

# Calcul différentiel

La théorie exposée ici est de Leibniz, mais exposée (en français) par le marquis Guillaume de l'Hospital, dans un livre paru en 1696 et titré *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*.



Guillaume de l'Hospital  
(1661-1704)

## I/ Notations

### 1) Convention

Comme le fera d'Alembert dans l'Encyclopédie par la suite, l'Hospital note les constantes par les premières lettres de l'alphabet et les variables par les dernières lettres :

#### AVERTISSEMENT.

*On suppose ordinairement dans la suite que les dernières lettres de l'alphabet, z, y, x, &c. marquent des quantités variables; & au contraire que les premières a, b, c, &c. marquent des quantités constantes: de sorte que x devenant  $x + dx$ ; y, z, &c. deviennent  $y + dy$ ,  $z + dz$ , &c. \*Et a, b, c, &c. demeurent les mêmes a, b, c, &c.*

### 2) Notation de Leibniz

Leibniz appelle *différentielle* (l'Hospital préfère le mot *différence*), et note d, le résultat (infiniment petit) d'une soustraction effectuée sur des grandeurs infiniment proches :

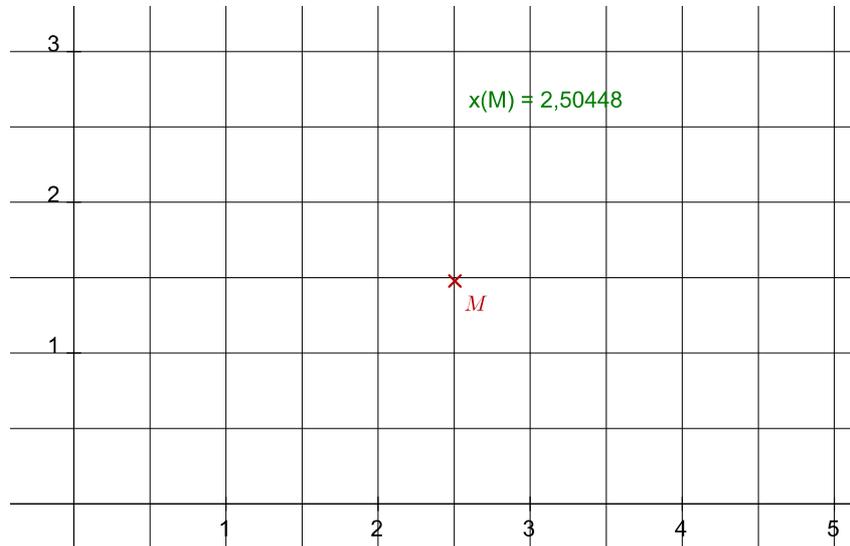
#### DEFINITION II.

*La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la Différence.  
pour marquer la différence à une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note d n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul.*

### 3) CaRMetal

#### a) Abscisse d'un point

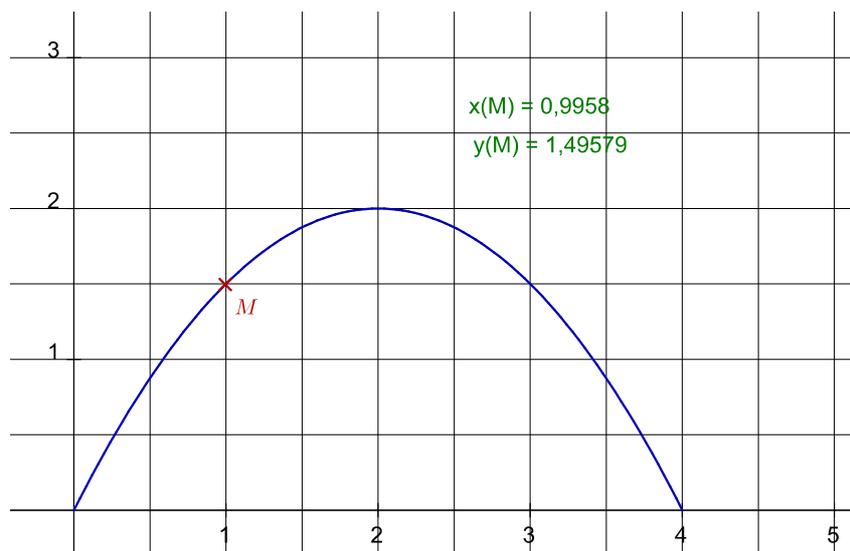
Dans CaRMetal (comme dans bien d'autres logiciels de géométrie dynamique), il existe une fonction *abscisse* notée  $x$  :



$x(M)$  est l'abscisse de M (actuellement environ 2,5 comme on peut le voir sur le repère orthonormé).

