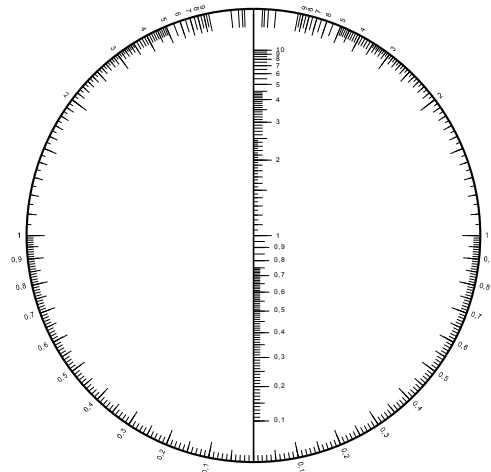


Limites

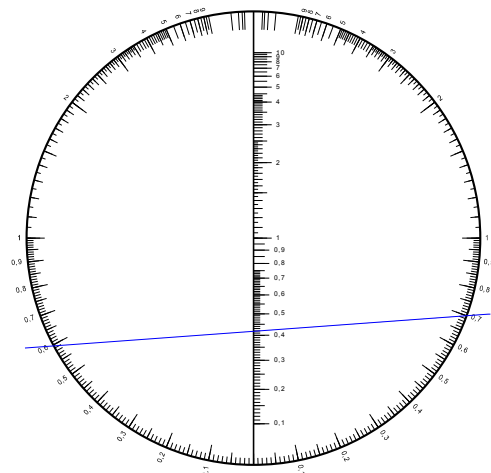
I/ Nomogramme circulaire

Le nomogramme ci-dessous est dû à John Clark (vers 1910), il (le nomogramme, pas Clark) sert à faire des multiplications :



1) Multiplication

Pour calculer 6×7 par exemple, on place une règle sur la graduation 6 à gauche et la graduation 7 à droite. On lit le produit sur l'axe. Pour plus de précision on peut mesurer $0,6 \times 0,7$ en reliant les graduations 0,6 (à gauche) et 0,7 (à droite) par une règle pour lire leur produit sur l'axe central :



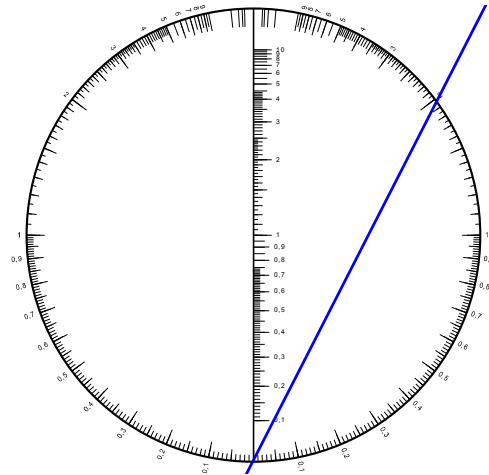
On lit la graduation 0,42 ce qui signifie que $0,6 \times 0,7 = 0,42$ ce dont on déduit que $6 \times 7 = 42$.

Le nomogramme a un axe de symétrie vertical, ce qui illustre la commutativité de la multiplication : 6×7 et 7×6 donnent le même résultat.

2) Zéro

On remarque que le nombre 0 figure au même endroit sur les trois graduations (en bas du cercle).

Si on veut effectuer la multiplication 0×2 , on joint la graduation 0 de gauche (qui est tout en bas) à la graduation 2 de droite, et on lit le produit à l'intersection avec le diamètre vertical : on trouve 0 parce que la graduation 0 du diamètre coïncide avec la graduation 0 de gauche :



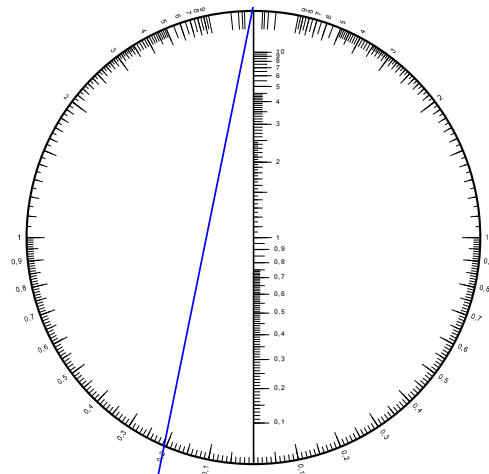
Le fait que 0 soit au même endroit sur les trois graduations, fait qu'en multipliant n'importe quel nombre par 0, le résultat est 0.

