

Construction du nombre par John Conway

1. Entiers et fractions

Alain Busser
IREMI 974

18 avril 2022



1.1 Règle du jeu

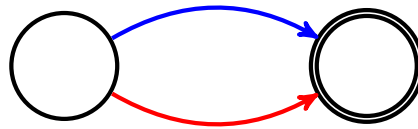
1.1.1 Mouvements du pion

On joue avec un pion sur un graphe orienté dont les arcs sont rouges ou bleus. Les joueurs s'appellent Bleu et Rouge. Chacun son tour déplace le pion en suivant un arc du graphe orienté, mais

- Bleu n'a pas le droit de glisser le pion le long d'un arc rouge.
- Rouge n'a pas le droit de glisser le pion le long d'un arc bleu.
- Les arcs sont à sens unique (montré par la flèche) et il est interdit de remonter un arc dans le sens inverse de la flèche.

Autrement dit, Rouge peut glisser le pion le long d'un arc rouge, et Bleu peut glisser le pion le long d'un arc bleu.

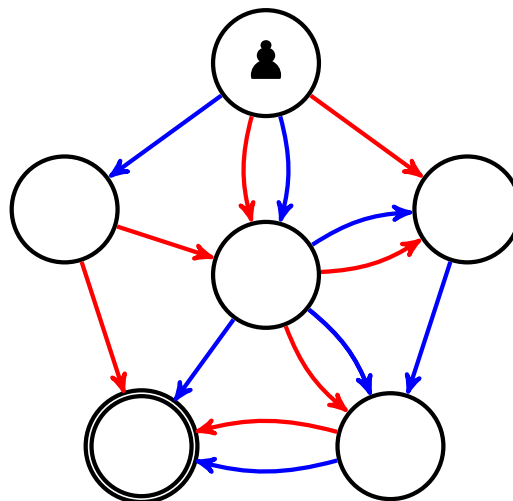
Un sommet peut très bien être accessible aux deux joueurs :



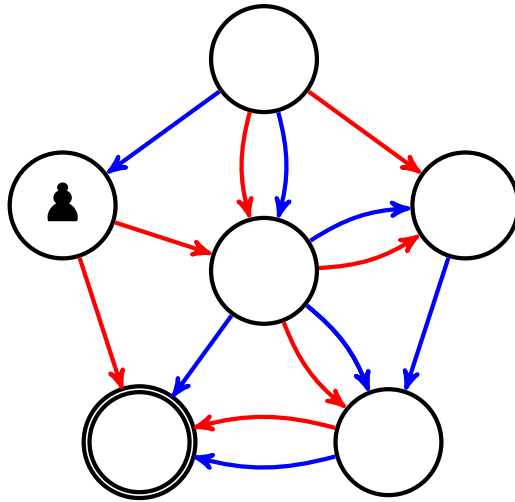
1.1.2 Fin de la partie

Lorsque le joueur dont c'est le tour ne peut plus bouger le pion (parce que celui-ci est sur un sommet dont ne part aucun arc bleu alors que c'est à Bleu de jouer, ou sur un sommet dont ne part aucun arc rouge alors que c'est à Rouge de jouer), ce joueur a perdu. Le jeu s'arrête donc dès que le pion ne peut plus bouger. Typiquement cela arrive lorsque le pion est sur un sommet dont ne part aucun arc.

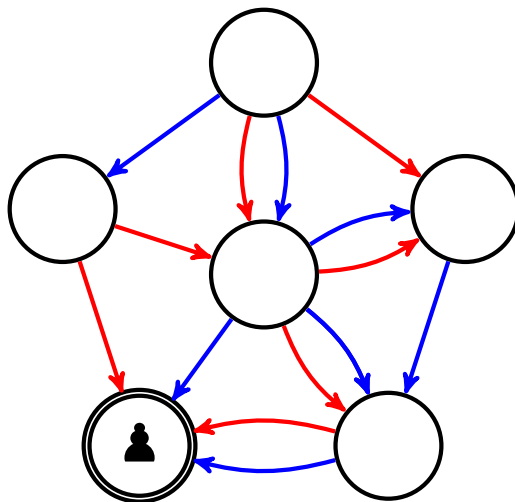
1.1.3 Exemple



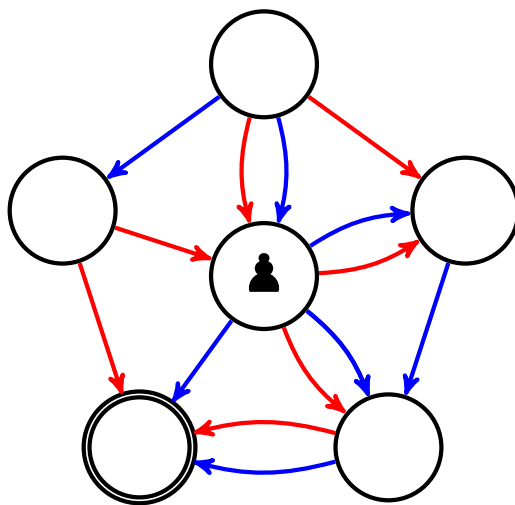
C'est à Bleu de jouer. Comme l'arc de droite est rouge, Bleu ne peut pas jouer cet arc. Bleu ne peut jouer que l'arc bleu de gauche ou celui du centre. Mais si Bleu joue l'arc bleu à gauche



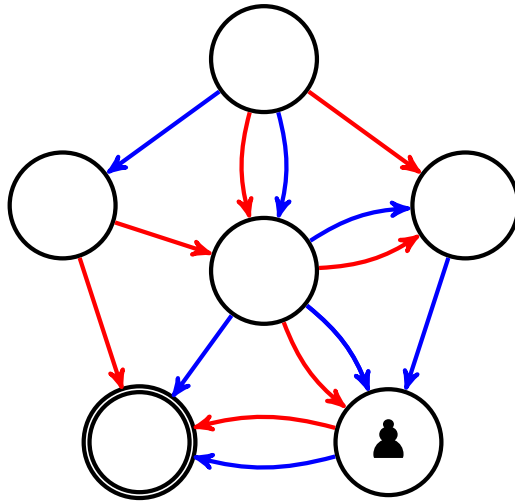
Rouge gagne juste après :



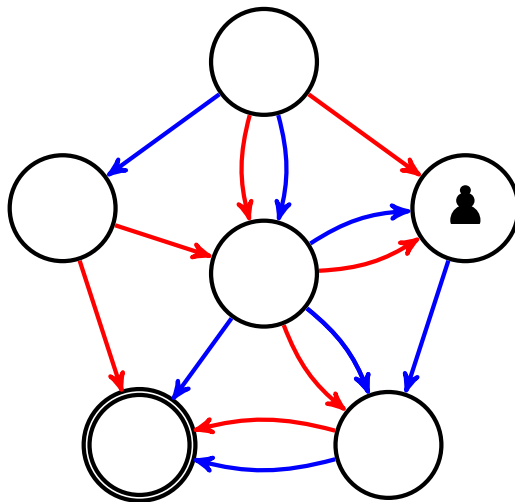
Bleu a donc tout intérêt à jouer l'arc bleu au centre :



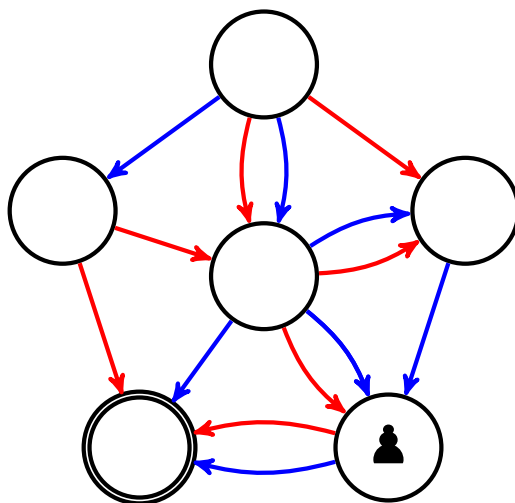
C'est au tour de Rouge de jouer. Elle doit jouer un des deux arcs rouges partant de ce sommet. Pas celui du bas :



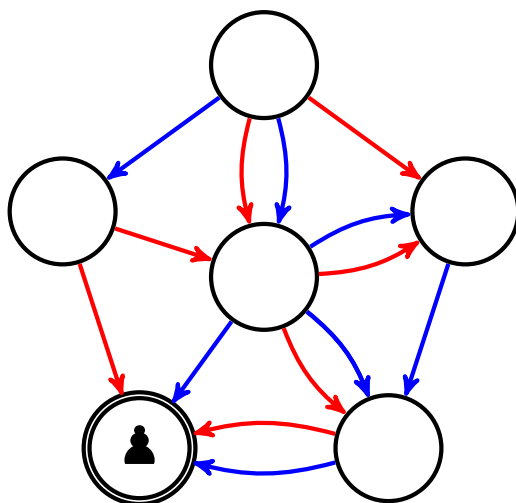
parce que dans ce cas, Bleu gagnerait au prochain coup. Elle choisit donc l'autre arc rouge :



C'est à Bleu de jouer maintenant. Il joue le seul arc qu'il peut jouer, qui est justement bleu :



C'est au tour de Rouge de jouer. Elle ne peut alors que glisser le pion sur le seul arc rouge qui sort de ce sommet :



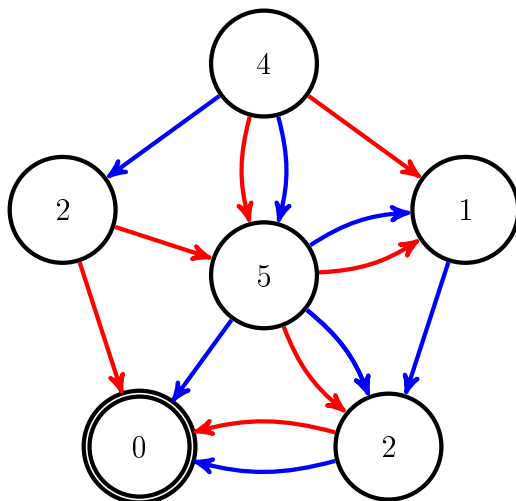
Le pion ne peut plus bouger (il n'y a aucun arc qui part de ce sommet) donc Rouge, qui a effectué le dernier mouvement, a gagné ce jeu. La question est de savoir combien elle a gagné. Pour préciser cela, on introduit des nombres.

1.2 Nombres entiers

On adopte (comme le faisait Conway) le point de vue de Bleu.

1.2.1 Graphes orientés

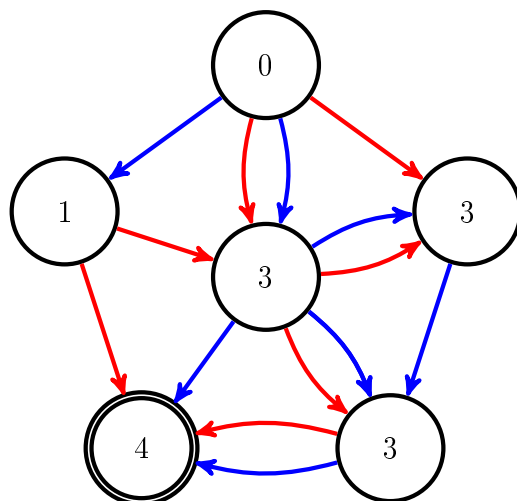
On appelle *degré sortant* d'un sommet, le nombre d'arcs qui émanent de ce sommet. Les degrés sortants du graphe de l'exemple précédent sont :



On remarque que le sommet de degré sortant 0 est marqué d'un double trait circulaire. Cette convention¹ sera utilisée dans tout l'article même s'il y a plusieurs tels sommets.

On appelle *degré entrant* d'un sommet, le nombre d'arcs qui arrivent à ce sommet. Les degrés entrants du graphe précédent sont :

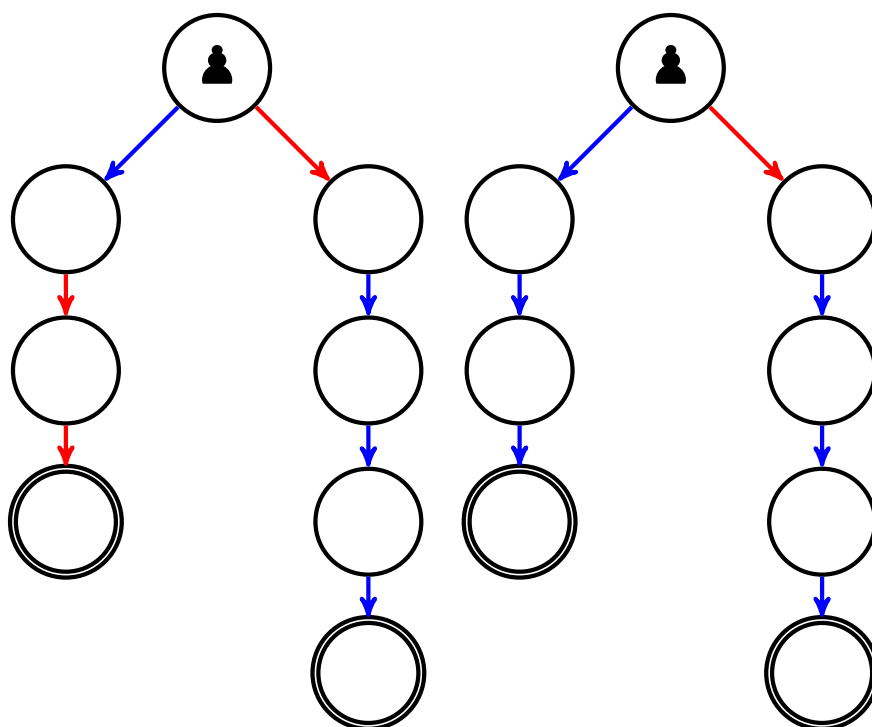
1. Proposée par Ivan Riou de l'IREM de Mayotte



Un sommet de degré sortant nul est un *puits* (ou une *arrivée*). Un sommet de degré entrant nul est une *source* (ou *départ*). Pour un jeu combinatoire on n'a qu'un seul départ, c'est là où on pose le pion avant de jouer. Par contre on peut avoir plusieurs arrivées. Une stratégie gagnante peut alors consister à guider le pion vers une arrivée gagnante.

1.3 La construction de Conway

Les premiers jeux définis par Conway ressemblent à ceci :



Les deux jeux ci-dessus sont des nombres (respectivement 0 et 2,5), mais certains jeux de ce genre ne sont pas des nombres.

Voici comment Conway construit les nombres, dans l'ordre de complexité croissante.

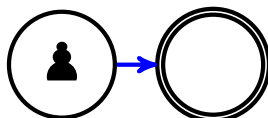
1.3.1 Le nombre zéro



Le jeu le plus simple est le nombre 0 (le prochain qui joue a perdu). C'est juste et c'est un jeu juste car il est équitable.

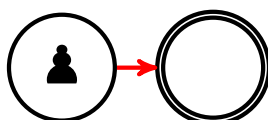
1.3.2 Le nombre un

Ce jeu vaut 1 :



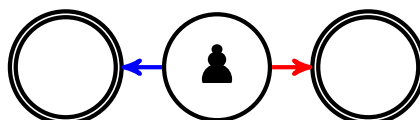
1.3.3 Le nombre -1

Ce jeu vaut -1 :



L'opposé d'un nombre est ce qu'on obtient en intervertissant les rôles des deux joueurs. Ainsi, le jeu -1 est à l'avantage de Rouge comme le jeu 1 est à l'avantage de Bleu.