#### b) Ordonnée d'un point

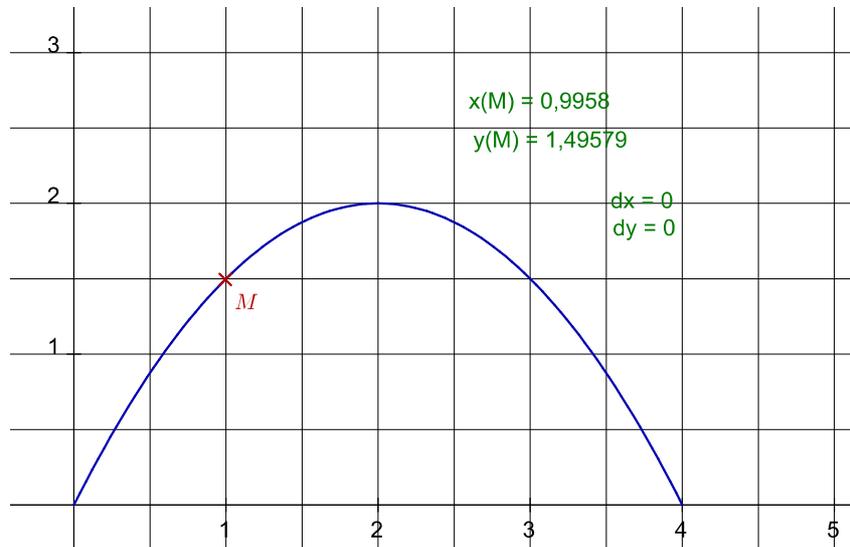
Il y a aussi une fonction *ordonnée* qui est notée  $y$ . L'ordonnée de M est donc  $y(M)$  :



Ci-dessus, M a été attaché à la parabole de telle sorte que si on le déplace à la souris, il reste sur la parabole. Ici M est proche des coordonnées (1 ; 1,5).

### c) Le d de Leibniz

Pour CaRMetal,  $d$  est une fonction (qui à une expression variable associe une autre expression mais très petite). En ajoutant les expressions  $d(x(M))$  et  $d(y(M))$  on voit qu'elles valent 0 tant qu'on ne bouge pas  $M$  :



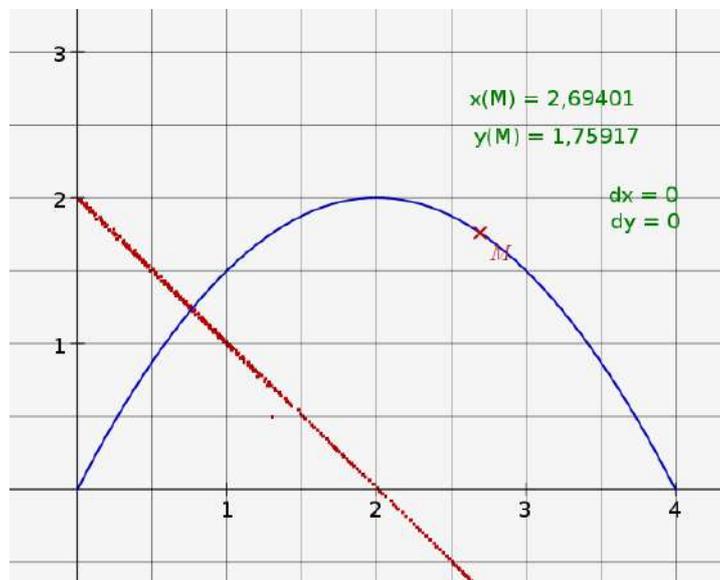
## II/ Dérivée

### 1) Définition (Leibniz)

La quantité  $dy/dx$  est appelée **dérivée** de  $y$  par rapport à  $x$ . Comme  $M$  est placé sur la représentation graphique d'une fonction, le quotient  $dy/dx$  ne dépend que de  $x$ .

### 2) Représentation graphique

Avec la figure ci-dessus, on peut créer un point  $P$  de coordonnées  $x(M)$  et  $dy/dx$  et activer sa trace. En déplaçant  $M$  sur la parabole, on constate que le point  $P$  décrit une courbe (en rouge) qui représente graphiquement une nouvelle fonction, appelée fonction dérivée :



### 3) Dérivée d'une constante

**COROLLAIRE.**  
1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

Si  $a$  est une constante,  $da=0$  donc  $da/dx=0/dx=0$  : la dérivée d'une constante est la fonction nulle.

