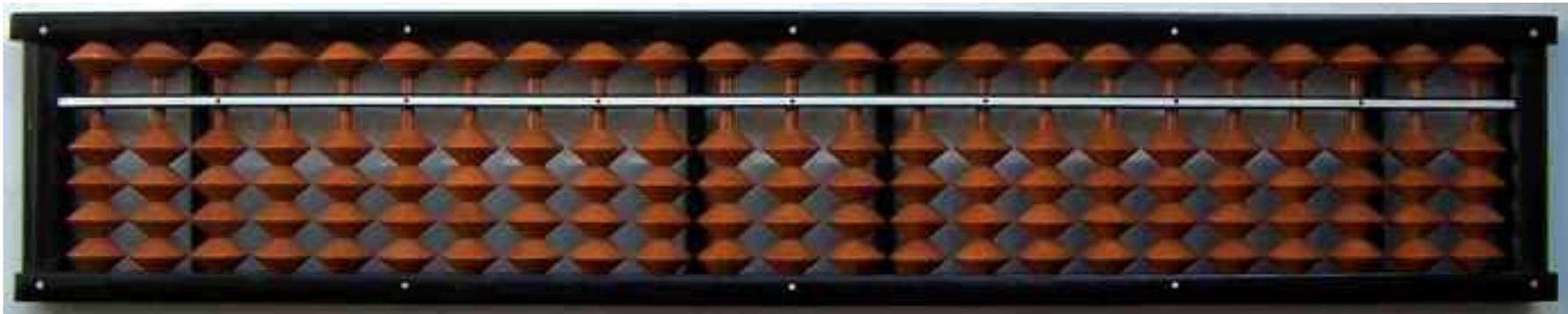
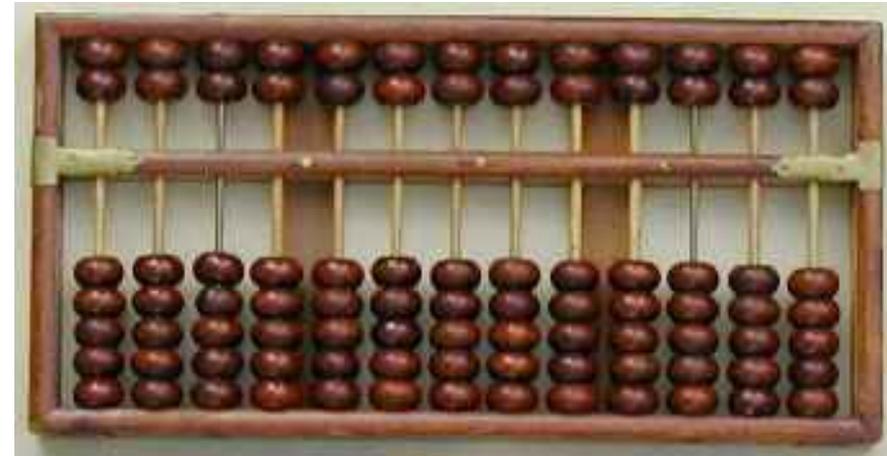


« Ceux-là sont comme les cailloux sur les abaquas: selon la volonté du calculateur, ils valent à un moment un chalkous et l'instant d'après un talent [...] », Polybe, 2^e avJC

... ou aux perles



Dès le I^o siècle



Comptine des neuf divisions, Cheng Dawei, 1592

Division par 2 :

2, 1, augmente-le pour obtenir 5.
Si tu rencontres 2, avance 10.

Division par 3 :

3, 1, 31.
3, 2, 62.
Si tu rencontres 3, avance 10.

Division par 4 :

4, 1, 22.
4, 2, augmente-le pour obtenir 5.
4, 3, 72.
Si tu rencontres 4, avance 10.

Division par 5 :

5, 1, double-le pour obtenir 2.
5, 2, double-le pour obtenir 4.
5, 3, double-le pour obtenir 6.
5, 4, double-le pour obtenir 8.
Si tu rencontres 5, avance 10.

Division par 6 :

6, 1, ajoute 4 en dessous.
6, 2, 32.
6, 3, augmente-le pour obtenir 5.
6, 4, 64.
6, 5, 82.
Si tu rencontres 6, avance 10.

Division par 7 :

7, 1, ajoute 3 en dessous.
7, 2, ajoute 6 en dessous.
7, 3, 42.
7, 4, 55.
7, 5, 71.
7, 6, 84.
Si tu rencontres 7, avance 10.

Division par 8 :

8, 1, ajoute 2 en dessous.
8, 2, ajoute 4 en dessous.
8, 3, ajoute 6 en dessous.
8, 4, augmente-le pour obtenir 5.
8, 5, 62.
8, 6, 74.
8, 7, 86.
Si tu rencontres 8, avance 10.

Division par 9 :

Pour diviser par 9, suis la tige actuelle en dessous.
Si tu rencontres 9, avance 10.

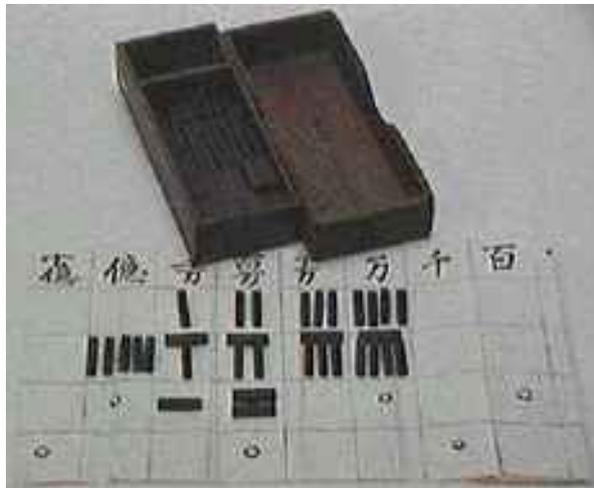
九歸歌 呼大數在上小數在下 不須歸一者原就其法故不立	二一添作五 逢二進一十	三二一 逢三進一十	四一二 逢四進一十	五一倍作二 逢五進一十	五四倍作八 逢五進一十	六一下加四 逢六進一十	六四六十四 逢六進一十	七一下加三 逢七進一十	七四七十五 逢七進一十	八一下加二 逢八進一十	八四添作五 逢八進一十	九 逢九進一十
----------------------------------	----------------	--------------	--------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	------------

... ou des baguettes !