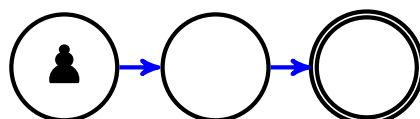
Ce jeu n'est pas un nombre :



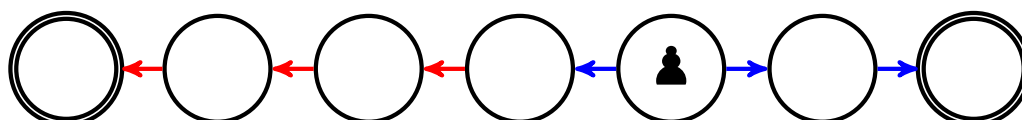
Conway l'appelle *étoile* et c'est un jeu plutôt équitable puisque le prochain joueur, quelle que soit sa couleur, gagne ce jeu. Mais beaucoup de jeux sont des nombres, par exemple

1.3.4 Le nombre 2

Ce jeu vaut 2 :

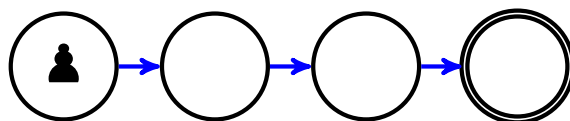


Comme Bleu est censé jouer au mieux de ses intérêts, ce jeu aussi vaut 2 :



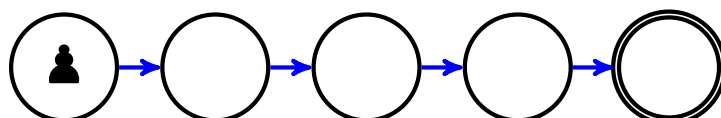
1.3.5 Le nombre 3

Ce jeu vaut 3 :

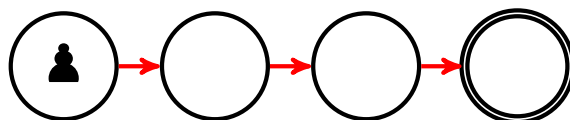


1.3.6 Le nombre 4

Ce jeu vaut 4 :

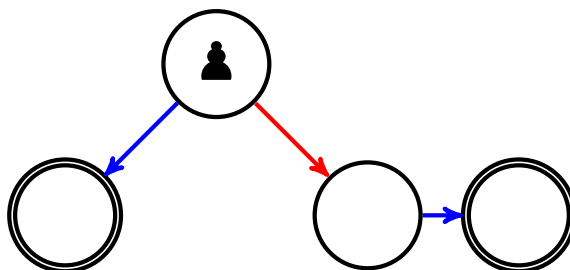


Tous les entiers (positifs ou négatifs) peuvent être représentés par des jeux, par exemple l'entier -3 :

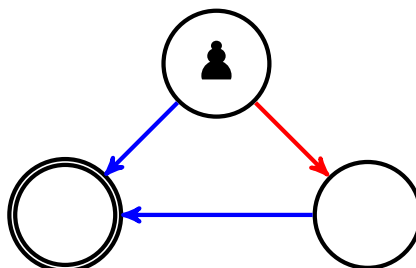


1.3.7 Des fractions

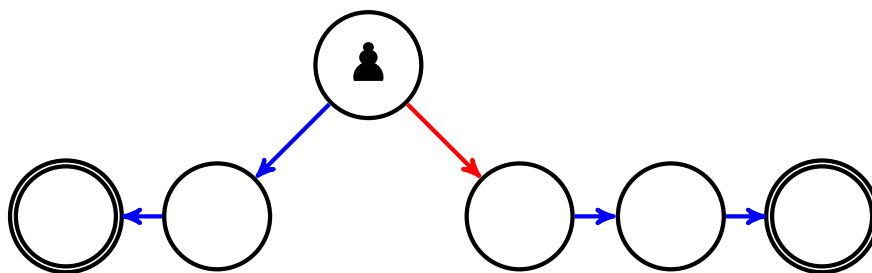
Le nombre *un demi* (pour comprendre d'où vient cette valeur, voir plus bas l'addition) :



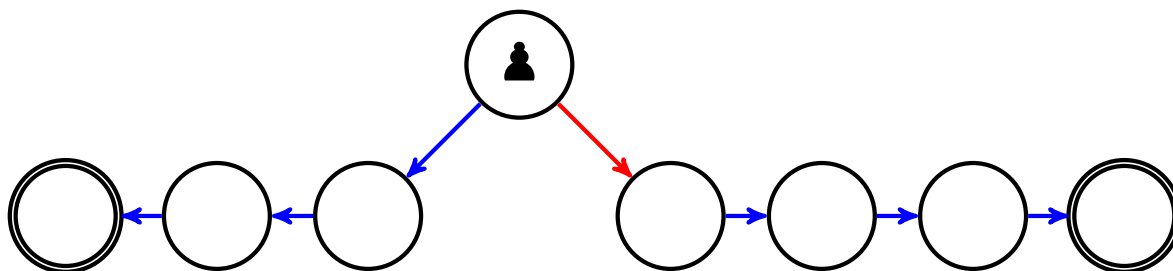
ou alors cette variante :



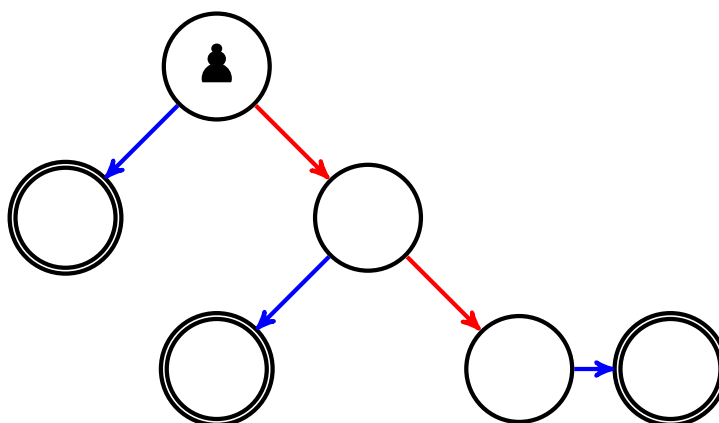
Le nombre *un et demie* :



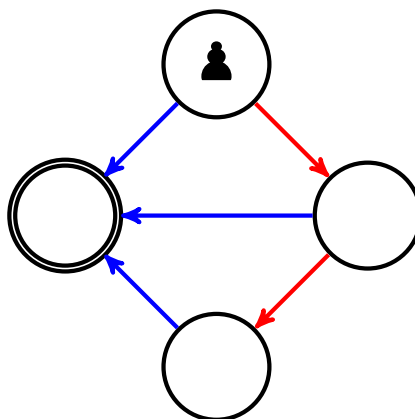
Le nombre *deux et demie* :



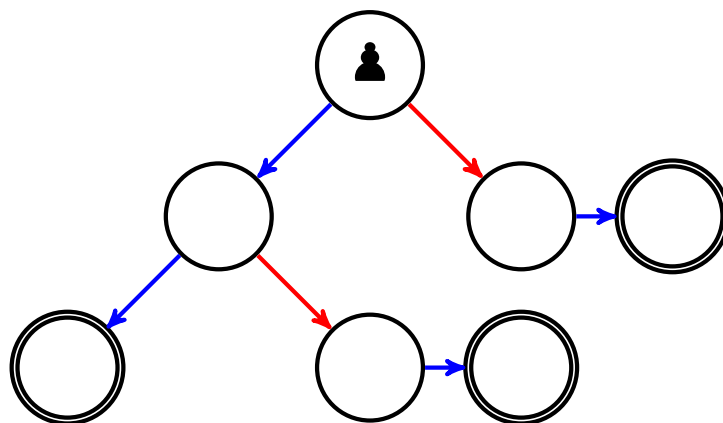
Le nombre *un quart* :



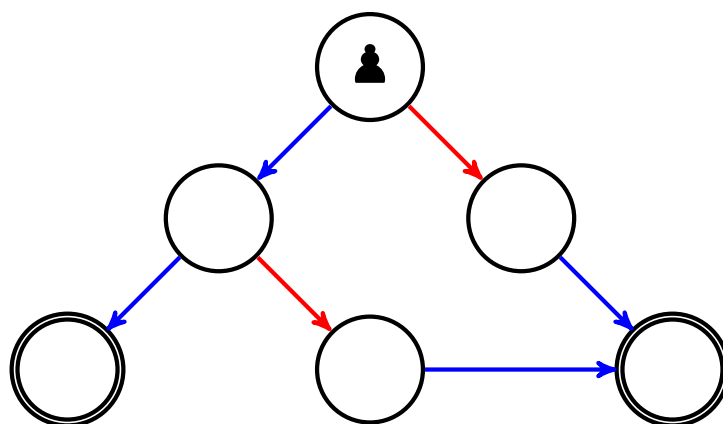
ou cette variante :



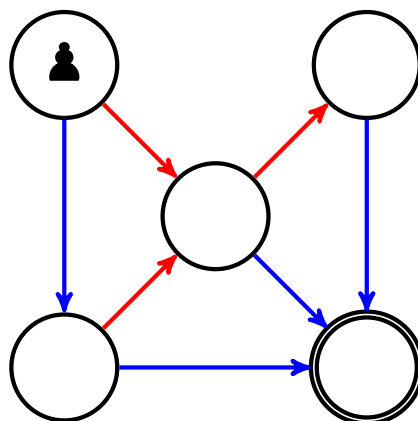
Le nombre *trois quarts* :



ou encore :



Le nombre *trois huitièmes* :

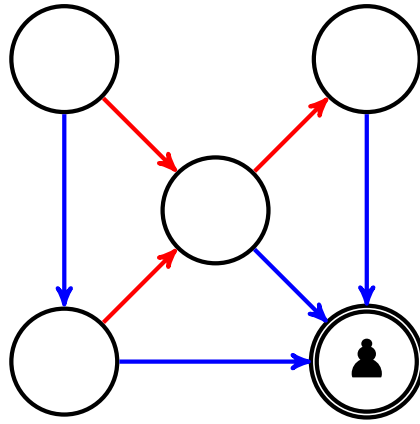


Les informaticiens s'intéressent à la construction des nombres par Conway parce que, comme on le voit sur les exemples ci-dessus, les nombres qu'on peut représenter par des graphes finis sont les *fractions dyadiques* c'est-à-dire les fractions dont le dénominateur est 2, 4, 8, 16 etc.

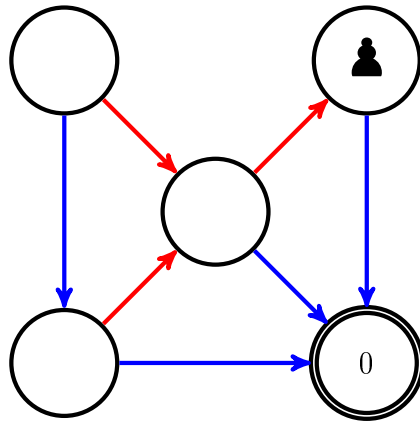
1.4 Addition

1.4.1 Calcul du départ

Pour montrer que le jeu ci-dessus est $\frac{3}{8}$ on commence par calculer l'arrivée :

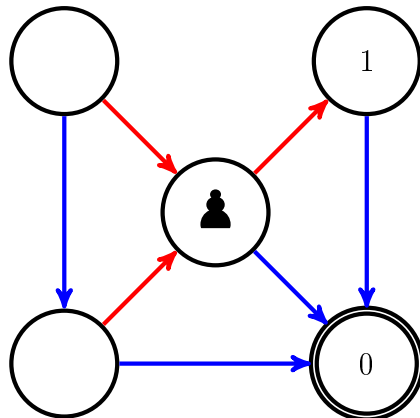


Comme aucun arc n'émane de l'arrivée, le jeu formé par l'arrivée seule est égal à 0 (le prochain joueur perd ce jeu). Ce qui permet de vérifier que le jeu ci-dessous est égal à 1 :

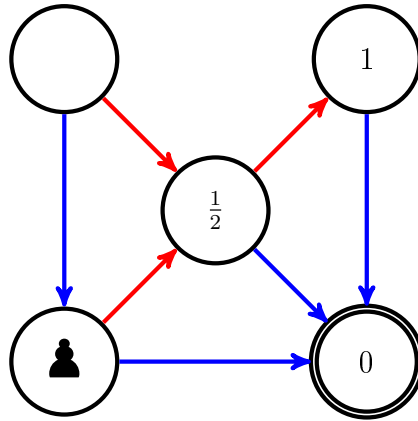


En effet, comme le pion ne peut pas remonter les flèches, c'est comme s'il n'y avait que les deux sommets à droite, et on y reconnaît le nombre 1 tel qu'il est défini.

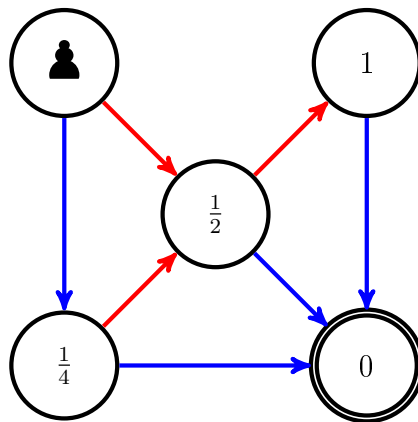
Mais du coup on reconnaît le nombre 0,5 au centre du graphe, puisque Bleu va vers un sommet vide et Rouge va vers un sommet de valeur 1 :



Ce qui permet alors de calculer ce jeu (qui est un graphe à 4 sommets) :



En effet on voit que Bleu a accès à zéro alors que Rouge a accès à 0,5 : on reconnaît la définition de 0,25 :

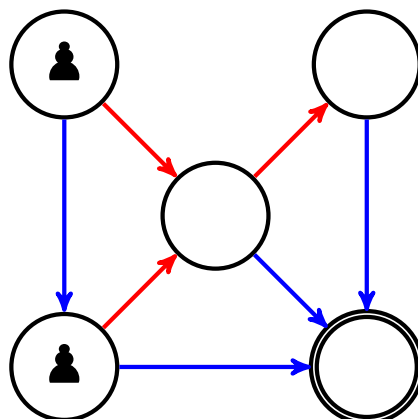


L'issue de Bleu est $\frac{1}{4}$ et l'issue de Rouge est $\frac{1}{2}$ donc la valeur du jeu (nombre le plus simple possible entre 0,5 et 0,25) est bien $0,375 = \frac{3}{8}$.

Ainsi, si un jeu est un nombre, c'est souvent parce que les jeux obtenus en plaçant le pion ailleurs qu'au départ avant de jouer sont aussi des nombres. On peut alors voir chaque sommet du graphe comme un nombre (celui du jeu qu'on obtiendrait en enlevant les sommets qui sont avant ce sommet). C'est de cette constatation que vient la notion de somme de jeux.