### 4) Dérivée et variations

Lorsque  $M$  bouge vers la droite,  $dx$  est positif et lorsque  $M$  bouge vers la gauche,  $dx$  est négatif.

#### a) fonctions croissantes

Si la fonction représentée graphiquement est croissante,

- $M$  monte ( $dy$  positif) lorsqu'il va vers la droite ( $dx$  positif)
- $M$  descend ( $dy$  négatif) lorsqu'il va vers la gauche ( $dx$  négatif)

Dans les deux cas,  $dx$  et  $dy$  sont de même signe (tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs).  
Donc leur quotient est positif.

#### b) fonctions décroissantes

Si la fonction représentée graphiquement est décroissante,

- $M$  descend ( $dy$  négatif) lorsqu'il va vers la droite ( $dx$  positif)
- $M$  monte ( $dy$  positif) lorsqu'il va vers la gauche ( $dx$  négatif)

Dans les deux cas,  $dx$  et  $dy$  sont de signes contraires. Donc leur quotient est négatif.

#### c) Théorème (Newton, Leibniz)

Une fonction est croissante si et seulement si sa dérivée est positive, et décroissante si et seulement si sa dérivée est négative.

On étudie les variations d'une fonction à l'aide du tableau de signes de sa dérivée.

## III/ Calcul de dérivées

On sait qu'une table rectangulaire mesure entre  $x=2,4\text{m}$  et  $x+dx=2,43\text{m}$  de long, et entre  $y=1,8\text{m}$  et  $y+dy=1,82\text{m}$  de large.

### 1) Dérivée d'une somme

#### a) Précision des calculs

Avec quelle précision connaît-on le demi-périmètre de cette table ? Comme la longueur vaut au

moins 2,4m et la largeur vaut au moins 1,8m alors le demi-périmètre vaut au moins  $2,4m+1,8m=4,2m$ . Comme la longueur vaut au plus 2,43m et la largeur vaut au plus 1,82m alors le demi-périmètre vaut au plus  $2,43m+1,82m=4,25m$ .

Alors que l'imprécision sur la longueur était  $dx=3cm$  et que l'imprécision sur la largeur était  $dy=2cm$ , l'imprécision sur le demi-périmètre est leur somme 5cm. Lorsqu'on mène des calculs, les erreurs d'approximation s'amplifient au cours du calcul et il est prudent de prendre des valeurs plus précises pour les données : ce n'est pas en arrondissant à  $10^{-3}$  dès le début du calcul, qu'on a la garantie d'avoir le résultat aussi à  $10^{-3}$ .

## b) Dérivée d'une somme

$(u+du) + (v+dv) = u+du+v+dv=u+v+du+dv=(u+v)+(du+dv)$  donc  $d(u+v)=du+dv$ .

En divisant les deux membres par  $dx$  on a  $d(u+v)/dx=du/dx+dv/dx$  ou (avec la notation de Lagrange)  $(u+v)'=u'+v'$ .

C'est ce qu'écrivait Guillaume de l'Hospital :

### PROPOSITION I.

#### Problème.

4. **P**RENDRE la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.

Soit  $a+x+y-z$  dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que  $x$  soit augmentée d'une portion infiniment petite; c'est-à-dire qu'elle devienne  $x+dx$ ;  $y$  deviendra alors  $y+dy$ ; &  $z$ ,  $z+dz$ ; pour la constante  $a$ , elle demeurera la même  $a$ : de sorte que la quantité proposée  $a+x+y-z$  deviendra  $a+x+dx+y+dy-z-dz$ ; & la différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette dernière, fera  $dx+dy-dz$ . Il en est ainsi des autres; ce qui donne cette règle.

La règle en question est celle-ci :

### REGLE I.

*Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.*

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui fera la différence cherchée.