Dès le 7° avJC



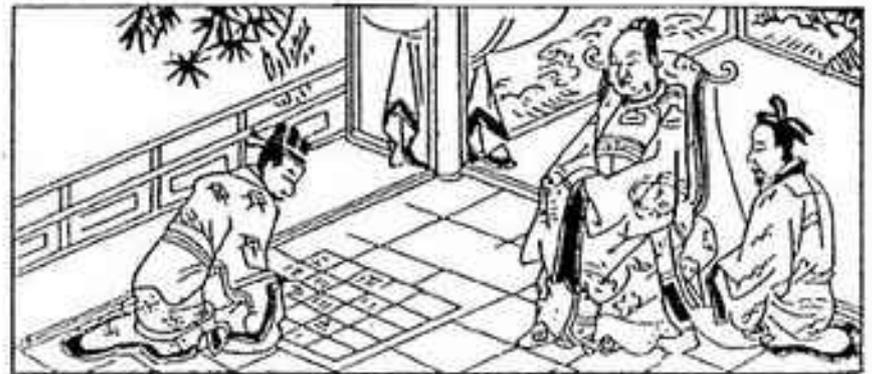
Vers une numération positionnelle



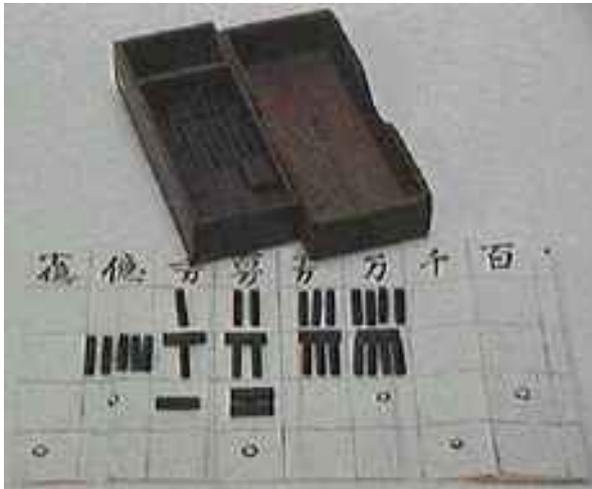
123	=			==	
482	=			⊥	
7641	=	⊥	⊥	===	

Le **○** pour le zéro remplace l'espace au 8^e siècle lorsqu'on retranscrit les nombres

					⊥	⊥	⊥	⊥
—	==	===	====	=====	⊥	⊥	⊥	⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9



Vers une numération positionnelle

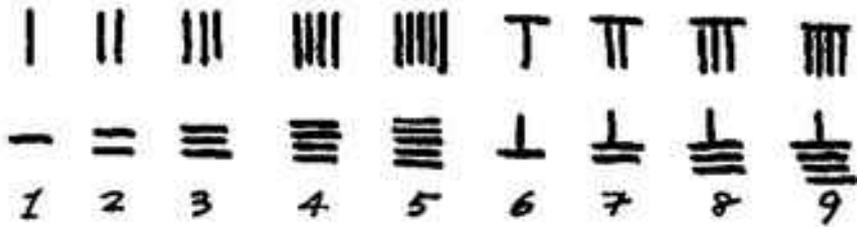
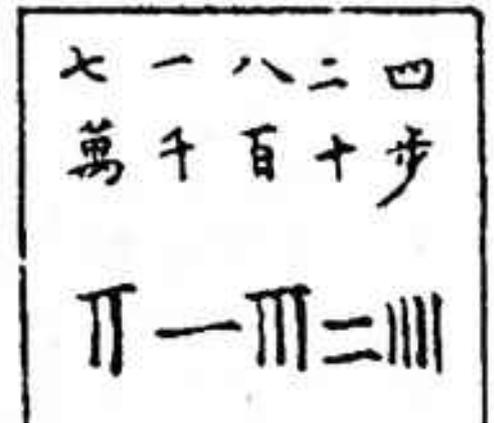


123	=			≡	≡≡
482	=		≡≡≡	⊥	≡≡
7641	=	⊥	⊥	≡≡≡	

Un même motif ne représente pas la même quantité selon sa position dans la transcription du nombre!

Le ⊥ de ⊥ ⊥ ≡≡≡ | n'est pas composé de 6 barres et ne représente pas la quantité 6 mais la quantité 600!

Les chiffres chinois



En haut: préhistoriques (retrouvé sur os et écailles de tortue)