1.4.2 Addition des jeux

On additionne des nombres (et plus généralement des jeux) en plaçant plusieurs pions sur le graphe. Par exemple ce jeu

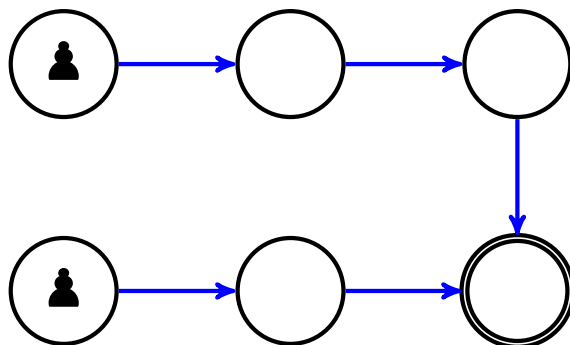


est égal à 0,625 : un pion est sur le départ de valeur 0,375 et l'autre est sur un sommet de valeur 0,25 et $0,375 + 0,25 = 0,625$.

Ce jeu est terminé lorsque les deux pions sont à l'arrivée.

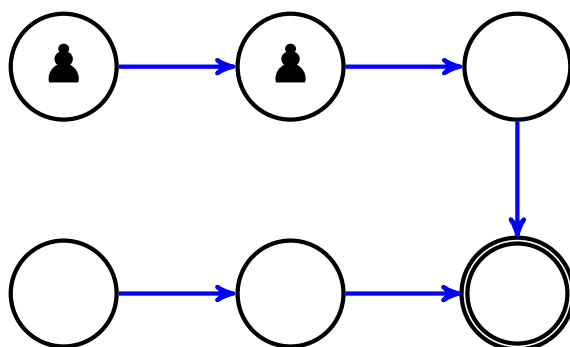
1.4.3 Addition des entiers naturels

Ce jeu, de valeur 5, illustre que $3+2=5$:

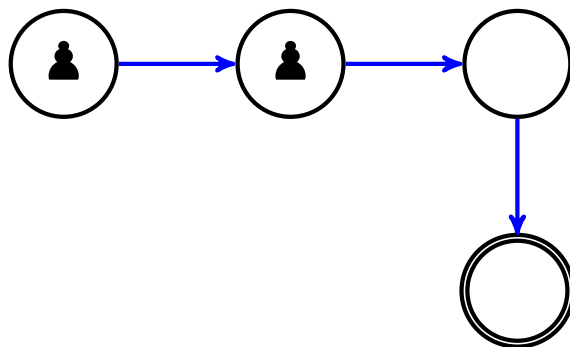


Le pion du haut peut bouger 3 fois sur des arcs bleus et le pion du bas peut jouer 2 fois sur des arcs bleus, donc ils représentent des jeux de valeurs respectives 3 et 2. Et Bleu peut au total avancer 5 fois le pion tandis que Rouge s'ennuie à le regarder avancer ce pion.

Le jeu ci-dessus est le même que celui-ci :

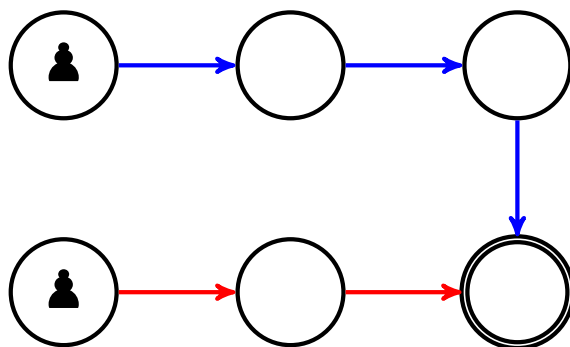


ou celui-ci :



1.4.4 Addition des entiers relatifs

Ce jeu, de valeur 1, illustre que $3+(-2)=1$:



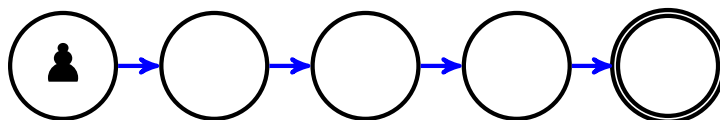
En effet Bleu peut avancer le pion du haut 3 fois de suite alors que Rouge ne peut avancer le pion du bas que 2 fois. Donc Bleu qui peut continuer à jouer plus longtemps, gagne ce jeu, qu'il joue en premier ou en second.

Remarques :

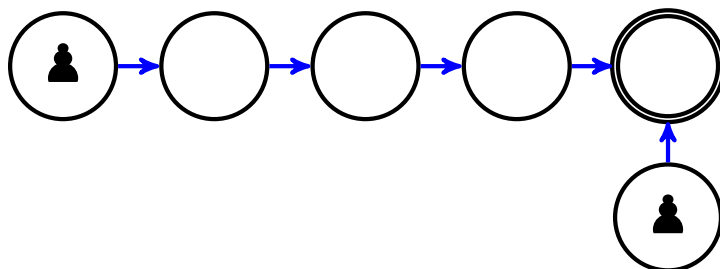
- Beaucoup d'enfants croient au contraire que c'est Rouge qui gagne ce jeu (à la course). Il faut leur expliquer que ce genre de jeu n'est pas similaire au jeu de l'oie (où celui qui va plus vite, va plus loin, ce qui n'est pas le cas ici).
- L'addition $3+(-2)$ ci-dessus revient à la soustraction $3-2$. Conway modélise donc également la soustraction des entiers (et de tous les jeux possédant un opposé).

1.4.5 Incrémentation et décrémentation

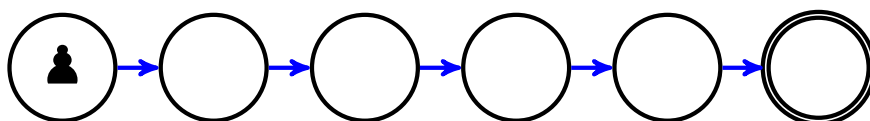
On peut voir la construction qui, à partir d'un entier, donne l'entier suivant. On passe d'un entier à son successeur en additionnant 1. Pour le successeur de 4 :



on a :

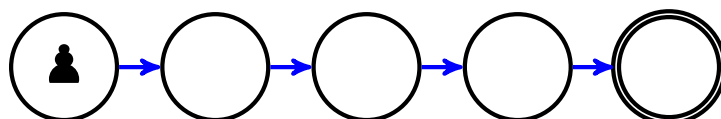


ou

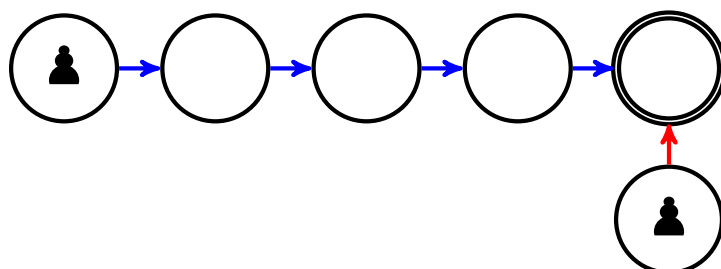


obtenu en déplaçant le nouvel arc bleu à l'autre bout et en enlevant le pion supplémentaire, puis replaçant l'ancien pion tout à gauche (déplacement vers la gauche d'un cran).

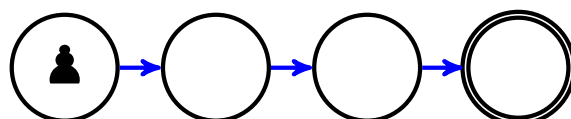
Cette construction fonctionne avec tout entier naturel, y compris 0 : elle donne immédiatement que le successeur de 0 est 1. Par contre avec un nombre négatif il faut neutraliser l'un des arcs rouges par l'arc bleu qu'on vient de rajouter. De même, pour obtenir le prédécesseur d'un entier naturel, on neutralise un des arcs bleus par l'arc rouge. Par exemple pour construire le prédécesseur de 4 :



on a



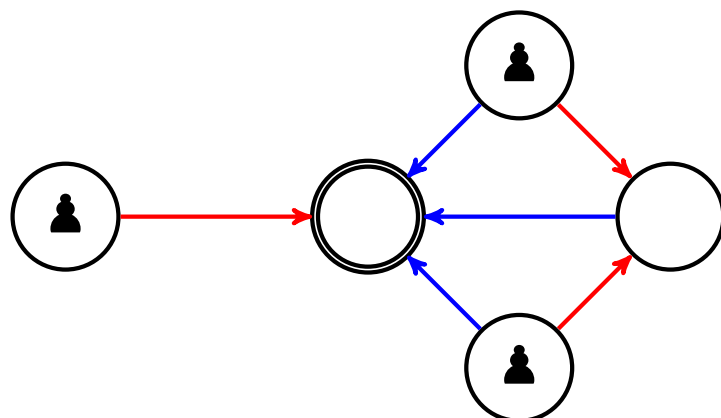
L'arc rouge neutralise l'arc bleu de gauche, avec suppression du nouveau pion et déplacement de l'ancien vers la droite :



Cette construction donne que le prédécesseur de 1 est 0 et que le prédécesseur de 0 est -1.

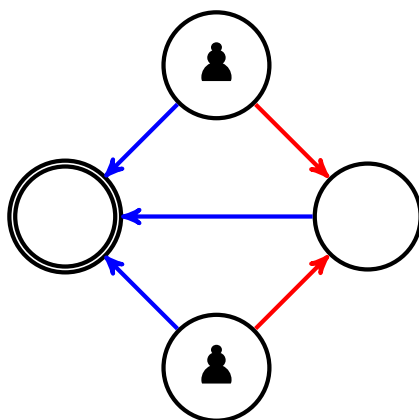
1.4.6 Addition des fractions

Ce jeu est le nombre zéro :

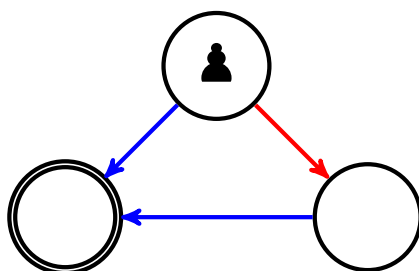


En effet il est facile de voir que si Bleu commence, Rouge gagne et si Rouge commence, Bleu gagne.

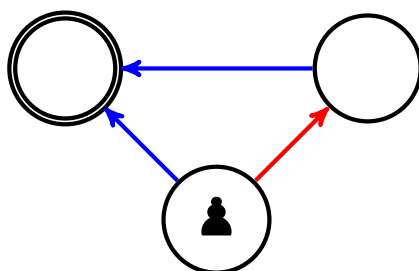
Mais le jeu ci-dessus est la somme de -1 (à gauche) et du jeu



Puisqu'en soustrayant 1 au jeu ci-dessus, on a zéro, cela signifie que le jeu ci-dessus est égal à 1. Mais il est lui-même la somme de



et



qui valent chacun 0,5. Ce qui veut dire que $0,5+0,5=1$ (ou plutôt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$).

Construction du nombre par John Conway

2. Nimbers et infinitésimaux

Alain Busser
IREMI 974

18 avril 2022

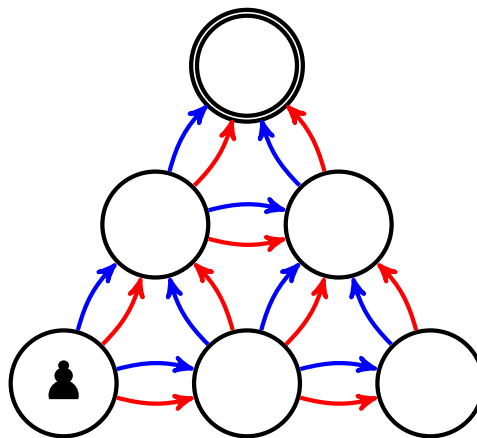


2.1 Jeux de Nim

2.1.1 Définition

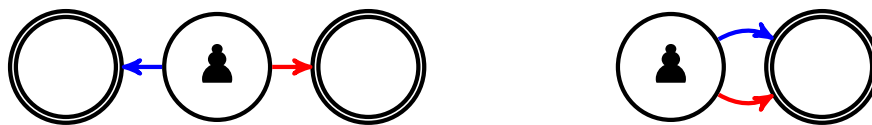
Un jeu est dit *de Nim* (Conway disait *impartial*) lorsque chaque arc bleu est accompagné d'un arc rouge (dans le même sens) et *vice versa*, chaque arc rouge est accompagné d'un arc bleu dans le même sens.

Cela signifie que Rouge et Bleu peuvent faire les mêmes mouvements. Ce n'est pas le cas des jeux combinatoires les plus classiques (échecs, go, dames, hex etc) où les pièces de jeux sont en deux couleurs, chaque joueur ne manipulant que les pièces de sa couleur. Ce n'est pas non plus le cas des jeux de semailles puisque chaque joueur sème dans son camp. L'exemple typique est le jeu où il faut prélever des pièces d'un tas de pièces (autant qu'on veut mais d'un seul tas). Par exemple voici le graphe du jeu de Nim à deux tas de 2 pièces :



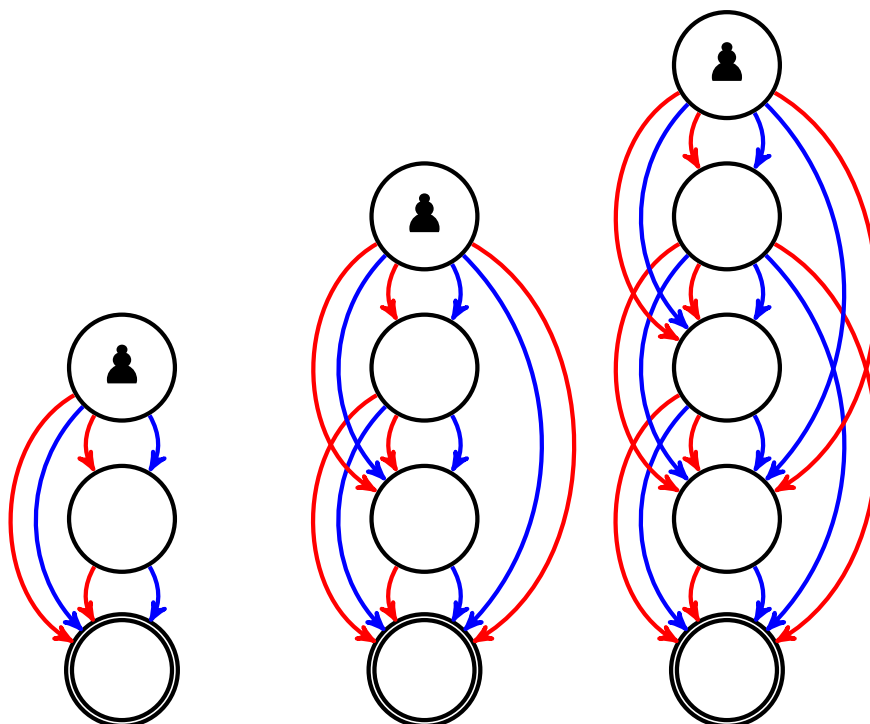
2.1.2 Tas de pièces

On a déjà vu l'étoile qui est un jeu de Nim à un tas, d'une seule pièce. On peut la simplifier ainsi :



Autrement dit, le graphique ci-dessus représente 2 tas d'une pièce au jeu de Nim. Chacun de ces tas est l'étoile. En fait le tout (les deux tas) est le jeu 0, comme on le verra plus bas.