3) Inverses

En fait la figure a un autre axe de symétrie, horizontal : il représente la fonction inverse $1/x$. Par exemple 2 et 0,5 sont aussi à droite l'un que l'autre.

En suivant les graduations vers le haut, on constate que l'infini aussi est au même endroit sur les trois graduations : l'inverse de 0 est ∞ ce qu'on note $1/0=\infty$ mais surtout $1/\infty=0$.

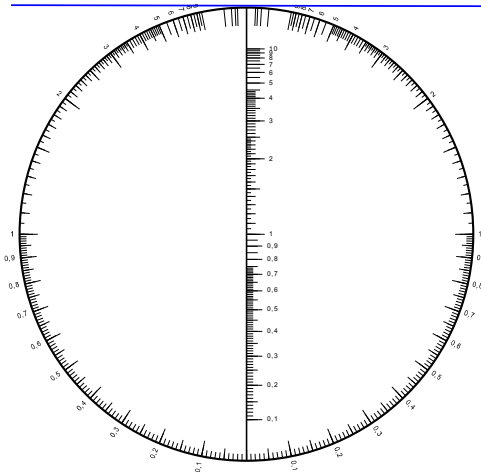
Du coup en multipliant un nombre positif par ∞ le résultat est ∞ . Par exemple pour multiplier 0,2 par ∞ on joint la graduation 0,2 (à gauche) et la graduation ∞ de droite (tout en haut) :



On regarde où le trait bleu croise le diamètre vertical : c'est aussi en ∞ donc on lit $0,2 \times \infty = \infty$.

4) L'infini

Pour tout nombre positif a , on sait que $a \times \infty = \infty$. Mais en fait si on calcule $\infty \times \infty$ avec le nomogramme circulaire on trouve aussi ∞ :



En fait c'est la conséquence du fait que $0 \times 0 = 0$, et que 0 et ∞ sont inverses l'un de l'autre.

En résumé,

- $0 \times 0 = 0$
- $0 \times 1 = 0$
- $1 \times \infty = \infty$
- $\infty \times \infty = \infty$
- $(-\infty) \times (-\infty) = \infty$
- $0 \div 1 = 1$
- $1 \div 0 = \infty$
- $0 \div \infty = 0$ $(0/\infty = 0/1 \times 1/\infty = 0 \times 0 = 0)$
- $1 \div \infty = 0$
- $\infty \div 0 = \infty$ $(\infty/0 = \infty/1 \times 1/0 = \infty \times \infty = \infty)$
- $\infty + \infty = \infty$ $(\infty + \infty = 2 \times \infty = \infty)$

Mais il y a des cas que le nomogramme circulaire ne permet pas de calculer¹. On les appelle **formes indéterminées**.

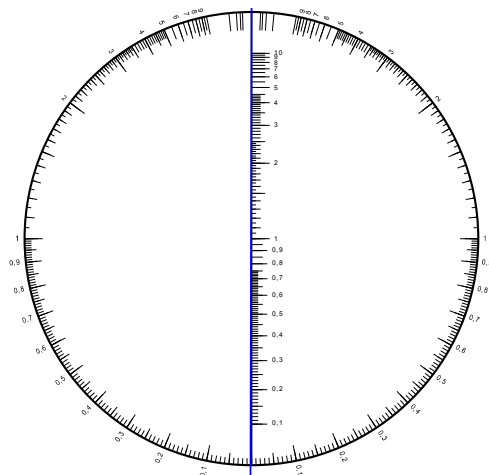
¹ Zéro, multiplié par n'importe quel nombre **autre que** ∞ , donne 0. ∞ , multiplié par n'importe quel nombre **autre que** 0, donne ∞

II/ Formes indéterminées

1) Produit indéterminé

Si on essaye de calculer avec le nomogramme circulaire de Clark, le produit de 0 par ∞ , on a un problème à la fin :

- on pose la règle sur la graduation 0 de gauche : elle est tout en bas
- on fait en sorte que la règle passe aussi par la graduation ∞ de droite : elle est tout en haut
- la règle est alors verticale, sur le diamètre. Or la suite de la construction demande de chercher où la règle croise le diamètre alors que la règle est sur le diamètre :



Le produit $0 \times \infty$ est donc égal à tous les nombres positifs à la fois. On dit qu'il est **indéterminé**. Dit autrement, si une fonction tend vers 0 et une autre fonction tend vers ∞ alors on ne peut pas savoir vers quoi tend leur produit.

