

Probabilités conditionnelles

En 1763, à la *Royal Society* de Londres, Richard Price présentait un texte posthume de son ami le Révérend Thomas Bayes (1701-1761) sur des questions théologiques (Bayes était prêtre anglican) mais aussi sur l'analyse de la démarche scientifique. Bayes s'intéressait à l'idée de retrouver les causes à partir des effets, et notamment à la probabilité qu'une cause soit à l'œuvre sachant qu'on a observé un effet produit par cette cause :

P R O B L E M.

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: Required the chance that the probability of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named.

L'article de Bayes, titré *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*, est aussi à la base de travaux en psychologie, en neurologie et même en criminalité (à partir des indices relevés sur le lieu d'un crime, estimer la probabilité que Dexter soit le coupable).

// Vocabulaire des événements

On note Ω l'événement certain et $\emptyset$ l'événement impossible.

1) Incompatibilité

Deux événements A et B sont incompatibles¹ si $A \cap B = \emptyset$:

D E F I N I T I O N 1. Several events are *inconsistent*, when if one of them happens, none of the rest can.

Rappel : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ en général. Mais si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ donc la formule devient $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles. Ce que Bayes rappelle :

P R O P. 1.

When several events are inconsistent the probability of the happening of one or other of them is the sum of the probabilities of each of them.

1 Bayes écrit inconsistent mais en français on dit « incompatibles ».

2) Événements contraires

Si A et B sont incompatibles et qu'en plus $A \cup B = \Omega$ on dit qu'ils sont **contraires** l'un de l'autre :

2. Two events are *contrary* when one, or other of them must ; and both together cannot happen.

On note $\bar{A}$ le contraire de A. On remarque que $\bar{\emptyset} = \Omega$ (ou que $\bar{\Omega} = \emptyset$).

Comme deux événements contraires A et $\bar{A}$ sont incompatibles, on a $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Mais $A \cup \bar{A} = \Omega$ donc $P(A \cup \bar{A}) = 1$: **La probabilité du contraire de A est $1 - P(A)$.**

3) Succès et échec

Suivant l'exemple de Jakob Bernoulli, Bayes appelle **succès** un événement auquel il s'intéresse, et **échec** le contraire de cet événement :

3. An event is said to *fail*, when it cannot happen ; or, which comes to the same thing, when its contrary has happened.

II/ Probabilité d'un événement

1) Définition

La probabilité d'un événement est le quotient de sa mesure par celle de l'univers :

5. The *probability of any event* is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening.

La mesure en question peut être le nombre d'éventualités qui réalisent l'événement, comme dans la version donnée par Euler un peu après² Bayes :

la probabilité d'un événement quelconque est exprimée par une fraction, dont le numérateur est le nombre des cas où cet événement arrive, & le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles

(dans ce cas la probabilité est un quotient de deux entiers, c'est-à-dire une fraction), ou alors la mesure peut être une intégrale et dans ce cas on s'arrange pour que l'intégrale correspondant à Ω soit égale à 1 et on aura l'égalité entre probabilité et intégrale³.

2) Propriétés

$P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$. De manière générale $0 \leq P(A) \leq 1$: plus $P(A)$ est proche de 1, et plus A a de chances de se réaliser.

² Sur la probabilité des séquences dans la lotterie génoise paru en 1767

³ Axiomatique de Kolmogorov en 1930

On rappelle que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$: les conséquences sont plus probables que leurs causes.

3) Théorie des paris

Lorsqu'on joue à pile ou face (ou qu'on mise sur un cheval), en notant p la probabilité de succès et $q=1-p$ la probabilité d'échec, si on mise x € sur le succès, le pari sera équitable⁴ s'il rapporte y € tel que $-x \times q + y \times p = 0$. Mais l'équation⁵ s'écrit aussi $y \times p = x \times q$ ou $x/y = p/q$:

P R O P. 2.
If a person has an expectation depending on the happening of an event, the probability of the event is to the probability of its failure as his loss if it fails to his gain if it happens.

Par exemple si un cheval est donné à 5 contre 3 on estime que la probabilité qu'il gagne est p tel que $p/(1-p) = 5/3$ soit $3 \times p = 5 \times (1-p)$ ou $3 \times p = 5 - 5 \times p$ ou $3 \times p + 5 \times p = 5$ soit $8 \times p = 5$: on estime que la probabilité que ce cheval gagne est $5 \div 8 = 0,625$.

III/ Probabilités conditionnelles

1) Définition

On considère un événement A de probabilité non nulle, appelé événement conditionnant. Alors la fonction qui, à un événement B , associe $P(A \cap B)/P(B)$ est une probabilité notée P_A et prononcée *probabilité sachant que A* :

P R O P. 3.
The probability that two subsequent events will both happen is a ratio compounded of the probability of the 1st, and the probability of the 2d on supposition the 1st happens.

Ci-dessus Bayes écrit que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ ce qui revient au même que $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$

2) Changement d'univers

Cela revient en fait à remplacer Ω par A :

Corollary. Hence if of two subsequent events the probability of the 1st be $\frac{a}{N}$, and the probability of both together be $\frac{P}{N}$, then the probability of the 2d on supposition the 1st happens is $\frac{P}{a}$.

Par exemple dans un jeu de 52 cartes, la probabilité de tirer⁶ la dame de carreau est $1/52$ et la

⁴ Jeu de mots : équitation/équitable...

⁵ Jeu de mots : équitation/équation...

⁶ Non, pas de jeu de mot ici !

probabilité de tirer une dame est $4/52=1/13$. La probabilité de tirer la dame de carreau sachant qu'on a tiré une dame est $(1/52) \div (4/52) = 1/4 = 0,25$.

3) Raisonnement bayésien

Par définition, $P_B(A) = P(A \cap B) / P(B)$ mais comme $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, on a $P_B(A) = P(A) \times P_A(B) / P(B)$:

P R O P. 5.

If there be two subsequent events, the probability of the 2d $\frac{b}{N}$ and the probability of both together $\frac{P}{N}$, and it being 1st discovered that the 2d event has happened, from hence I guess that the 1st event has also happened, the probability I am in the right is $\frac{P}{b}$.

Le fait d'avoir reçu une information (la réalisation de B) modifie la probabilité de A, qui est remplacée par la probabilité de A sachant B, c'est-à-dire multipliée par le nombre $P_A(B)/P(B)$ appelé *rapport de vraisemblance*.

IV/ Indépendance entre événements

1) Définition 1

On dit que B ne dépend pas de A si $P_A(B) = P(B)$:

7. Events are independent when the happening of any one of them does neither increase nor abate the probability of the rest.

Cette définition n'a pas de sens si $P(A) = 0 \dots$

Dire que $P_A(B) = P(B)$, c'est dire que $P(A \cap B) / P(A) = P(B)$ soit (par multiplication des deux membres par $P(A)$, qui est non nulle) que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$:

P R O P. 6.

The probability that several independent events shall all happen is a ratio compounded of the probabilities of each.

2) Définition 2

On dit que A et B sont **indépendants** l'un de l'autre si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Cette définition s'applique aussi au cas où $P(A) = 0$, d'ailleurs $\emptyset$ est indépendant de tout événement : $P(\emptyset \cap B) = P(\emptyset) = 0$ et $0 \times P(B) = 0$ aussi.