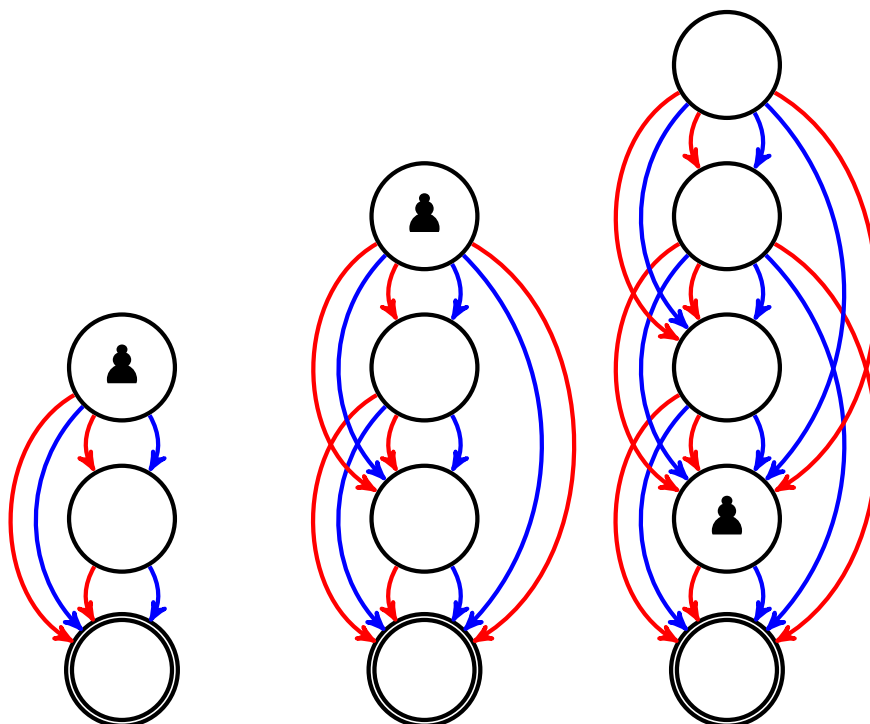
Voici des tas de respectivement 2, 3 et 4 pièces :



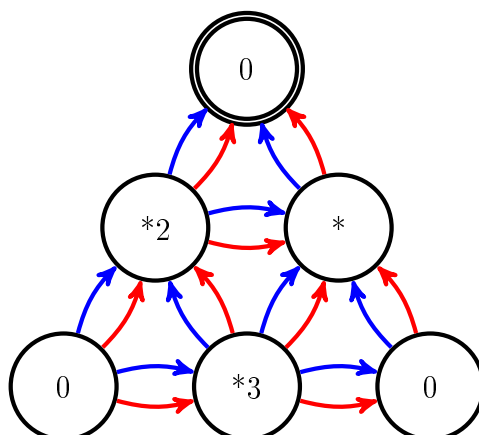
Conway note respectivement $*2$, $*3$ et $*4$ ces tas de pièces.

2.1.3 Nim-addition

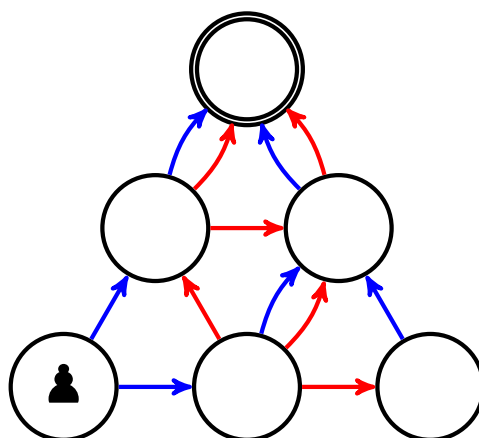
Les jeux $*$, $*2$, $*3$, $*4$ etc ne sont pas des nombres mais on peut les additionner. C'est pour analyser le jeu de Nim (et la nim-addition, décrite par Charles Bouton au début du XX^e siècle) que Patrick Grundy a inventé dans les années 1930, la notion de somme de jeux. Par exemple le graphique ci-dessus peut être vu comme un jeu de Nim à trois tas de 2, 3 et 4 pièces respectivement, ou comme la somme $*2 + *3 + *4 = *5$. Le coup gagnant (pour celui qui joue en premier) consiste à annuler la nim-somme, c'est



L'addition des nombres de Nim permet de calculer la valeur du jeu qui ouvre cette section :



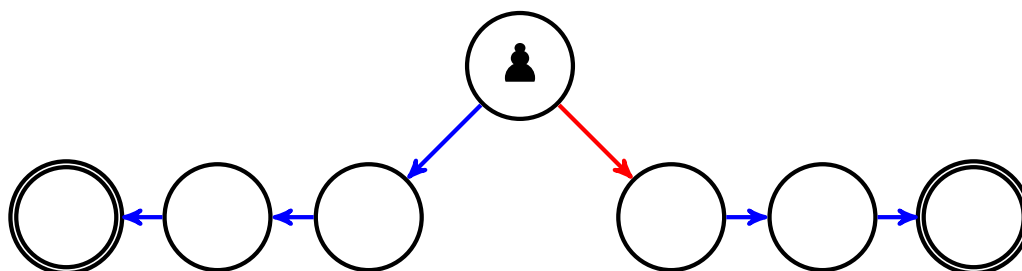
En fait le jeu ci-dessous aussi est 0 :



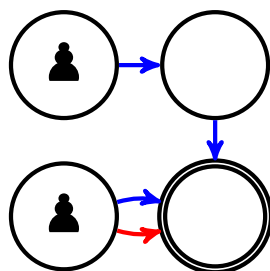
On rappelle que ceci signifie que le deuxième joueur, quelle que soit sa couleur, dispose d'une stratégie gagnante. Mais pour le montrer il faut faire intervenir des jeux qui ne sont ni des nombres, ni des nombres de Nim.

2.1.4 Addition de jeux des deux sortes

On peut se demander pourquoi Conway écrit $*3$ pour un tas de 3 pièces, et pas 3^* (après tout il y a 3 pièces et chaque pièce vaut une étoile). C'est que, d'une part, $*2$ n'est pas la somme $*+*$ (cette somme vaut 0), d'autre part, la notation 2^* est réservée à un autre jeu :



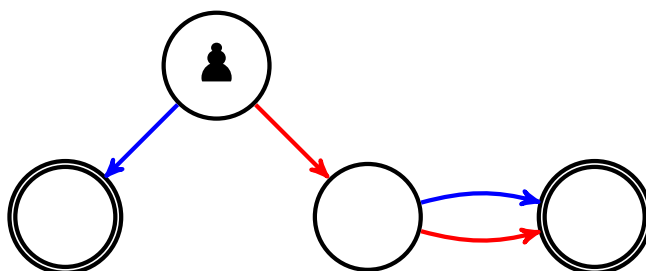
Ce jeu n'est ni un nombre, ni un nombre de Nim, mais la somme d'un nombre (2; les deux arcs bleus) et d'un nombre de Nim (l'étoile : l'arc double bleu-rouge) :



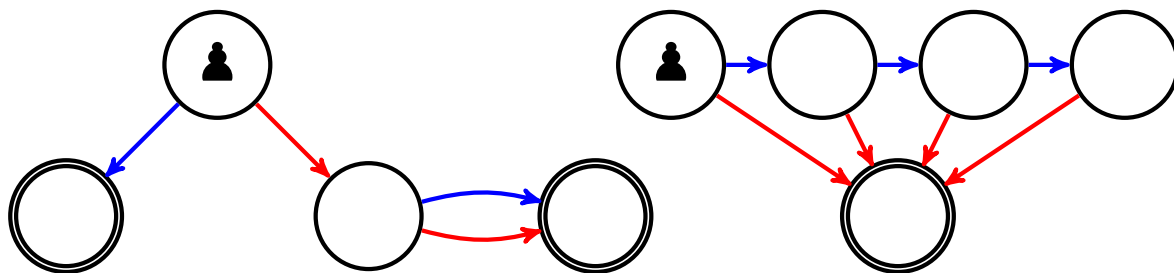
2.2 Infinitésimaux

2.2.1 Haut

Ce jeu est appelé *up* (haut ; noté $\uparrow$) par Conway :



Si c'est à Bleu de jouer, il gagne (il arrive à 0 qui fait perdre Rouge). Si c'est à Rouge de jouer, elle perd (elle arrive à l'étoile qui fait gagner Bleu). C'est donc toujours Bleu qui gagne. Ce jeu est donc positif. Mais si on lui soustrait n'importe quel nombre, c'est Rouge qui gagne. Par exemple si on additionne $-\frac{1}{8}$ à ce jeu :



Le résultat est à l'avantage de Rouge (que Bleu commence ou que Rouge commence). Et c'est pareil si on ajoute un jeu qui est faiblement à l'avantage de Rouge comme $-\frac{1}{2048}$. Le jeu $\uparrow$ est donc à la fois

- plus grand que 0 (puisque Bleu gagne)
- plus petit que $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2048}$ et que toute fraction positive.

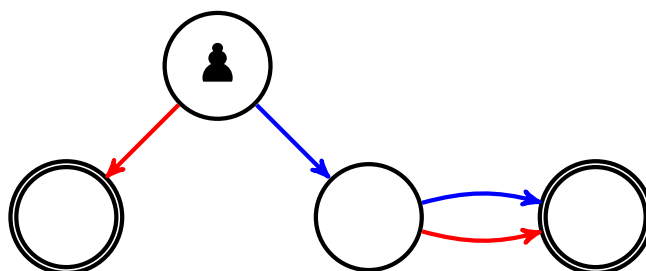
Ce n'est donc pas une fraction (il est même plus petit que $\frac{1}{2^\infty}$) mais c'est une sorte de nombre puisqu'on peut le comparer à des nombres et même l'additionner avec des nombres.

D'ailleurs $\uparrow + \uparrow = \uparrow 2$ alors que $2 + \uparrow = 2 \uparrow$ dans la notation de Conway.

En fait du point de vue des calculs, $\uparrow$ se comporte comme le 1 des entiers naturels. Par exemple $\uparrow 5 + \uparrow 3 = \uparrow 8$ (alors que $*5 + *3 = *6$). Et il y a même un opposé de $\uparrow$.

2.2.2 Bas

Le jeu obtenu en inversant les couleurs, à partir de $\uparrow$, est noté $\downarrow$ et s'appelle *down* (bas) :

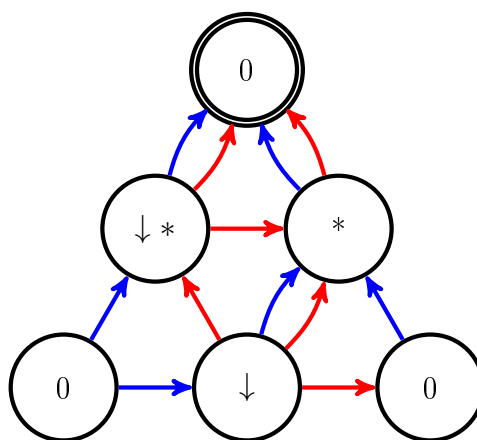


En fait $\downarrow$ est l'opposé $- \uparrow$ de $\uparrow$. Par exemple $\downarrow$ est négatif (c'est Rouge qui gagne, de toute façon) et $\uparrow + \downarrow = 0$.

Donc $2 \downarrow$ est très (infiniment) proche de 2 mais en étant inférieur à 2, alors que $2 \uparrow$ est aussi infiniment proche de 2, mais en étant supérieur à 2. Au fait $\downarrow$ est plus petit que $\uparrow$ bien qu'ils soient infiniment proches l'un de l'autre.

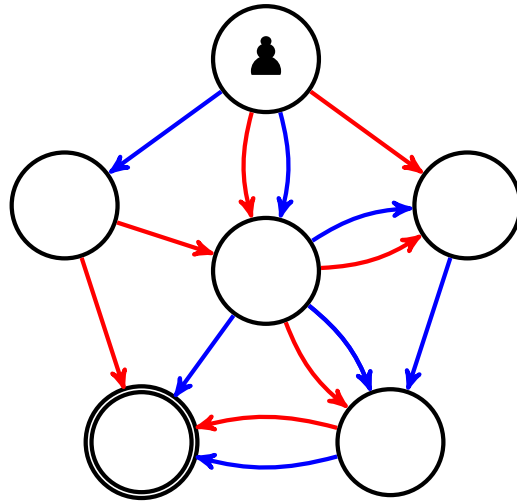
2.2.3 Calculs de jeux

Les hauts et les bas (ainsi que les étoiles) permettent de calculer de proche en proche les valeurs des sommets de ce jeu :

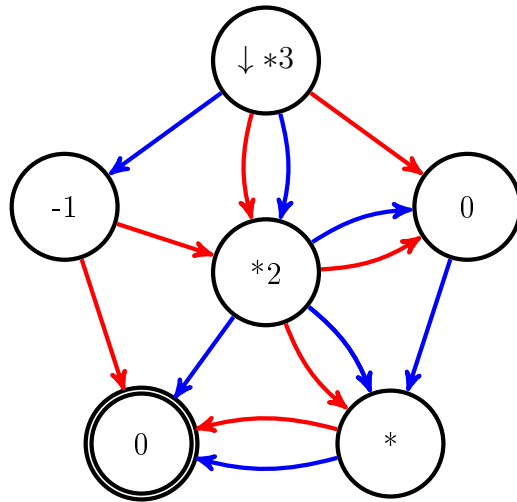


La notation $\downarrow *$ désigne la somme de $\downarrow$ et de l'étoile.

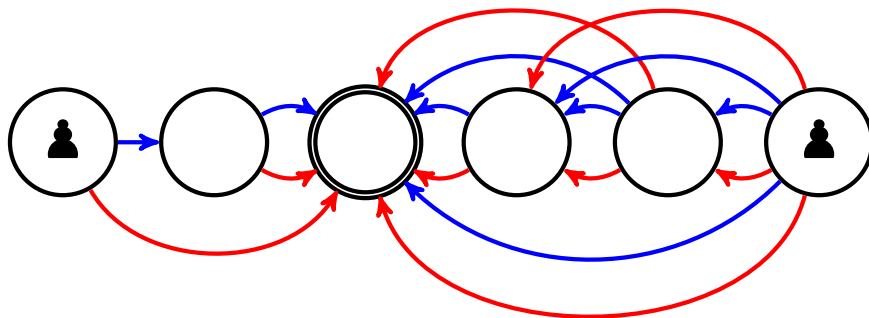
On peut maintenant calculer le jeu qui ouvrirait cet article :



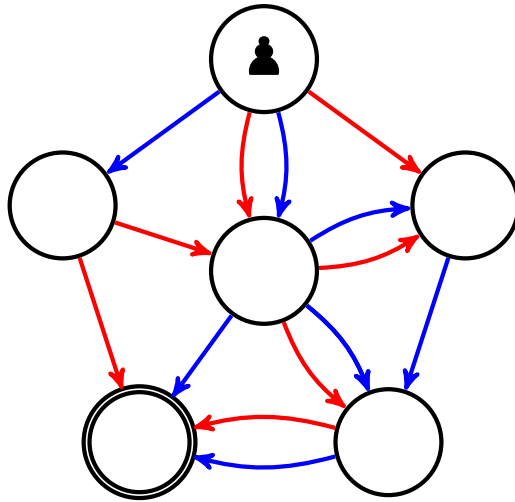
On trouve ces valeurs :



Le jeu est donc la somme de $\downarrow$ et d'un tas de 3 pièces au jeu de Nim :



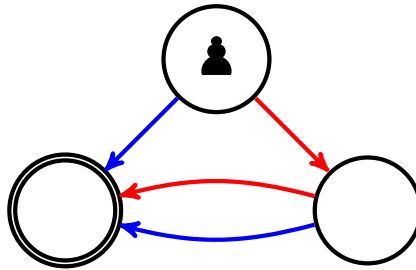
Pour comparaison, voici le jeu original :



Qui croirait, juste en les voyant, que c'est le même jeu ?