2) Quotients indéterminés

Alors on ne peut pas connaître la valeur de $\infty \div \infty$: c'est $\infty \times 1/\infty = \infty \times 0$ qui est indéterminé.

$0 \div 0$ non plus n'est pas déterminé : $0/0 = 0 \times 1/0 = 0 \times \infty$.

3) Somme indéterminée

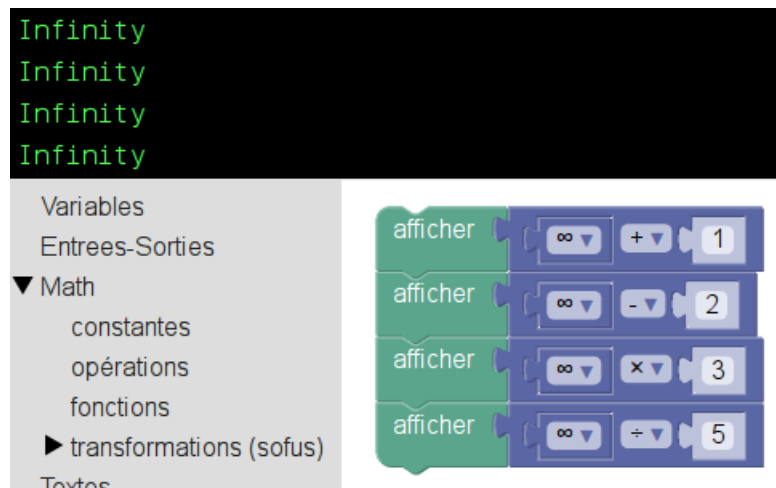
Comme $\ln(0) = -\infty$ et $\ln(\infty) = \infty$, la fonction $\ln$ transforme le produit indéterminé $0 \times \infty$ en la somme $-\infty + \infty$: celle-ci est également indéterminée.

III/ Calculatrice

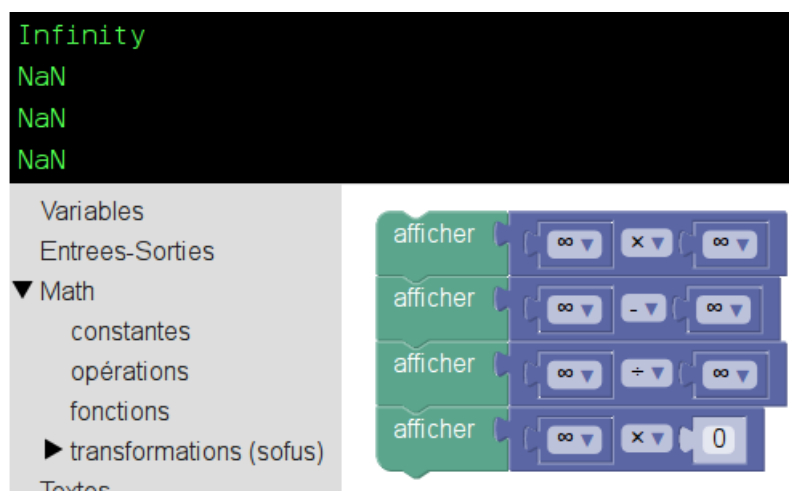
1) SofusPy974

Parmi les constantes mathématiques présentes dans SofusPy974, il y a non seulement π et e , mais aussi ∞ . Cela permet donc d'afficher certaines des limites vues auparavant :