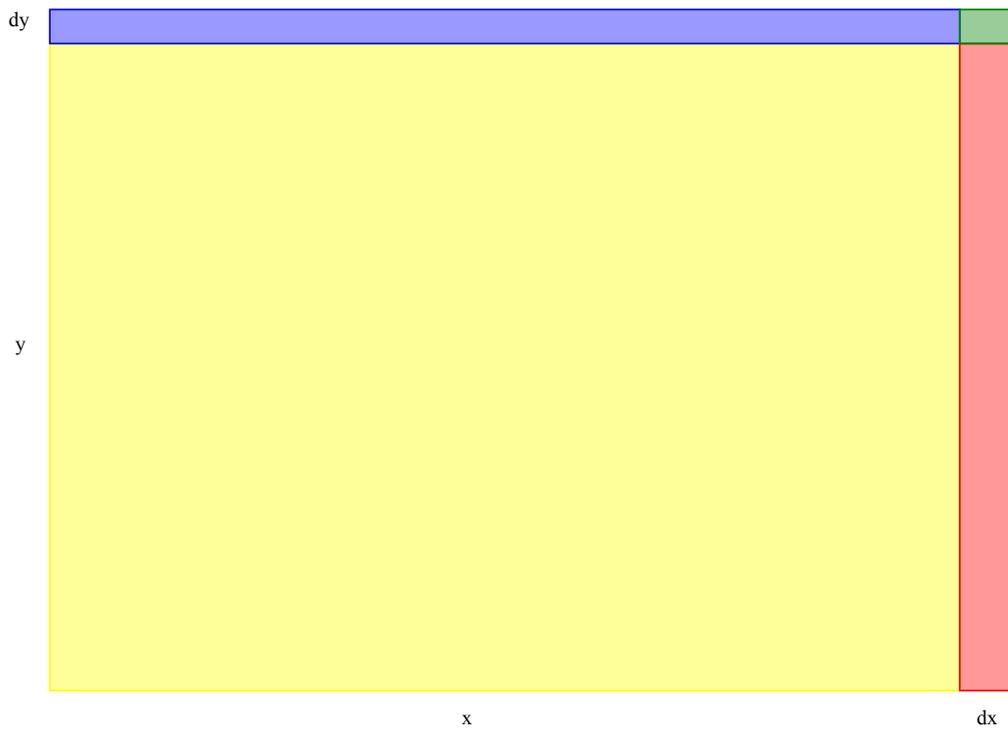
## 2) Dérivée d'une fonction composée

Selon Leibniz, si  $y=f(u(x))$  alors  $df/dx = df/du \times du/dx$  ou avec la notation de Lagrange  $f(u(x))'=f'(u) \times u'(x)$

## 3) Dérivée d'un produit

Avec quelle précision connaît-on l'aire de la table vue auparavant ? Elle est au moins égale à  $2,4m \times 1,8m = 4,32m^2$  et au plus égale à  $2,43m \times 1,82m = 4,4226m^2$ . Ce qui fait une incertitude de  $1026cm^2$ . Quel genre de calcul permet-il de trouver **0,1026** à partir de 0,03 et 0,02 ?

Ci-dessous une table de dimensions  $x+dx$  et  $y+dy$  a été dessinée :



La « différence » s'obtient en enlevant le rectangle jaune de dimensions  $x$  et  $y$  :



Si  $dx$  et  $dy$  sont infiniment petits, le rectangle vert d'aire  $dx \times dy$  est infiniment petit par rapport à eux, on peut donc l'enlever :



Le rectangle bleu a pour aire  $x \times dy$  et le rectangle rouge a pour aire  $y \times dx$ . Donc  $d(xy) = x \times dy + y \times dx$  :

## PROPOSITION II.

### Problème.

5. **P**RENDRE la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.

1°. La différence de  $xy$  est  $y dx + x dy$ . Car  $y$  devient  $y + dy$  lors que  $x$  devient  $x + dx$ , & partant  $xy$  devient alors  $xy + y dx + x dy + dx dy$  qui est le produit de  $x + dx$  par  $y + dy$ , & la différence sera  $y dx + x dy + dx dy$ , c'est-à-dire  $y dx + x dy$  : puisque  $dx dy$  est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes  $y dx$ , &  $x dy$ ; car si l'on divise par exemple  $y dx$  &  $dx dy$  par  $dx$ , on trouve d'une part  $y$ , & de l'autre  $dy$  qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.

Par exemple,  $2,4 \times 0,02 + 1,8 \times 0,03 = 0,048 + 0,054 = \mathbf{0,102}$  qui est proche des 0,1026 vus auparavant.

Comme  $d(u \times v) = u \times dv + v \times du$ , en divisant les deux membres de cette égalité par  $dx$ , on a  $d(u \times v)/dx = u \times dv/dx + v \times du/dx$  ou avec la notation de Lagrange,  $(u \times v)' = u \times v' + v \times u'$ .

Énoncée par Guillaume de l'Hospital, la règle devient

### R È G L E II.

*Pour les quantités multipliées.*

La différence du produit de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres, est égale à la somme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainsi la différence de  $ax$  est  $xo + adx$ , c'est-à-dire  $adx$ . Celle de  $a+x \cdot b-y$  est  $bdx - ydx - ady - xdy$ .