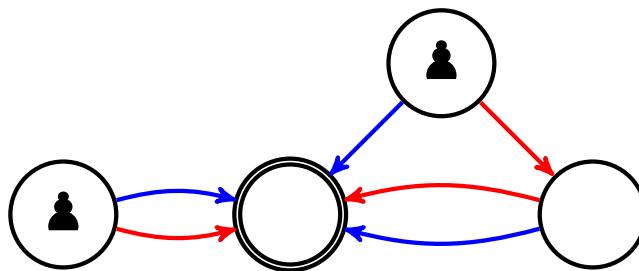
2.2.4 Double haut

On rappelle que ce jeu, noté $\uparrow$, est positif :

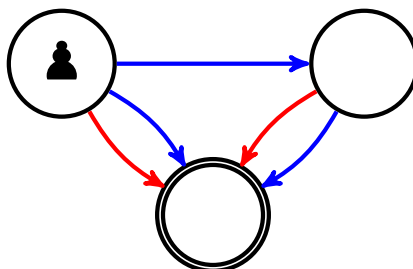


Cela signifie que si Bleu joue en premier, il mène directement le pion à l'arrivée, alors que si Rouge joue en premier, elle mène le pion à droite et Bleu gagne le coup d'après : dans les deux cas, Bleu gagne.

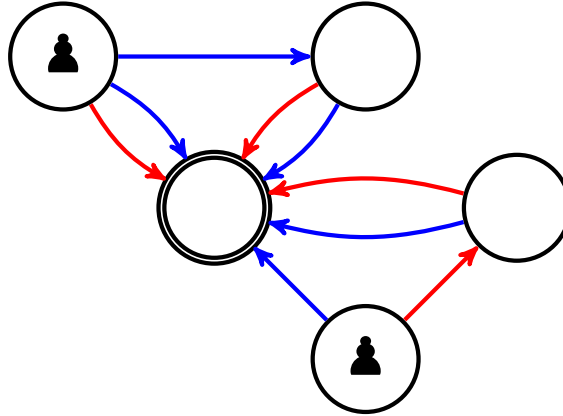
La somme de $\uparrow$ et de l'étoile



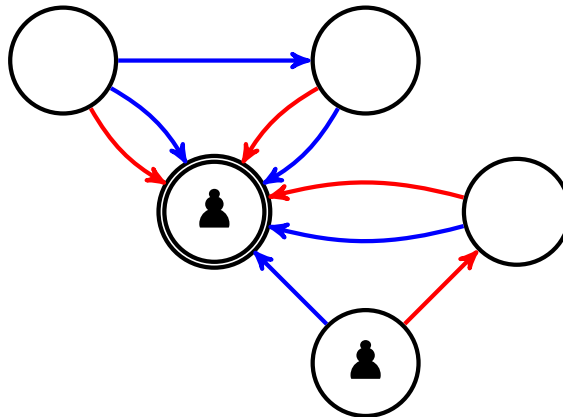
notée $\uparrow *$ et simplifiée ainsi :



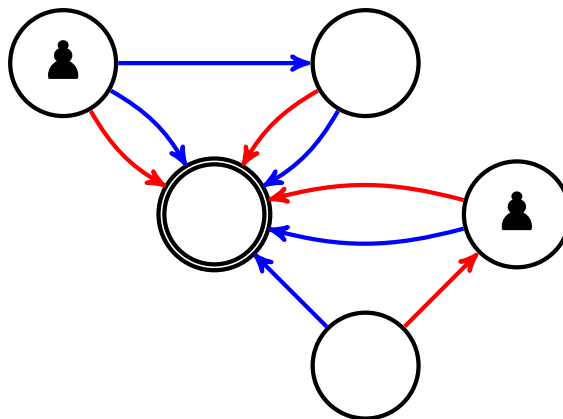
n'est *pas* positive, bien que ce soit la somme de $\uparrow$ qui est positif et de $*$ qui n'est pas négatif. En effet si c'est à Rouge de jouer, elle gagne. On peut donc dire que $\uparrow$ est positif mais à peine : pas assez pour que sa somme avec $*$ soit positive. Mais il suffit de peu pour le rendre positif : juste lui ajouter un infinitésimal, à savoir $\uparrow$. Comme $\uparrow$ est positif, ce jeu est donc supérieur (de peu) au précédent :



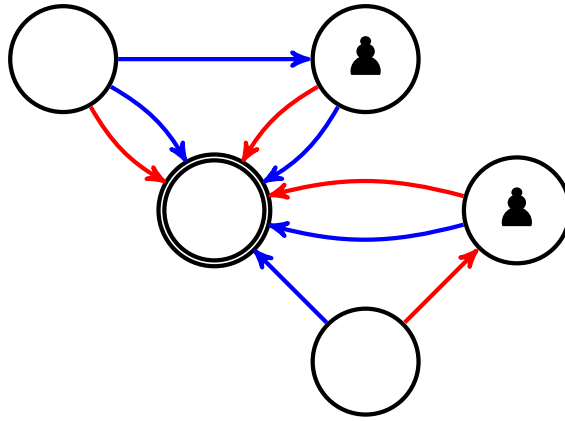
Le nom de ce jeu est $\uparrow\uparrow *$ puisque c'est la somme de $\uparrow$ et de $\uparrow *$. On peut vérifier qu'il est positif : si c'est à Bleu de jouer, il gagne en faisant



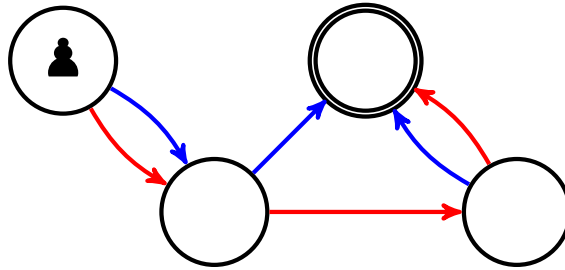
puisqu'après Rouge n'a pas d'autre choix que mener l'autre pion à droite, et Bleu gagnera après. Alors que si c'est à Rouge de jouer, si elle fait comme ci-dessus, Bleu gagne en menant le second pion à l'arrivée. Et si elle fait



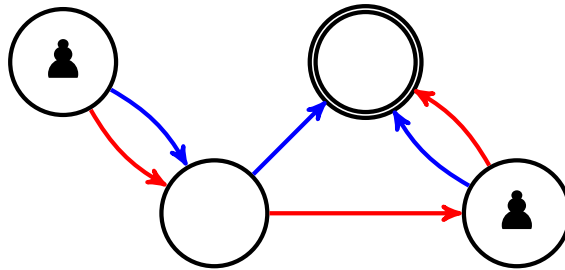
Bleu gagnera ensuite avec ce coup subtil :



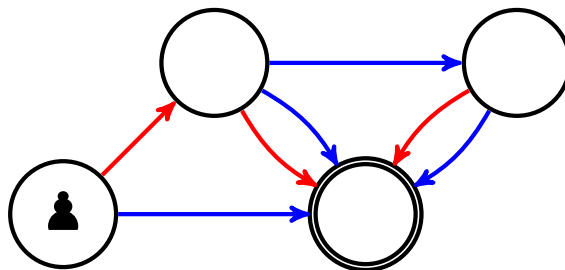
qui ramène la situation à $*+*=0$, et comme c'est alors à Rouge de jouer, elle perd.
Voici la version de $\uparrow\uparrow *$ à un seul pion :



Comme $\uparrow\uparrow * + * = \uparrow + \uparrow + * + * = \uparrow + \uparrow + 0 = \uparrow\uparrow$, on en déduit une représentation à deux pions, du jeu $\uparrow\uparrow$:

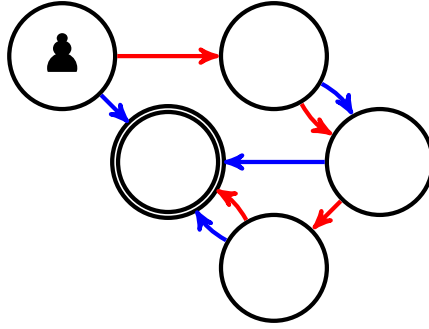


Mais $\uparrow\uparrow$ a aussi une représentation à un seul pion :

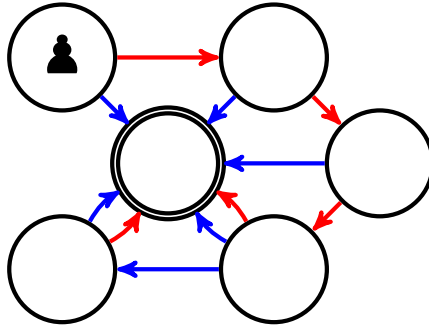


2.2.5 Autres multiples de $\uparrow$

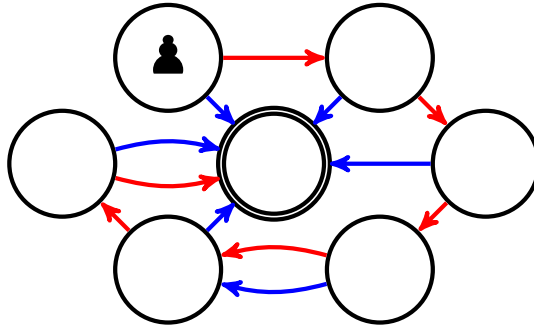
Le jeu ci-dessous est $\uparrow + \uparrow + \uparrow$, noté $\uparrow\uparrow\uparrow$ (lui aussi positif puisqu'il est supérieur à $\uparrow\uparrow$, et lui aussi infinitésimal) :



Voici $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



et $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



On peut dire que, comme $*$ n'est ni positive ni négative, $*$ apporte (par addition) une certaine incertitude, qui permet tout juste de ne plus garder positif le jeu $\uparrow *$ (alors que $\uparrow$ est positif), mais que cette incertitude n'est pas suffisante pour empêcher $\uparrow\uparrow *$ d'être positif. Par exemple, alors que $2 \uparrow$ est supérieur à 2 (puisque $\uparrow$ est positif), $2 \uparrow *$ ne l'est plus, à cause d'une incertitude apportée par $*$. Ce point sera précisé plus loin dans la partie sur les interrupteurs de Conway.

Construction du nombre par John Conway

3. Physique de l'infiniment petit

Alain Busser
IREMI 974

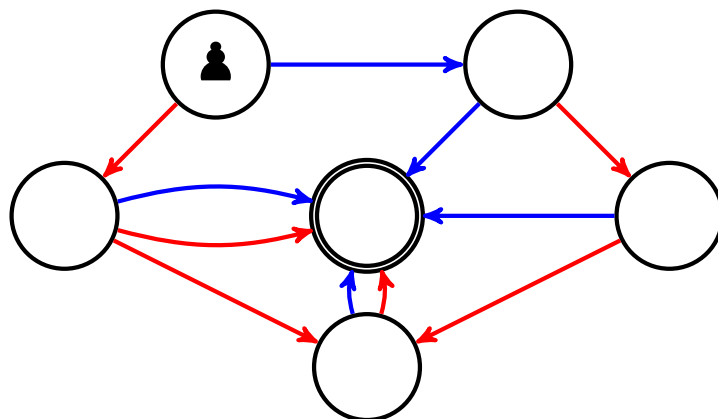
18 avril 2022



3.1 Infinitésimalement infinitésimaux

3.1.1 Fractions de $\uparrow$

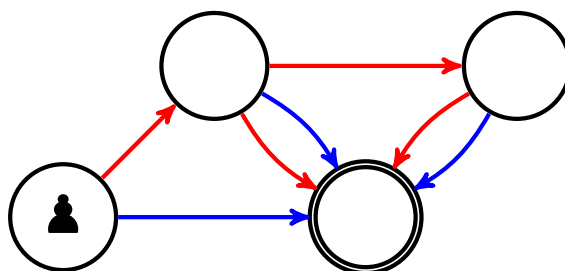
On a vu que $\uparrow$ est à la fois positif et inférieur à toutes les fractions positives : c'est un *infinitésimal*. En fait il est plus petit que $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ qui est lui aussi plus petit que toutes les fractions positives. On connaît donc des infinitésimaux plus grands que $\uparrow$. En voici un qui est positif mais plus petit que $\uparrow$:



Ce jeu est positif (on voit que Bleu a une stratégie gagnante) mais inférieur à $\uparrow$ (en ajoutant $\downarrow$ à ce jeu c'est Rouge qui a une stratégie gagnante). En plus, en additionnant le jeu ci-dessus avec lui-même, on obtient $\uparrow$. il est donc naturel de noter $\frac{1}{2} \times \uparrow$ ou $\frac{\uparrow}{2}$ le jeu ci-dessus.

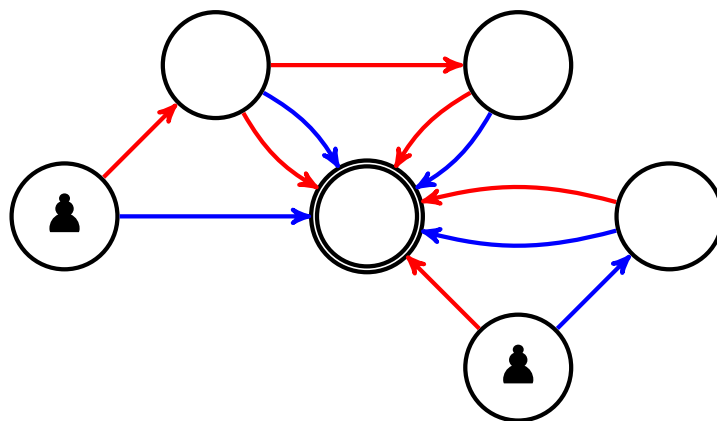
3.1.2 Puissances de $\uparrow$

Et voici un jeu qui est *infinitement* plus petit que $\uparrow$:

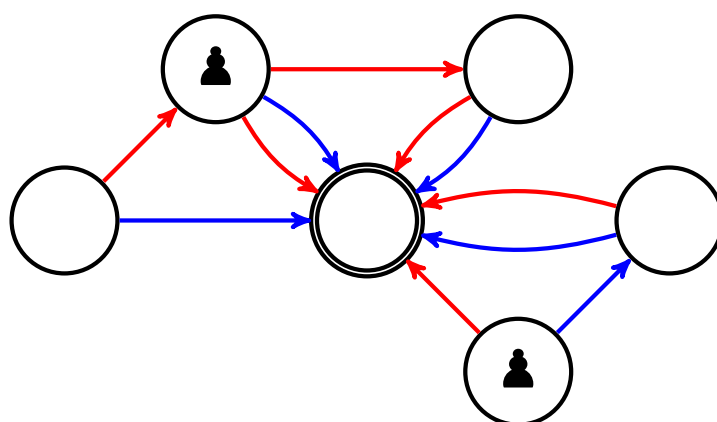


Ce jeu est positif : si Bleu joue, il gagne immédiatement en menant le pion à l'arrivée, si Rouge joue, Bleu gagne au coup d'après. Mais le jeu est plus petit que $\uparrow$. Conway le note donc $\uparrow^2$.