—	=	≡	≡	⋈	∧	+) (ㄨ ㄩ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十

En bas: modernes

Ci-dessous: fontes chinoises MS Mincho

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

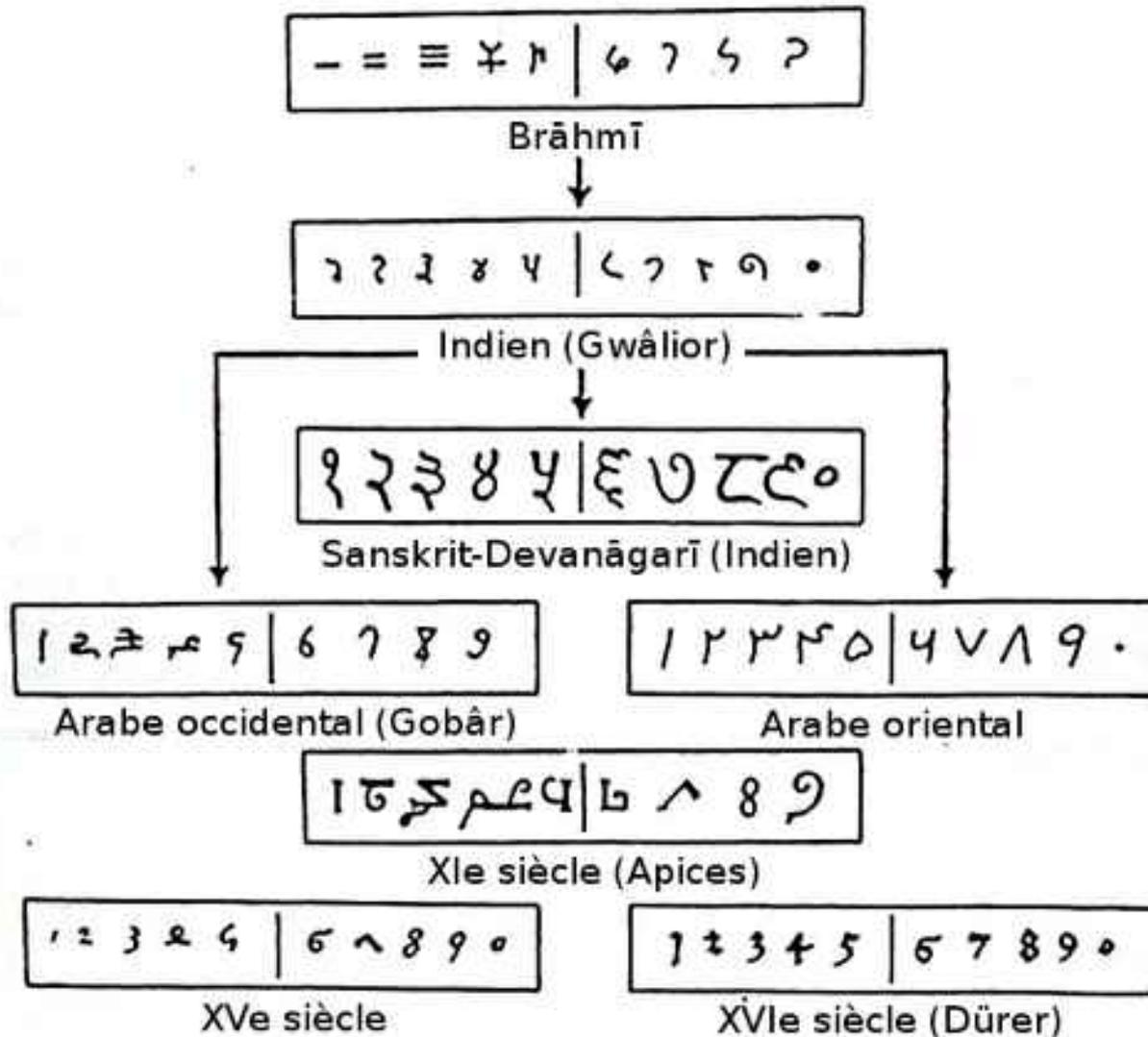
零 壹 貳 參 肆 伍 陸 柒 捌 玖 拾 佰 仟

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Les chiffres chinois

- 1. 壹 : Consistant
- 2. 貳 : un autre
- 3. 參 : Joint (參加)
- 4. 肆 : Presomptueux (放肆)
- 5. 伍 : Associé à (與 ... 為伍)
- 6. 陸 : monde (陸地)
- 7. 柒 : simplification de 漆 qui signifie peinture
- 8. 捌 : outil de ferme
- 9. 玖 : sorte de pierre noire
- 10. 拾 : choisir (拾取)

Les Chiffres indo-arabes



sūnya

शून्य

الصفر
'aṣ-ṣifr

Un long chemin...

- 3° av JC: Numération brahmi

—	=	≡	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘
1	2	3	4	5	6	7	8	9
𑀠	𑀡	𑀢	𑀣	𑀤	𑀥	𑀦	𑀧	𑀨
10	20	30	40	50	60	70	80	90
𑀩	100				𑀪	1000		

Comme au 7° av JC en Grèce: Numération alphabétique

Les chiffres indiens

- 5^o siècle: Âryabatha / Aryabha / Ardubarius

Le « *Ārya-Siddhānta* »

Description du système positionnel chiffré indien



- 6^o siècle: Brahmagupta

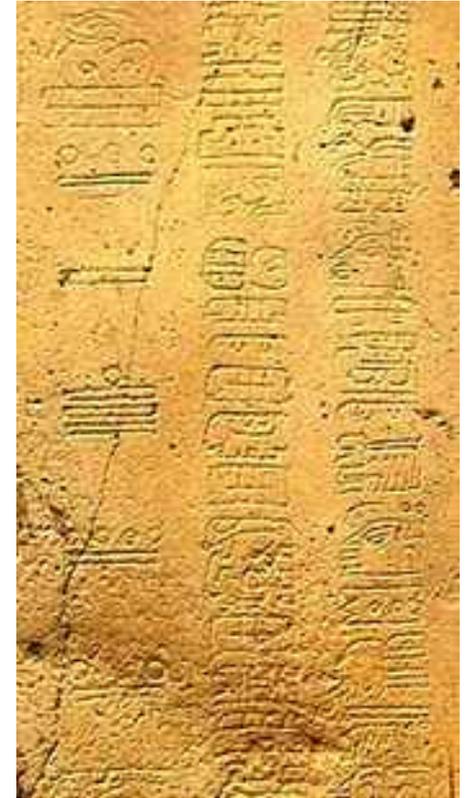
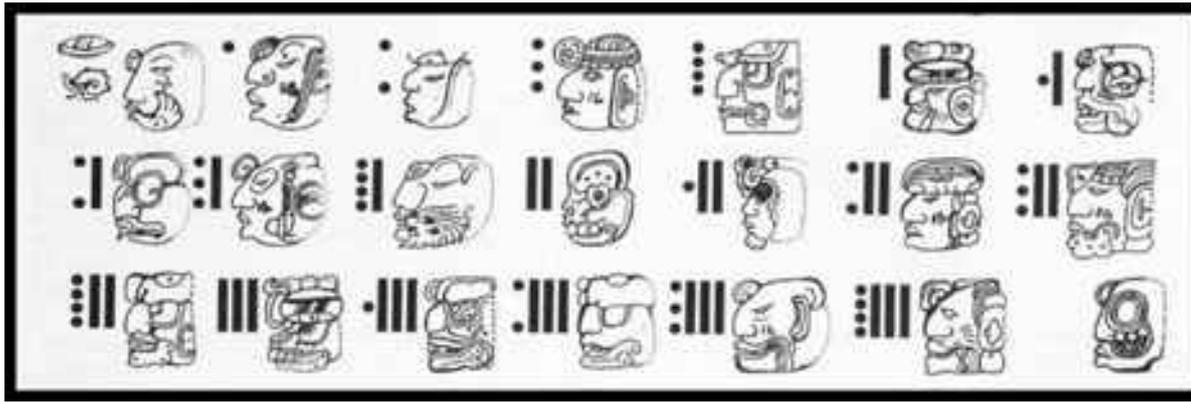
Le « *Rahmasphuta siddhānta* »