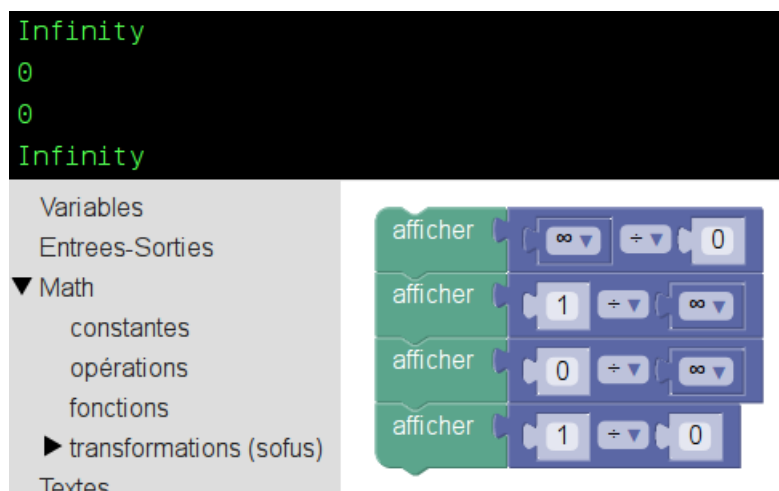
$$\infty + 1 = \infty - 2 = \infty \times 3 = \infty \div 5 = \infty$$



On peut voir aussi que $\infty \times \infty = \infty$ et que $\infty \times 0$, $\infty \div \infty$ et $\infty - \infty$ sont indéterminés :

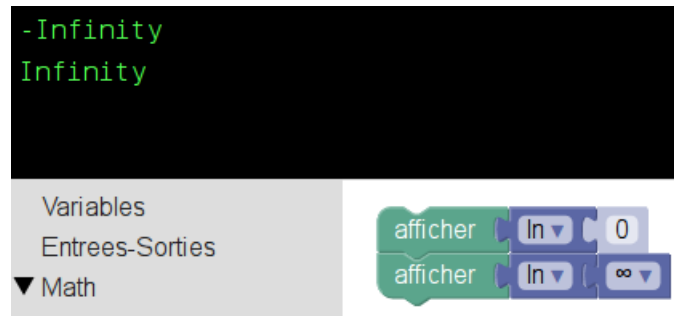


En dehors de la forme indéterminée $0 \div 0$, la division par 0 donne ∞ :



SofusPy974 connaît aussi les limites du logarithme népérien et de l'exponentielle de base e :

- $\ln 0 = -\infty$, $\ln \infty = \infty$
- $e^{-\infty} = 0$, $e^{\infty} = \infty$



2) Python

En Python, ∞ s'obtient en appliquant la fonction `float` au mot 'inf' :

```
print(float('inf') + 1)
print(float('inf') - 2)
print(float('inf') * 3)
print(float('inf') / 5)
```

donne le pseudocode

```
afficher (+∞ + 1)
afficher (+∞ - 2)
afficher (+∞ × 3)
afficher (+∞ / 5)
```

Avec

```
from math import log, exp
```

on peut retrouver les limites du logarithme et de l'exponentielle, mais Python donne un message d'erreur si on essaye de calculer `ln(0)`.

3) Numworks (sans Python)

Dans la calculatrice Numworks, on obtient l'infini en entrant les lettres 'inf'² :

rad	CALCULATION	
$\frac{1}{\text{inf}}$		0
$\text{inf}+1$		inf
$\text{inf}-2$		inf
$\text{inf}+\text{inf}$		inf

On lit $1 \div \infty = 0$, $\infty + 1 = \infty - 2 = \infty + \infty = \infty$.

On vérifie également que $\infty \times \infty = \infty$, que $\infty \times (-2) = -\infty$ (contrairement à $\infty - 2$ qui est égal à ∞) mais que $\infty \times 0$ et $\infty - \infty$ sont indéterminés :

rad	CALCULATION	
$\text{inf}-\text{inf}$		undef
$\text{inf} \cdot \text{inf}$		inf
$\text{inf} \cdot 0$		undef
$\text{inf} \cdot (-2)$		$-\text{inf}$
$\text{inf}-2$		inf

La Numworks connaît aussi les limites du logarithme népérien et de l'exponentielle mais, comme Python, elle considère comme indéterminée la limite de $\ln$ en 0 :

rad	CALCULATION	
$\ln(0)$		undef
e^{inf}	$e^{\text{inf}} \approx \text{inf}$	
$e^{-\text{inf}}$	$\frac{1}{e^{\text{inf}}} \approx 0$	
$\ln(\text{inf})$		inf

² Les lettres s'obtiennent à l'aide de la touche **alpha** : **alpha** **tan** **alpha** **8** **alpha** **x'**