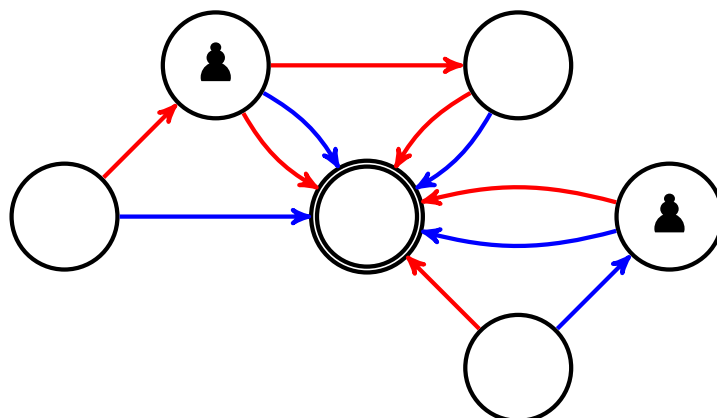
Que $\uparrow^2$ est plus petit que $\uparrow$, signifie qu'en ajoutant à $\uparrow^2$ (qui est positif) le jeu $\downarrow$ (qui est infinitésimal négatif) on obtient un jeu négatif :



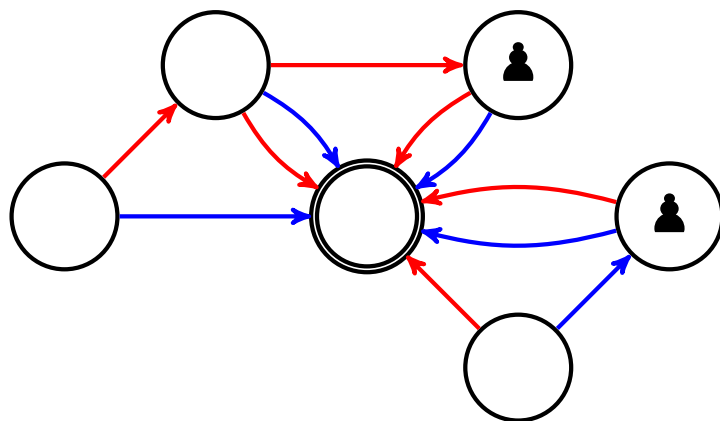
Par exemple si Rouge joue en premier elle a intérêt à jouer



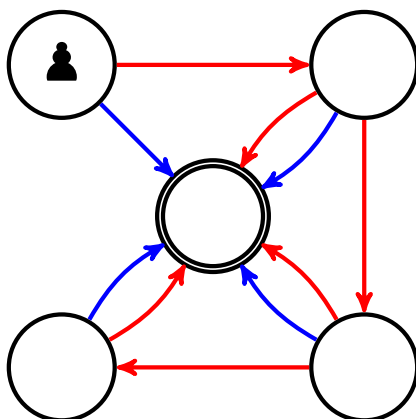
ce après quoi Bleu ne peut faire que



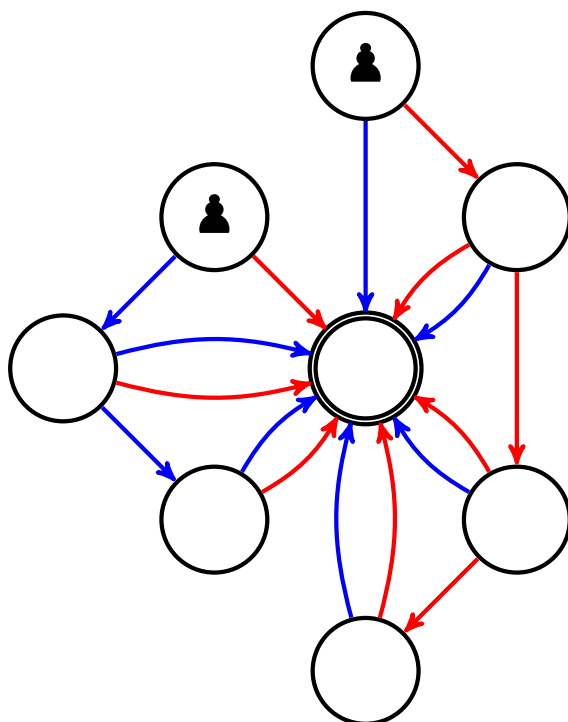
et Rouge peut encore gagner en faisant



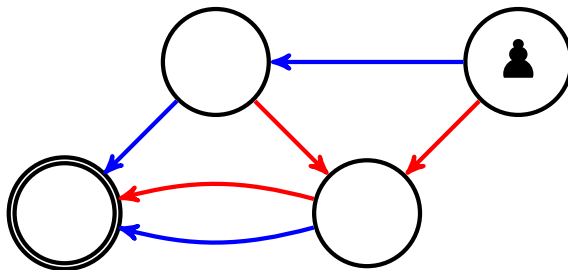
Le jeu $\uparrow^2$ est donc extrêmement petit (infiniment petit par rapport à $\uparrow$ qui est lui-même infiniment petit). Mais l'histoire ne s'arrête pas là : voici un jeu positif qui est infiniment plus petit que $\uparrow^2$:



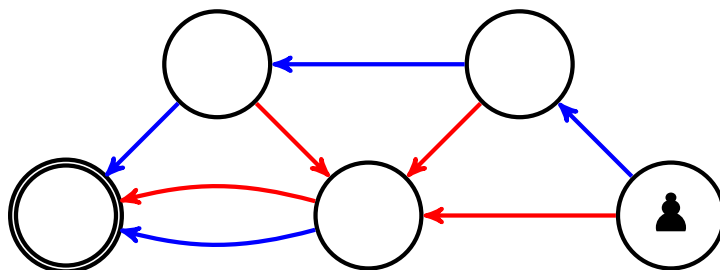
Conway note $\uparrow^3$ ce jeu. Pour vérifier que $\uparrow^3$ est plus petit que $\uparrow^2$, on peut vérifier que $\uparrow^3 + \downarrow^2$ est négatif (à l'avantage de Rouge). Voici cette somme :



L'addition permet, à partir de jeux infinitésimaux, de construire d'autres jeux infinitésimaux. Par exemple, comme $\uparrow^2$ est positif, $\uparrow + \uparrow^2$ est plus grand que $\uparrow$ (donc positif) tout en étant infinitésimal. Par exemple il est plus petit que $\uparrow\uparrow$. On note $\uparrow^{[2]}$ ce jeu :



L'histoire continue : $\uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3$, noté $\uparrow^{[3]}$, est plus grand que $\uparrow^{[2]}$ et plus petit que $\uparrow\uparrow$:

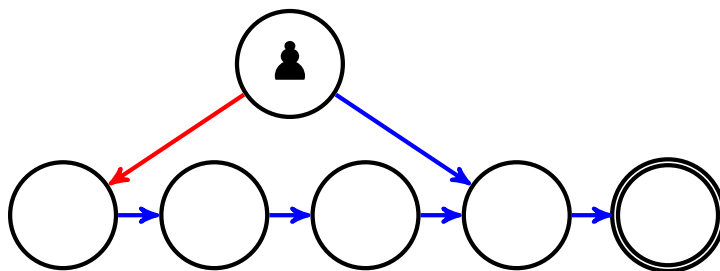


Conway a découvert, dans des vrais jeux, des infinitésimaux positifs mais plus petits que $\uparrow$, $\uparrow^2$, $\uparrow^3$, $\uparrow^4$ etc. Pour les construire, il utilise de nouveaux jeux qui ne sont pas des nombres : les interrupteurs.

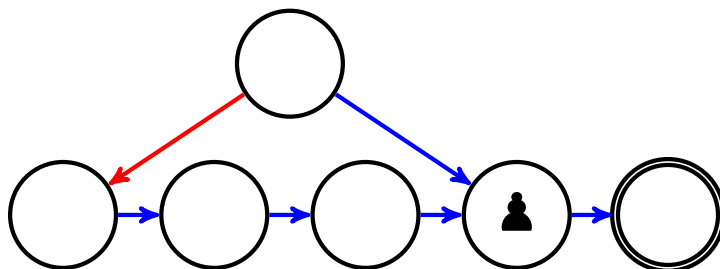
3.2 Les interrupteurs de Conway

3.2.1 Interrupteurs

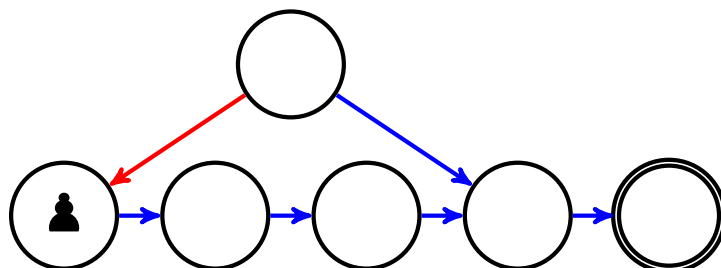
On rappelle que ce jeu est un nombre (égal à 2) :



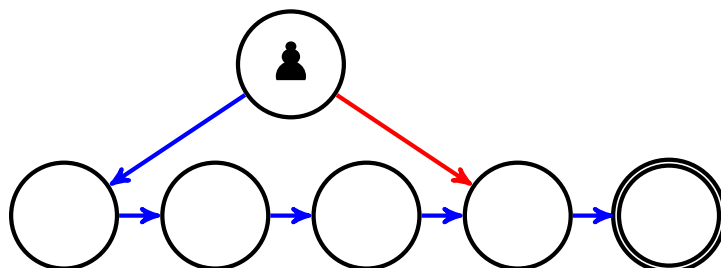
En effet, si Bleu joue, il arrive au nombre 1 :



Alors que si Rouge joue, elle arrive au nombre 4 :



Le nombre 2 est le nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 1 et plus petit que 4. La raison essentielle pour laquelle le jeu ci-dessus est un nombre, c'est donc que 1 est plus petit que 4. Si les deux joueurs arrivent au même nombre, on a vu que le jeu est la somme de ce nombre et de l'étoile. Mais si le nombre auquel arrive Bleu est plus grand que celui auquel arrive Rouge, comme ici :



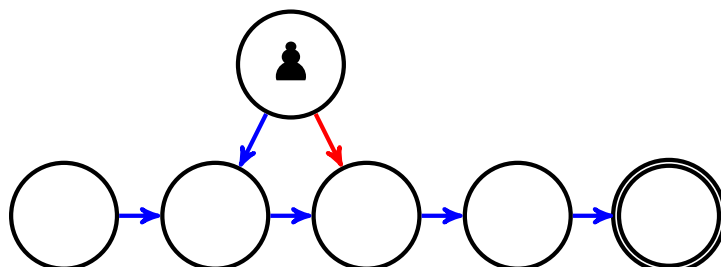
alors le jeu n'est pas un nombre : c'est un *interrupteur*. L'interrupteur ci-dessus est

- plus petit que tous les nombres dépassant 4,
- plus grand que tous les nombres inférieurs à 1,
- et impossible à comparer avec les nombres compris entre 1 et 4.

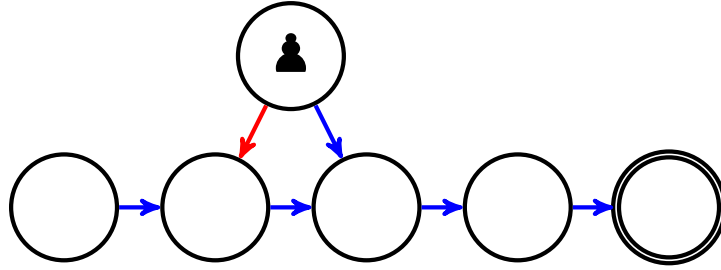
Pour réduire l'incertitude sur la grandeur de ce jeu, Conway introduit la notion de température. Pour connaître la température du jeu ci-dessus, on le refroidit jusqu'à ce qu'il gèle (qu'il devienne un nombre, appelé *moyenne de l'interrupteur*) et on regarde de combien on a refroidi l'interrupteur.

3.2.2 Refroidissement

En refroidissant l'interrupteur ci-dessus de 1 degré, on a ce nouvel interrupteur :



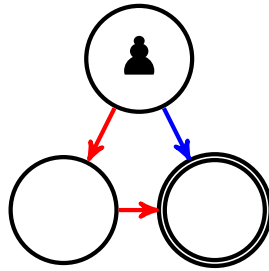
Et si on le refroidit encore de 1 degré, on a un nombre :



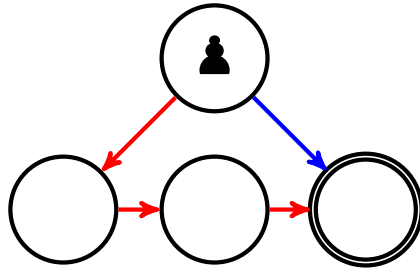
Le nombre est 2,5 (nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 2 et plus petit que 3) donc la moyenne de l'interrupteur de départ est 2,5. Mais il n'était pas nécessaire de le refroidir d'autant que 2 degrés, car au bout de 1,5 degrés il était déjà devenu le nombre 2,5. La température de l'interrupteur est donc seulement 1,5 degrés, pas 2 degrés. Conway note donc $2,5 \pm 1,5$ cet interrupteur.

Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement à des interrupteurs dont la borne la plus petite est un entier négatif et la borne la plus grande est zéro, comme $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, -1 ± 1 , $-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}$ etc. Leur moyenne est opposée à leur température qui est la moitié d'un entier.

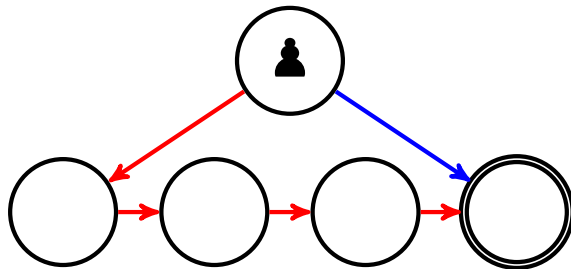
Les voici :



l'interrupteur $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$



l'interrupteur -1 ± 1

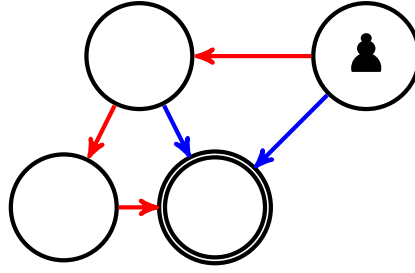


l'interrupteur $-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}$

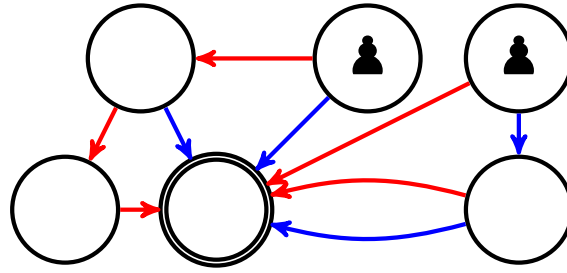
Ces intervalles servent à construire des jeux positifs et plus petits que toute puissance de $\uparrow$.