Enoncé des règles de calculs avec le zéro



Petit aparté sur la numération positionnelle maya

base 20, sous-base 5



Stèle de Mojarra,
156 ap JC

	ZÉRO CARDINAL (DURÉES)	ZÉRO ORDINAL (DATES)
DANS LES CODEX	 En 2 ^e position (devant un) : En toute position	
SUR LES MONUMENTS	 Style normal Style alphabétique	

2 zéros différent:

- cardinal (non dit)
- ordinal **chum**

Les chiffres indo-arabes

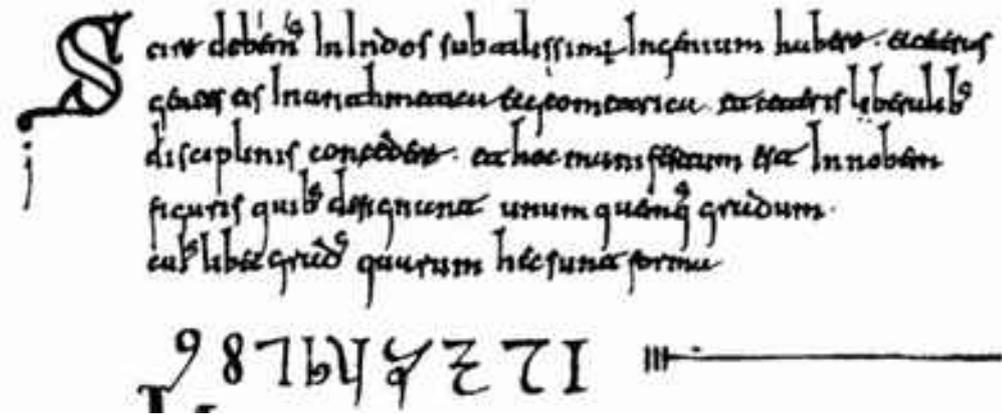
Un long chemin...



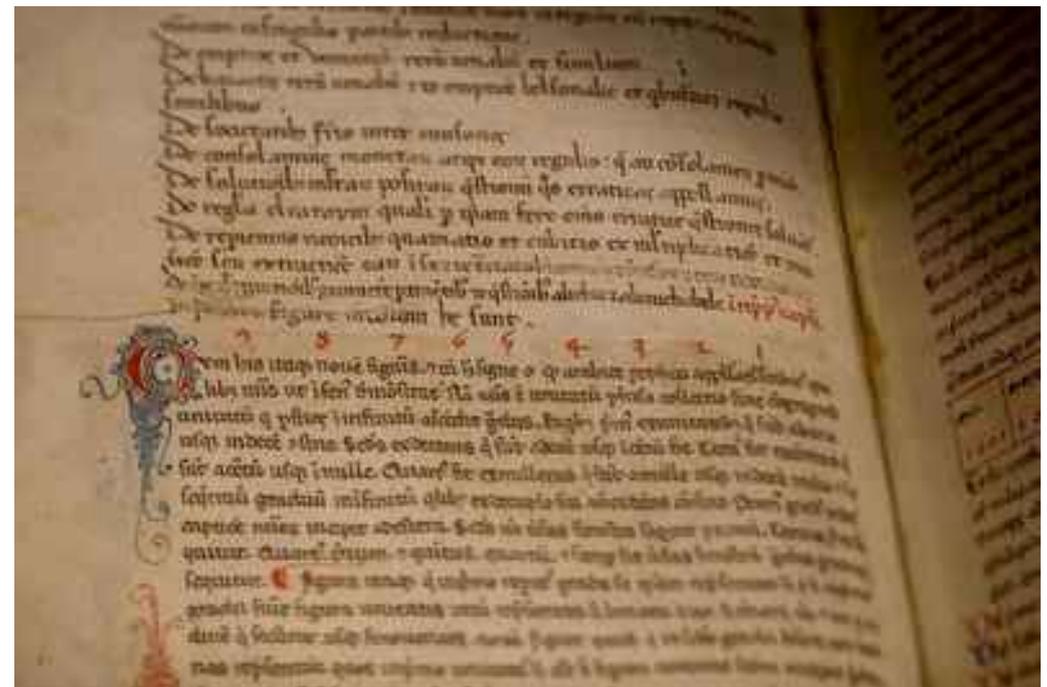
- 8^o siècle: Des disciples arabes d'astronomes indiens ramènent d'Inde les chiffres Devangari en Perse.
- 9^o siècle: Traité d'Al Khwarizmi sur le Calcul indien



Un long chemin...