Par exemple  $d(ax) = x \times da + a \times dx = x \times 0 + a \times dx = a \times dx$  d'où par division par  $dt$ ,  $d(ax)/dt = a \times dx/dt$  soit avec la notation de Lagrange  $(ax)' = a \times x'$ .

## 4) Dérivée d'un inverse

On sait qu'une longueur est comprise entre 1,5625m et 1,6m (donc avec une précision de 0,0375). Avec quelle précision connaît-on son inverse ?

La longueur vaut au moins 1,5625m donc son inverse vaut au plus  $1/1,5625 = 0,64m^{-1}$ . Mais la longueur valant au plus 1,6m, son inverse vaut au minimum  $1/1,6 = 0,625m^{-1}$ . L'inverse de la longueur est donc compris entre  $0,625m^{-1}$  et  $0,64m^{-1}$ . On connaît donc l'inverse avec une précision de  $0,64m^{-1} - 0,625m^{-1} = 0,015m^{-1}$ .

Si une longueur est comprise entre  $x$  et  $x+dx$  alors son inverse est compris entre  $1/(x+dx)$  et  $1/x$ . Mais  $1/(x+dx) = (x-dx)/(x^2-dx^2) = (x-dx)/x^2$ . Donc  $d(1/x) = (x-dx)/x^2 - 1/x = (x-dx)/x^2 - x/x^2 = -dx/x^2$ .

Par exemple  $-0,0375/1,5625^2 = 0,01536m^{-1}$  qui est proche de la valeur  $0,015m^{-1}$ .

En divisant les deux membres par  $dx$  on obtient  $d(1/x)/dx = -1/x^2$  soit avec la notation de Lagrange,  $(1/x)' = -1/x^2$ .

$1/u$  est composée de  $u$  par la fonction inverse, donc la dérivée de  $1/u$  est  $d(1/u)/dx = d(1/u)/du \times du/dx = -1/u^2 \times du/dx$  soit avec la notation de Lagrange  $(1/u)' = -u'/u^2$ .

## 5) Dérivée d'un quotient

Il résulte de ce qui précède, que la dérivée de  $1/v$  est  $-v'/v^2$ . Or  $u/v$  est le produit de  $u$  par  $1/v$  donc, par dérivation d'un produit,  $(u/v)' = (u \times 1/v)' = u' \times 1/v + u \times (-v'/v^2) = u' \times v/v^2 - u \times v'/v^2 = (u' \times v - u \times v')/v^2$ .

Guillaume de l'Hospital propose une autre preuve de cette formule, directement à partir du produit : en posant  $z = u/v$  on a  $u = v \times z$  que l'on différentie :  $du = d(v \times z) = dv \times z + v \times dz$  d'où  $du - dv \times z = v \times dz$  et finalement  $dz = (du - dv \times z)/v = du/v - dv \times z/v = du/v - dv \times u/v/v = du/v - dv \times u/v^2 = du \times v/v^2 - dv \times u/v^2$

$dz = (du \times v - dv \times u)/v^2$  :

PROPOSITION III.

Problème.

6. **P**RENDRE la différence d'une fraction quelconque.

La différence de  $\frac{x}{y}$  est  $\frac{y dx - x dy}{yy}$ . Car supposant  $\frac{x}{y} = z$ , on aura  $x = y z$ , & comme ces deux quantitez variables  $x$  &  $y z$  doivent toujours être égales entr'elles, soit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'ensuit que leur différence, c'est-à-dire leurs accroissemens ou diminutions seront aussi égales entr'elles; & partant on aura  $dx = y dz + z dy$ , &  $dz = \frac{dx - z dy}{y} = \frac{y dx - x dy}{yy}$  en mettant pour  $z$  la valeur  $\frac{x}{y}$ . Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette regle.

En divisant les deux membres par dx on a  $d(u/v)/dx = (du/dx \times v - dv/dx \times u)/v^2$  ou avec la notation de Lagrange,  $(u/v)' = (u' \times v - u \times v')/v^2$ . La règle énoncée par Guillaume de l'Hospital est :

REGLÉ III.

*Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.*

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le carré du dénominateur.

Ainsi la différence de  $\frac{a}{x}$  fera  $-\frac{a dx}{x^2}$ , celle de  $\frac{x}{a+x}$  fera  $\frac{a dx}{(a+x)^2}$ .

Par exemple (a étant une constante) la dérivée de a/x est -a/x<sup>2</sup> et celle de x/(a+x) est a/(a<sup>2</sup>+2ax+x<sup>2</sup>).