3.2.3 Le jeu Tiny

Dans ce jeu, si Bleu joue, il arrive à la position 0 et gagne, alors que si Rouge joue, elle arrive à l'interrupteur $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ ce qui permet à Bleu de gagner :



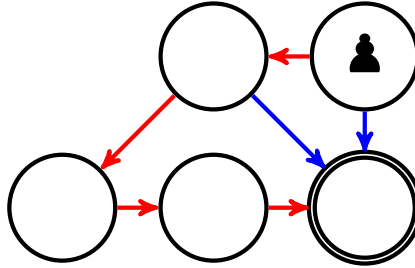
Le jeu (noté $+_1$ et appelé *tiny*) est donc positif. Mais de peu puisque par exemple il suffit de lui ajouter un infiniment petit négatif comme par exemple $\downarrow$



pour que la somme soit à l'avantage de Rouge, donc négative. Ce qui signifie que $+_1$ est plus petit que $\uparrow$. En fait on peut vérifier de façon similaire qu'il est aussi plus petit que $\uparrow^2$, que $\uparrow^3$ etc. C'est le plus petit jeu positif vu jusqu'à présent. Mais Conway en construit d'autres, encore plus petits.

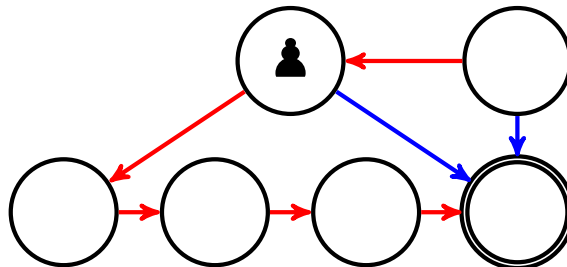
3.2.4 Encore plus petit que $+_1$

Le jeu où Bleu a l'option 0 alors que Rouge a l'option -1 ± 1 est lui aussi positif :

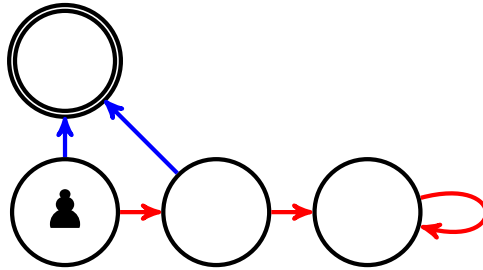


On vérifie que ce jeu (noté $+_2$) est non seulement plus petit que $\uparrow$, $\uparrow^2$ etc mais même que $+_1$. Et même, une somme de plusieurs copies de $+_2$ est plus petite que $+_1$. $+_2$ est infiniment plus petit que $+_1$. Et la série continue, avec $+_3$ qui est positif mais (infiniment) plus petit que $+_2$.

Voici $+_3$:

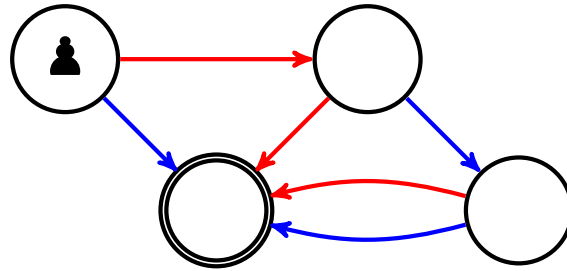


Bien entendu, $+_{1000}$ est beaucoup plus petit encore (tout en étant positif). En fait on peut définir quelque chose comme $+\infty$:

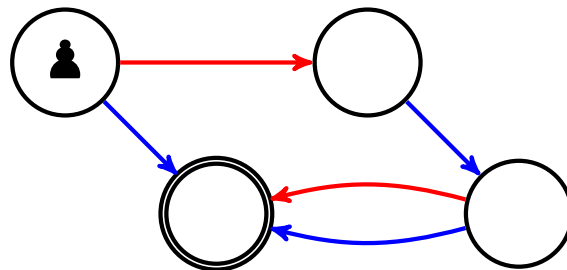


Le jeu ci-dessus, noté $+$ (sans indice) est le plus petit nombre positif, c'est-à-dire qu'il est inférieur à tous les multiples, sous-multiples et puissances de $\uparrow$ mais aussi à tous les $+_n$ où n est un nombre éventuellement infini...

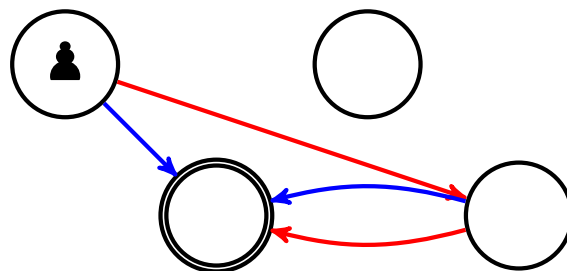
Si le nombre n est grand, le jeu $+_n$ est petit. Si n est petit, le jeu $+_n$ est grand. En revanche, il est possible que pour n infinitésimal, $+_n$ soit égal à n . La seule solution positive de cette équation est $\uparrow$. Voici la construction de $+\uparrow$:



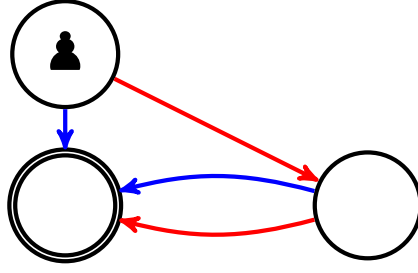
Ce jeu peut être simplifié. Si Rouge joue l'arc rouge du haut, l'arc suivant ne sert à rien puisque c'est alors à Bleu de jouer :



Et comme Bleu n'a alors qu'un seul choix, on peut y aller directement :



En enlevant le sommet devenu inutile (puisque jamais visité), on reconnaît le jeu $\uparrow$:



Donc $+_{\uparrow} = \uparrow$.

Le jeu $+_1$ a un opposé (obtenu en inversant les couleurs rouge et bleue), noté $-_1$ et appelé *miny*, et qui est à la fois négatif et plus grand que $\downarrow$, $\downarrow^2$ etc.

3.3 Poids atomique

3.3.1 particules hautes et basses

Conway associe à chaque infinitésimal un nombre appelé son *poids atomique*. Cela permet de construire les nombres car le poids atomique d'une somme d'infinitésimaux est la somme des poids atomiques des termes de la somme, et plus un infinitésimal est grand, plus son poids atomique est grand.

Le poids atomique de $\uparrow$ est 1, le poids atomique de $\uparrow\uparrow$ est 2, le poids atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow$ est 3 etc.

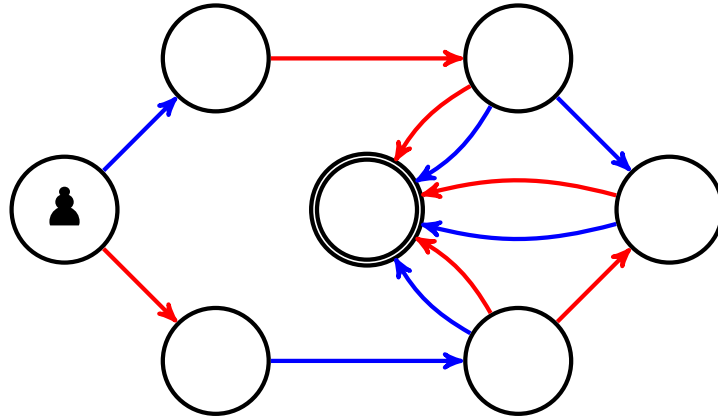
Le poids atomique de $\downarrow$ est -1, le poids atomique de $\downarrow\downarrow$ est -2 etc.

Le poids atomique du jeu appelé $\frac{1}{2} \times \uparrow$ (présenté dans la section sur les infinitésimalement infinitésimaux) est $\frac{1}{2}$ comme on s'en doutait. Un poids atomique n'est donc pas nécessairement entier.

Les poids atomiques de $\uparrow^2$, $\uparrow^{[2]}$, $+_1$, $+_2$ etc sont égaux à 0. Il en est de même pour les nombres de Nim comme l'étoile :

3.3.2 Interrupteurs infinitésimaux

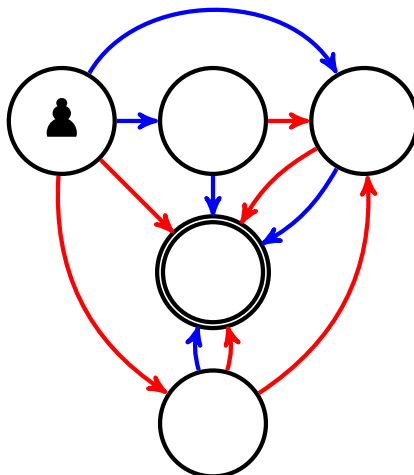
Le poids atomique d'un infinitésimal n'est pas forcément entier (on a vu que celui de $\frac{1}{2} \times \uparrow$ est $\frac{1}{2}$) mais en fait le poids atomique n'est même pas forcément un nombre ! Voici un jeu dont le poids atomique est l'étoile :



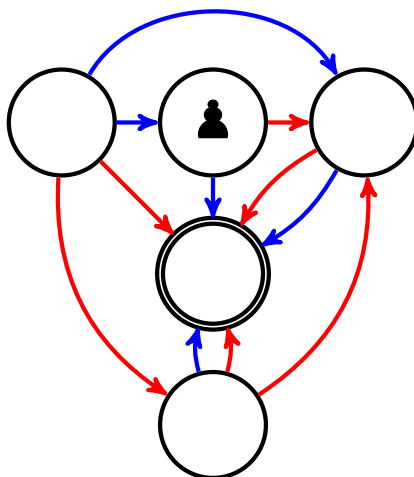
Ce jeu est un interrupteur infinitésimal (donc de moyenne et de température nulles) : il s'agit de $\pm \uparrow\uparrow$.

3.3.3 La moitié d'une étoile

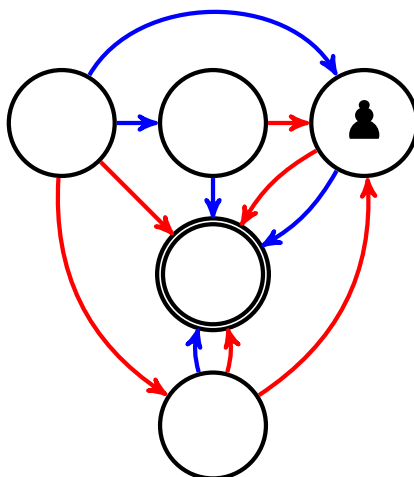
On s'intéresse à ce jeu :



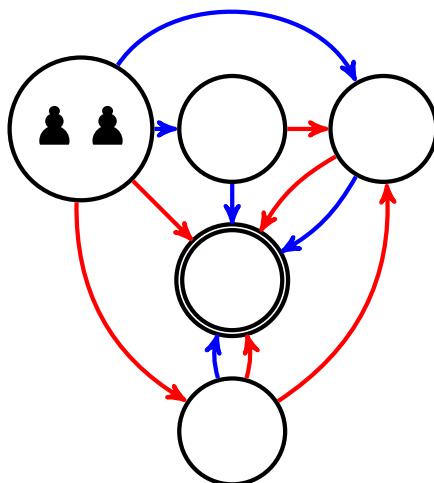
Si Bleu joue, il joue ceci :



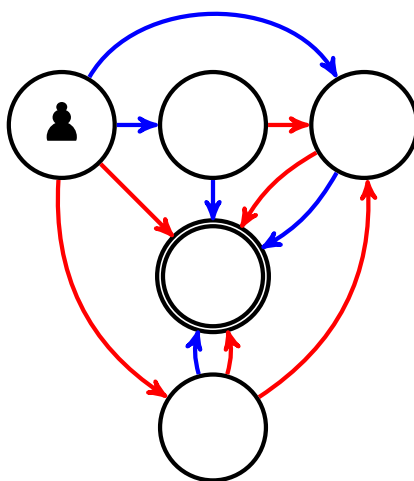
parce que dans ce cas Rouge ne peut que jouer



ce après quoi Bleu gagne. Et si Rouge jouait en premier, elle gagnait en amenant directement le pion à l'arrivée. En apparence, ce jeu est donc tout simplement l'étoile (le premier à jouer est le gagnant). Mais en fait non : on se souvient que $*+*=0$, or en additionnant entre elles deux copies du jeu ci-dessus, on n'a *pas* zéro. en fait la somme du jeu ci-dessus avec lui-même est l'étoile :



En effet si Bleu joue en premier, il gagne, et si Rouge joue en premier, elle gagne. Ainsi, si on appelle j le jeu



On a $j + j = *$ et donc Conway note $\frac{1}{2} \times *$ ou $\frac{*}{2}$ ce jeu. Il s'agit d'un jeu qui

- n'est pas l'étoile (c'est sa moitié),
- mais est indistinguable de l'étoile.

$\uparrow$ ressemble à une particule élémentaire (beaucoup de jeux infinitésimaux sont des multiples entiers de $\uparrow$) mais il est possible de trouver des sous-multiples de $\uparrow$ comme par exemple $\frac{1}{2} \times \uparrow$. La masse atomique de $\uparrow$ étant 1, on ne s'attend pas à trouver facilement des jeux de masse atomique $\frac{1}{2}$. Mais la masse atomique de l'étoile est nulle, et la masse atomique de $\frac{*}{2}$ est donc entière (égale aussi à zéro puisque la moitié de zéro est nulle). Si un jeu infinitésimal est de masse nulle, on a donc moins tendance à le considérer comme une particule élémentaire, que s'il est de masse atomique entière non nulle.

Construction du nombre par John Conway

4. L'écho des kos de go

Alain Busser
IREMI 974

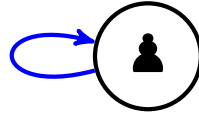
18 avril 2022



4.1 Jeux infiniment grands

4.1.1 Les nombres ordinaux

Le jeu ci-dessous contient tous les nombres ordinaux, aussi Conway l'appelle-t-il *on* (comme « ordinal numbers ») :



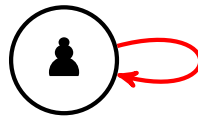
En effet, comme même si on oblige Bleu à avancer un million de fois le pion avant de commencer le jeu, on a exactement le même jeu, cela signifie que *on* est supérieur à un million. En fait *on* est supérieur à tous les ordinaux, même infinis.

On rappelle que dans le jeu *on* ci-dessus, Rouge ne peut pas bouger du tout alors que Bleu peut jouer aussi longtemps qu'il le veut.

Comme *on* est supérieur à tous les nombres, *on* est positif.

4.1.2 L'opposé de on

On obtient l'opposé d'un jeu en intervertissant les rôles de Rouge et Bleu. Le jeu ci-dessous, où Bleu ne peut pas jouer alors que Rouge peut jouer aussi souvent qu'elle veut, est donc l'opposé de *on* :

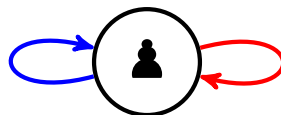


Conway décide d'appeler *off* l'opposé de *on*. Le jeu *off* est donc négatif, et même inférieur à tous les nombres, même infinis.

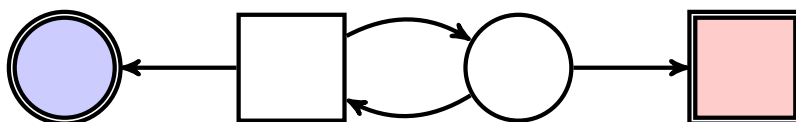
Comme *on* et *off* sont opposés, on peut imaginer que leur somme est égale à zéro (le jeu nul). En fait il n'en est rien :

4.1.3 Un premier ko

Le jeu ci-dessous est $on + off = dud$:



Le nom de *dud* est une abréviation de **deathless universal draw** qu'on pourrait traduire en français par « partie nulle universelle et immortelle » soit l'archétype du ko. En version « jeu à deux joueurs » cela donne :



dud a la propriété qu'en lui additionnant n'importe quel jeu, la somme est encore dud .
Il est infini mais ni positif, ni négatif.