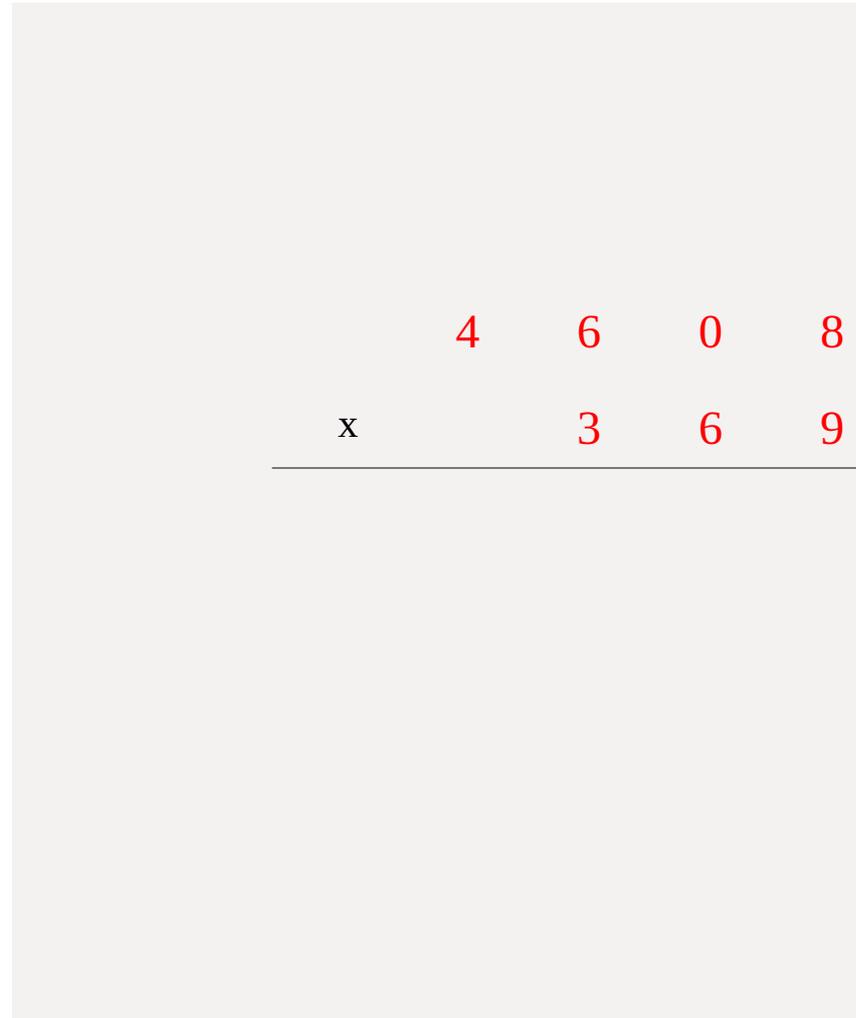
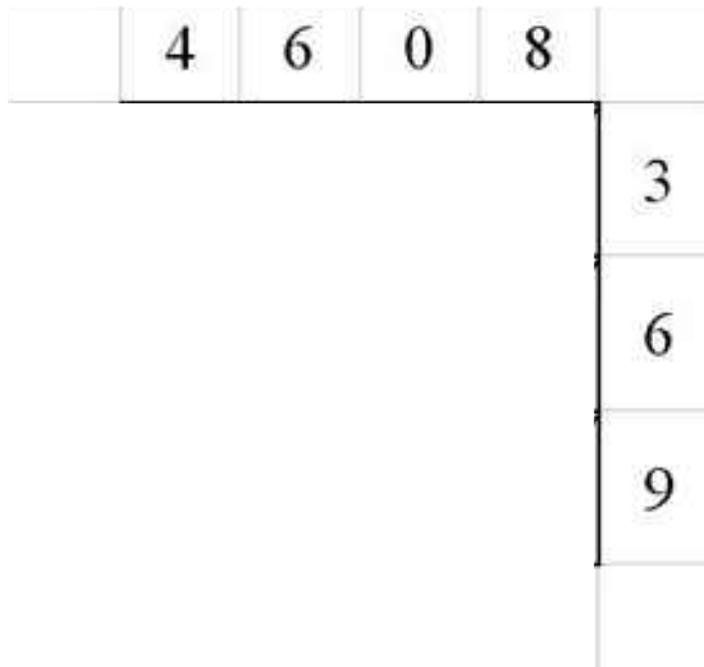


- 976: Codex Vigilanus du monastère d' Albelda
- Les traducteurs se mettent à l'oeuvre... (Gérard de Crémone, Adélard de Bath, Robert de Chester, Hermann de Carinthie, Platon de Tivoli...)
- Tout début 11^o: Gerbert d'Aurillac qui a étudié en Catalogne devient le pape Sylvestre II.
- 13^o: Fibonacci revient de Béjaïa.
parution du „Liber Abaci“



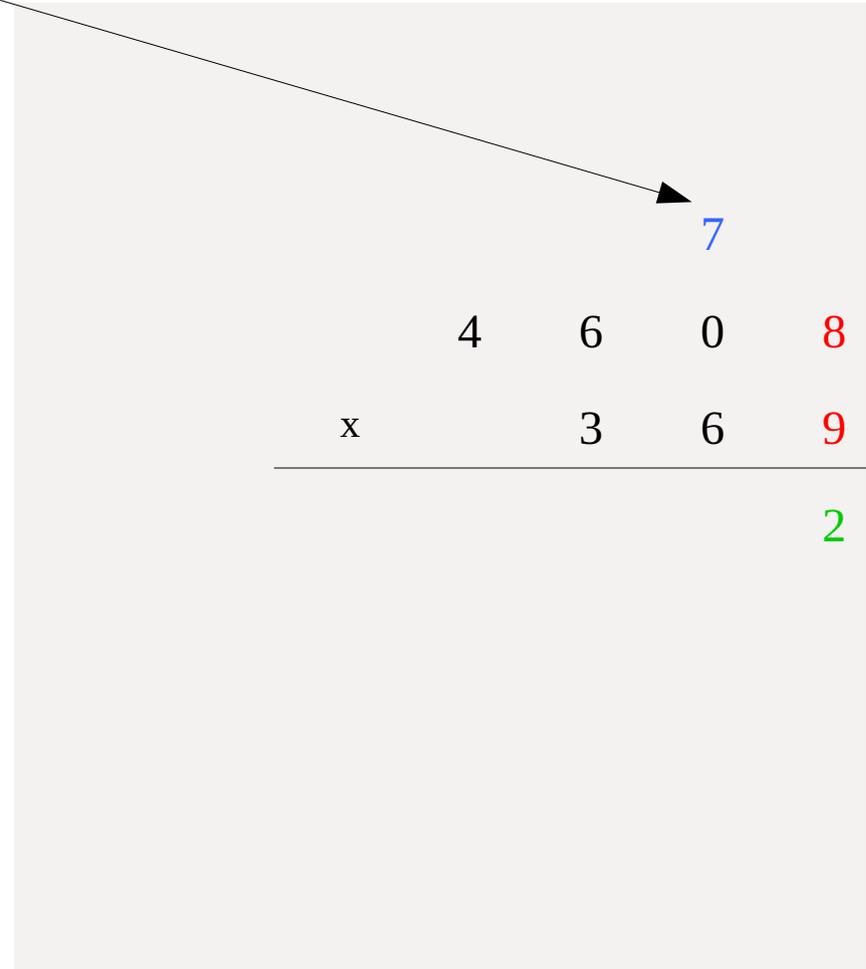
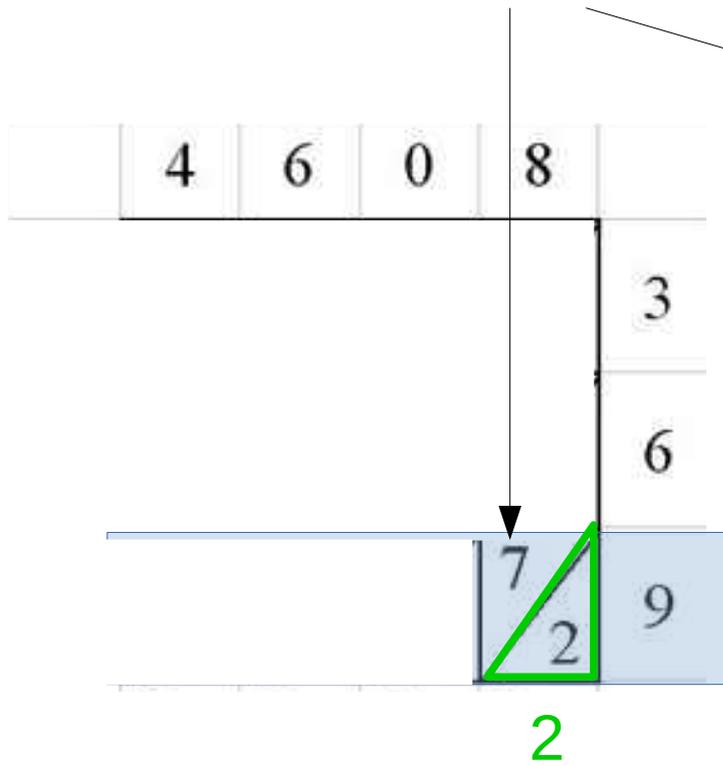
Une évolution progressive...

← To Ghebari/European		Arabic Prototype		→ To Arabic-eastern		
		○	○	●	•	
	2	∩	∩	∩	∩	
	3	∩	∩	∩	∩	
4	4	∩	∩	∩	∩	∩
5	5	∩	∩	∩	∩	∩
5	5	∩	∩	∩	∩	∩
	6	∩	∩	∩	∩	∩
	7	∩	∩	∩	∩	
8	8	∩	∩	∩	∩	
8	8	∩	∩	∩	∩	
	9	∩	∩	∩	∩	



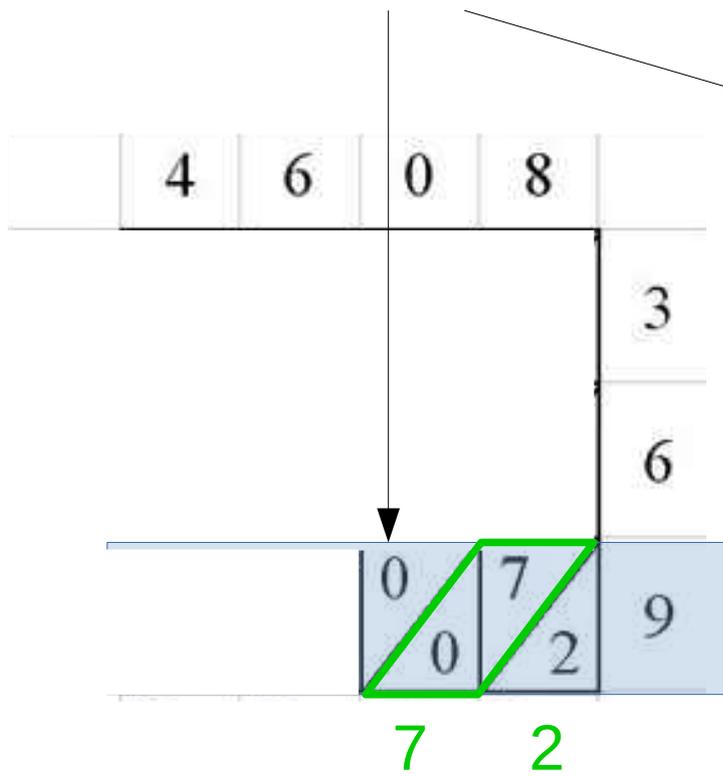
$$9 \times 8 = 72$$

retenue



$$9 \times 0 = 00$$

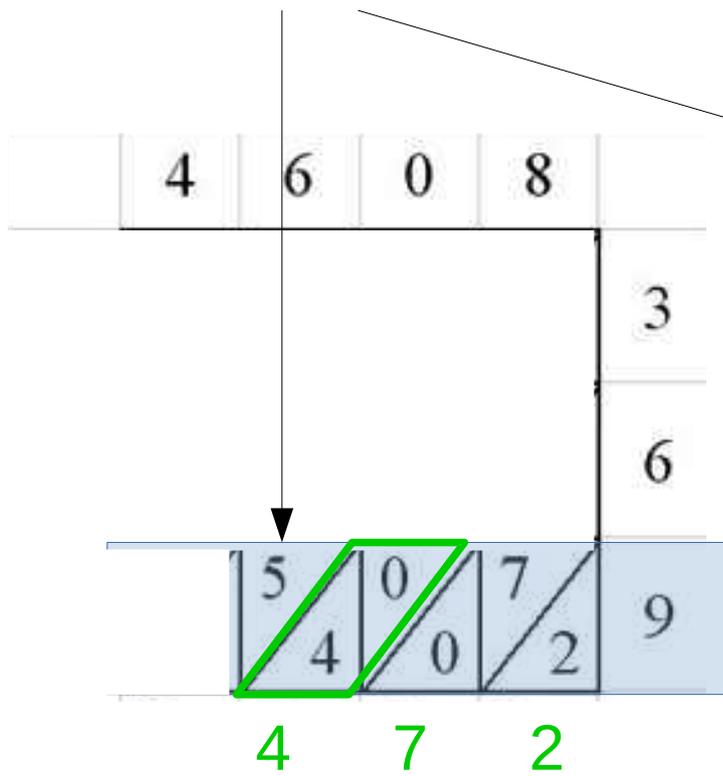
retenue



		0	7	
	4	6	0	8
x		3	6	9
<hr/>				
			7	2

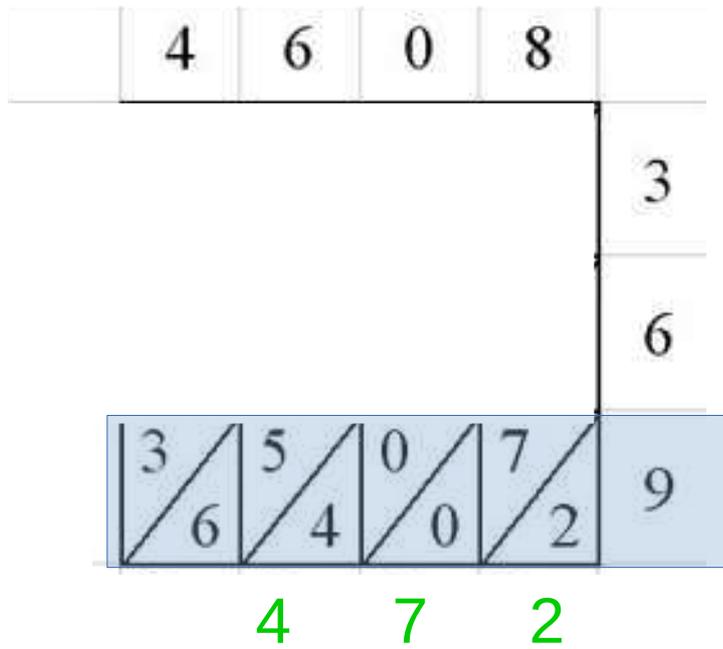
$$9 \times 6 = 54$$

retenue



	5	0	7	
	4	6	0	8
x		3	6	9
<hr/>				
		4	7	2

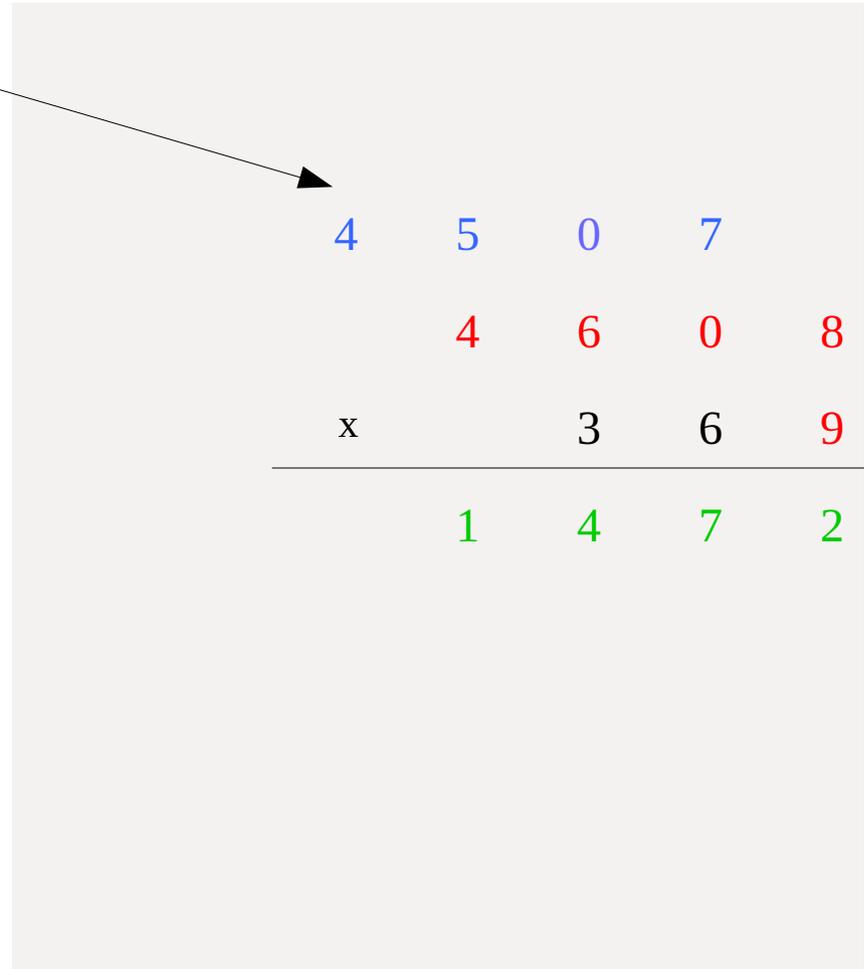
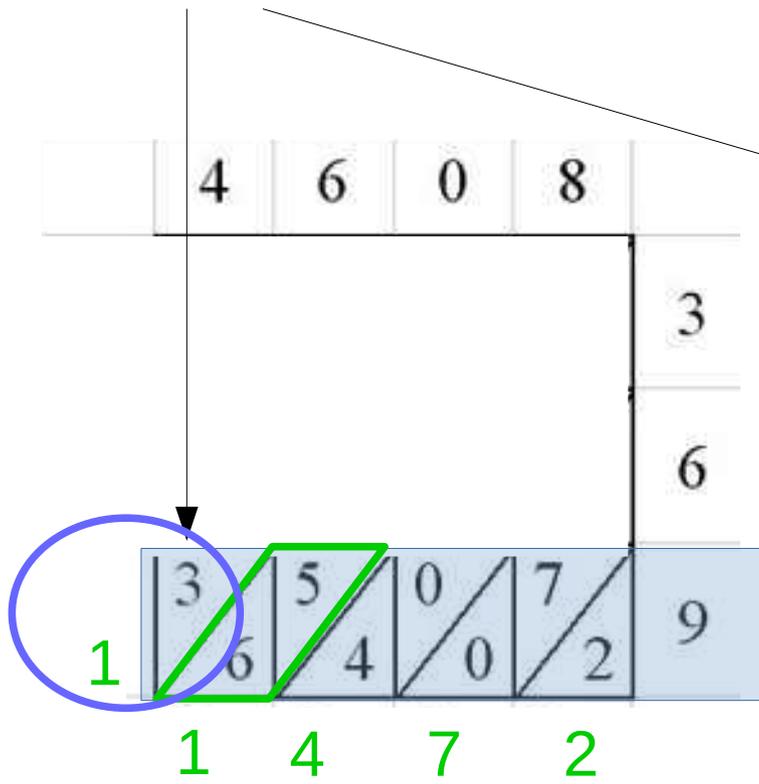
$$9 \times 4 = 36$$

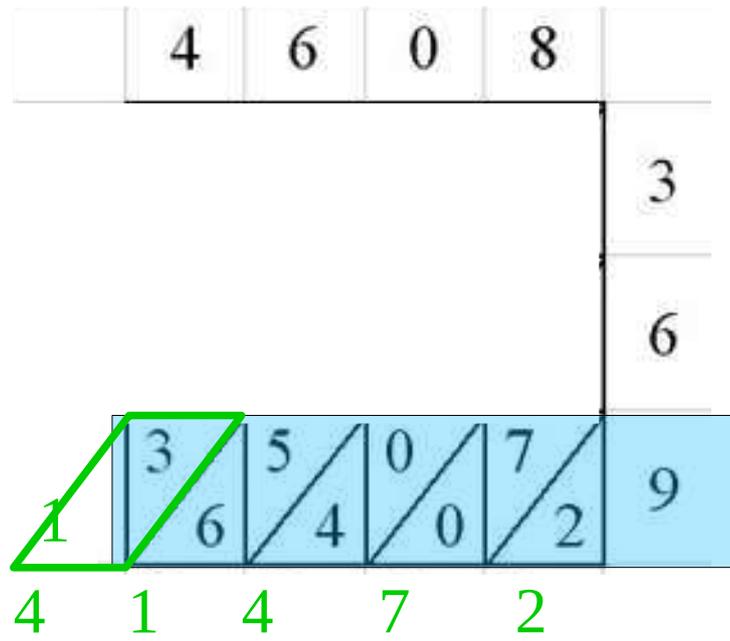


	5	0	7	
	4	6	0	8
x		3	6	9
<hr/>				
	4	1	4	7
				2

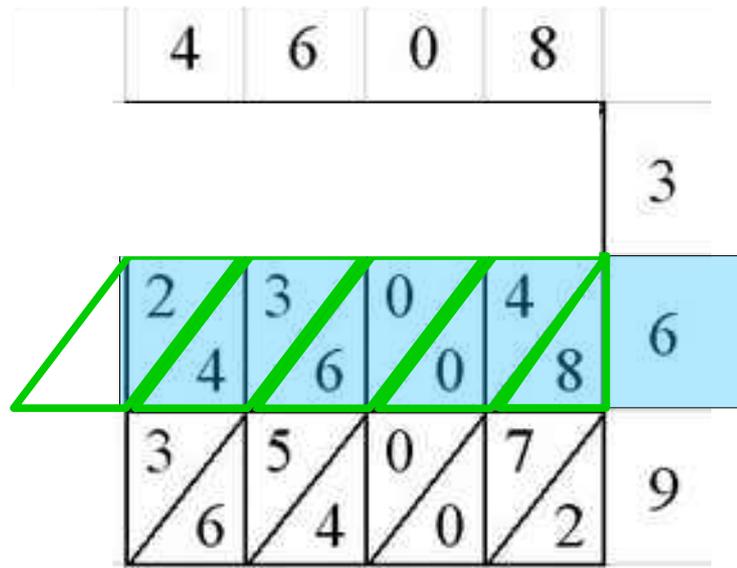
$$9 \times 4 = 36$$

retenu





4	5	0	7	
	4	6	0	8
x		3	6	9
<hr/>				
4	1	4	7	2



		3	0	4	
		4	6	0	8
	x		3	6	9
		4	1	4	7
		4	1	4	7
2	7	6	4	8	

	4	6	0	8	
	1 2	1 8	0 0	2 4	3
	2 4	3 6	0 0	4 8	6
	3 6	5 4	0 0	7 2	9

		1	0	2		
		4	6	0	8	
	x		3	6	9	
		4	1	4	7	2
	2	7	6	4	8	
1	3	8	2	4		

	4	6	0	8	
1	1 2	1 8	0 0	2 4	3
7	2 4	3 6	0 0	4 8	6
0	3 6	5 4	0 0	7 2	9
	0	3	5	2	

			4	6	0	8
	x		3	6	9	
		4	1	4	7	2
	2	7	6	4	8	
1	3	8	2	4		
	2	1	1	1		
1	7	0	0	3	5	2

4 retenues...

	4	6	0	8	
1	1 2	1 8	0 0	2 4	3
7	2 4	3 6	0 0	4 8	6
0	3 6	5 4	0 0	7 2	9
	0	3	5	2	

10 retenues...

			1		2		
			3		4		
			5		7		
			4	6	0	8	
				3	6	9	
			<hr/>				
			4	1	4	7	
		2	7	6	4	8	
1	3	8	2	4			
			<hr/>				
			2	1	1	1	
			1	7	0	0	
			3	5	2		

Abaques Vs Calcul indien...

Calcul à plume ou calcul à jetons? (1503)



- Pas de „traductions“ à faire,
- Pas d'abaques à transporter,
- Un stylo et un papier, une
une ardoise

Comput digital Vs Calcul indien...

« Il paraît judicieux d'engager l'élève dans l'étude du calcul digital, à l'exclusion de l'arithmétique indienne. »



Al Jahiz,
9^o siècle

« Les scribes de l'administration évitent cependant d'utiliser les chiffres indiens, parce qu'ils exigent l'emploi d'un matériel, et ils estiment qu'un système que l'on peut pratiquer sans autre moyen qu'un membre de son corps est plus conforme à la dignité. »

Comput digital Vs boulier & abaqués...



F. Buisson
20° siècle

« Le boulier corrompt l'enseignement de l'arithmétique. [...] La nature a donné aux enfants leurs dix doigts pour boulier; au lieu de leur en donner un second, il faut leur apprendre à se passer du premier. »