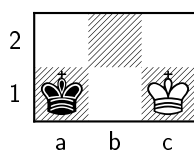
Par exemple $dud + on = dud$:



$dud + dud = dud$:



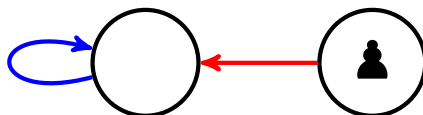
Voici une incarnation de dud sur un échiquier :



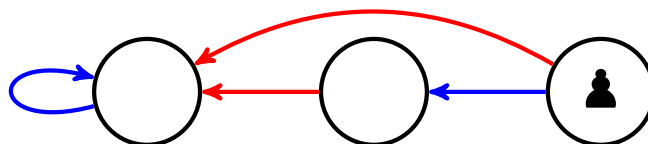
4.1.4 Entiers naturels

Voici les entiers naturels définis à partir de on .

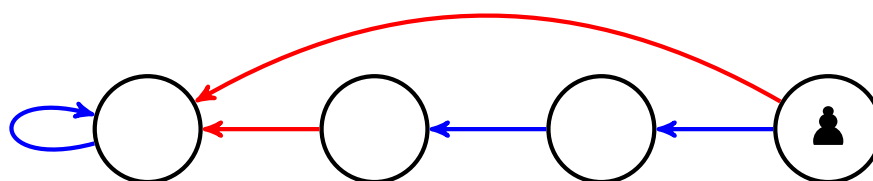
zéro



un



deux

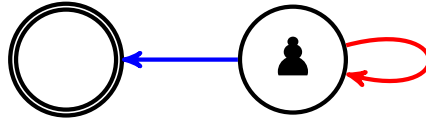


4.2 Jeux infiniment petits

4.2.1 over et under

over

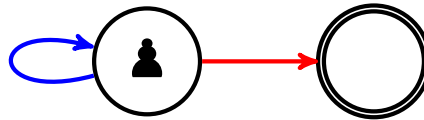
Ce jeu est d'une certaine manière l'inverse multiplicatif de *on* :



Ce jeu est appelé *over* par Conway. Il est positif mais infinitésimal. Il est plus grand que $\uparrow$, que $\uparrow\uparrow$, que $\uparrow\uparrow\uparrow$, que $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ etc.

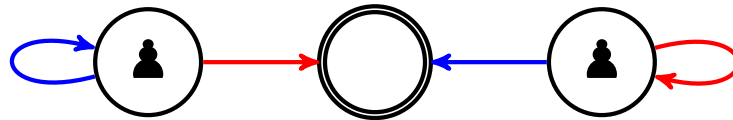
under

Le jeu *under* est l'opposé de *over* :



Le jeu *under* est négatif (c'est Rouge qui gagne) mais infinitésimal. Il est plus petit que $\downarrow$, $\downarrow\downarrow$ etc.

Que *over* et *under* sont opposés ne signifie pas que leur somme est nulle (ce qui voudrait dire que dans *over* + *under* le premier qui joue perd le jeu). En effet si Rouge et Bleu jouent au mieux à *over* + *under* :



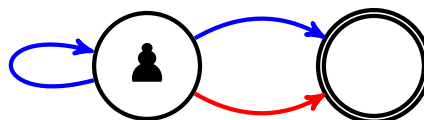
On voit bien qu'au des deux joueurs n'a intérêt à mener un des pions à l'arrivée car alors l'autre joueur gagnerait en faisant pareil. Donc les joueurs font indéfiniment passer un pion sur une boucle. Pour autant *over* + *under* n'est pas égal à *dud* non plus. Par contre la somme de *over* et d'un infinitésimal positif (ou d'un nimber) est *over*.

4.2.2 upon

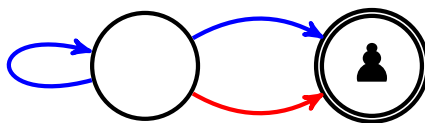
On rappelle que $\uparrow$, même s'il est plus grand que beaucoup de nombres positifs infinitésimaux, est un infinitésimal. Par conséquent, $\uparrow^2$ est infiniment plus petit que $\uparrow$, $\uparrow^3$ est encore plus petit etc. Que dire alors de $\uparrow^{on}$?

upon*

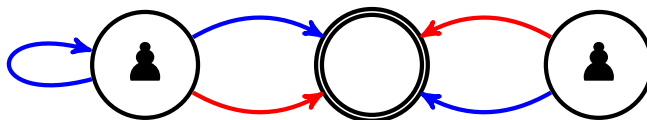
Ce jeu est la somme de l'étoile et d'un jeu baptisé *upon* :



Si c'est à Bleu de jouer, il gagne, et si c'est à Rouge de jouer, elle gagne, en menant le pion à l'arrivée :



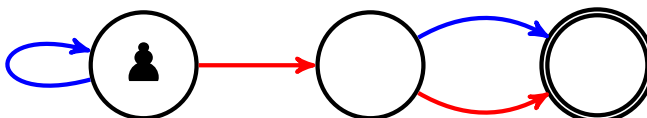
Ce jeu ressemble donc beaucoup à l'étoile, mais ce n'est pas l'étoile. En effet $* + * = 0$ mais la somme du jeu ci-dessus et de l'étoile :



n'est pas zéro : si c'est à Rouge de jouer, elle perd en amenant un des pions à l'arrivée (Bleu amène l'autre pion à l'arrivée juste après, pour gagner). Mais si c'est à Bleu de jouer, il joue le pion de gauche en lui faisant parcourir une boucle, et gagne. Ce jeu est donc positif, c'est celui que Conway appelle *upon*.

upon

Voici le jeu *upon* :



Son nom vient du fait que

- $upon > \uparrow$
- $upon > \uparrow + \uparrow^2$
- $upon > \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3$
- $upon > \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3 + \uparrow^4$
- $upon > \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3 + \uparrow^4 + \uparrow^5$
- $upon > \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3 + \uparrow^4 + \uparrow^5 + \uparrow^6$
- etc
- $upon > \uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3 + \uparrow^4 + \uparrow^5 + \uparrow^6 + \dots + \uparrow^{on}$

Mais pourtant la limite n'est pas atteinte puisque $upon < \uparrow\uparrow$.

4.3 Tiny et miny

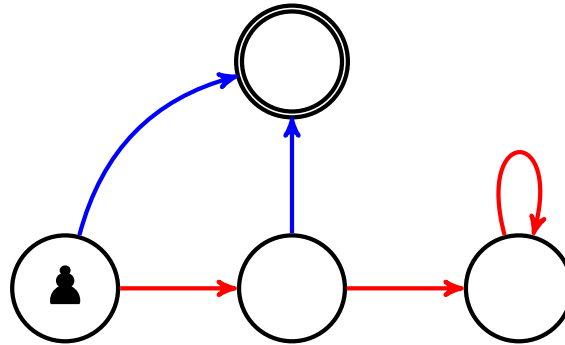
Jusqu'ici, on avait réservé le nom de *tiny* au jeu que Conway notait $+_1$ et on a vu qu'il y avait d'autres jeux très petits (d'autres *tiny*). En fait plus n est grand, et plus $+_n$ est petit. Le jeu que Conway nommait *tiny* (sans indice) est en fait $+_{on}$. Comme on est plus grand que tous les autres ordinaux, *tiny* est

- strictement positif
- strictement inférieur à tous les jeux strictement positifs.

C'est la plus petite valeur (positive) possible.

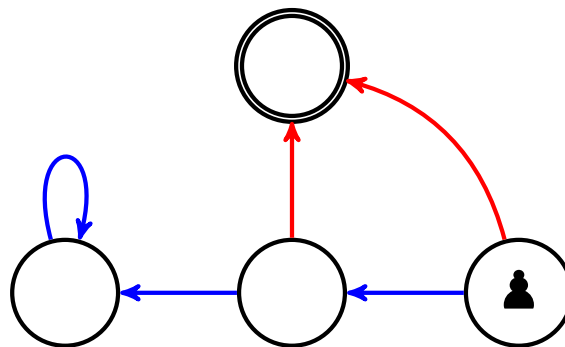
4.3.1 tiny

Voici ce jeu extraordinaire :



4.3.2 miny

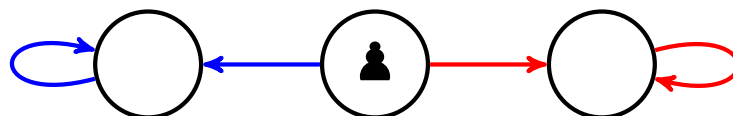
Bien entendu, l'opposé de *tiny*, appelé *miny*, est de façon analogue le plus grand des jeux négatifs :



4.3.3 hot, ono et oof

Conway ne s'arrête pas là. Il y a des jeux infiniment grands appelés respectivement *hot*, *ono* et *oof*.

hot

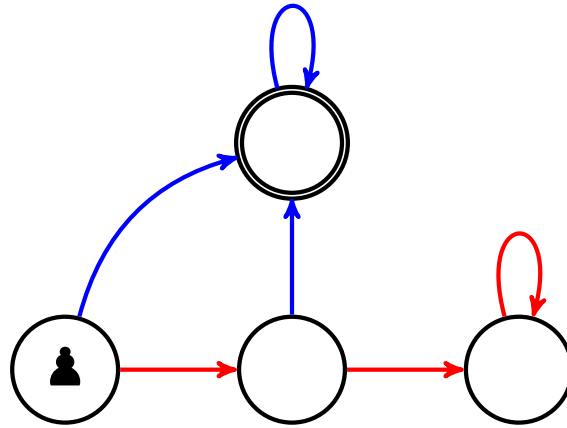


Le jeu *hot* peut être considéré comme la moitié de *dud* puisque $hot + hot = dud$.

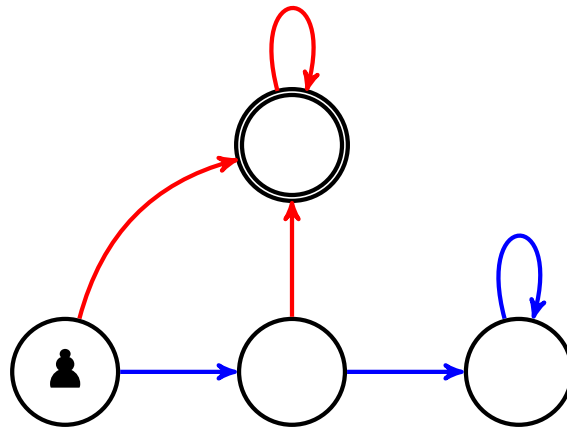
hi et lo

Conway introduit aussi ces jeux :

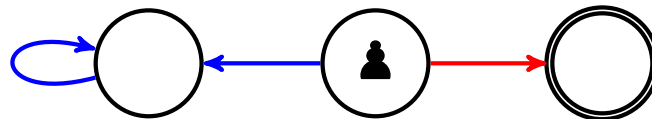
Le jeu *hi* :



Le jeu *lo* est l'opposé de *hi* :



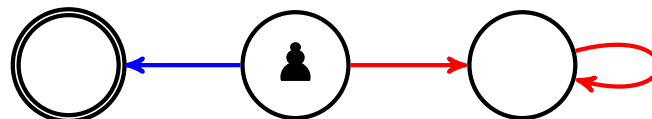
ono



Le jeu *ono* peut être considéré comme la moitié de *on* puisque $ono + ono = on$.

4.3.4 oof

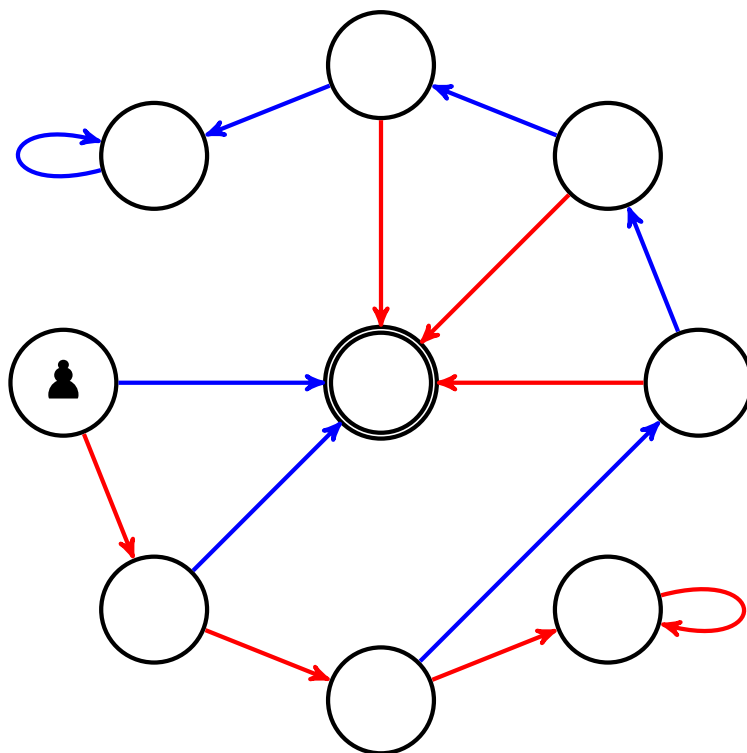
Le jeu *oof* (la moitié de *off*) est l'opposé de *ono* :



4.4 Cartes

La suite démarrée par les jeux *off*, *oof* et *tiny* continue par cette suite de cartes :

1. As (*ace* en anglais) :



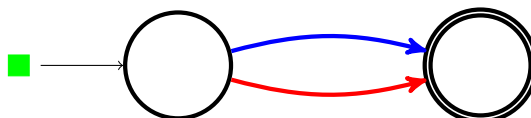
Ce jeu est strictement positif et strictement inférieur à *ace*.

Théorie des infinitésimaux par Conway et Norton

0.1 Les étoiles

0.1.1 L'étoile

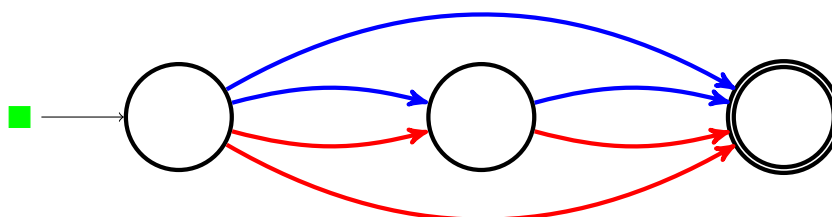
Voici le plus simple des jeux qui ne sont pas des nombres :



En effet le premier qui joue est le gagnant de ce jeu. Ce jeu ne peut donc être ni positif (sinon les bleus gagneraient lorsque les rouges commencent), ni négatif (sinon les rouges gagneraient lorsque les bleus commencent), ni égal à zéro (sinon le premier qui joue serait le perdant). Conway appelle *étoile* ce jeu, et le note $*$. L'étoile est un jeu de Nim à un tas d'une pièce.

0.1.2 Étoile 2

Le jeu de Nim à un tas de 2 pièces est

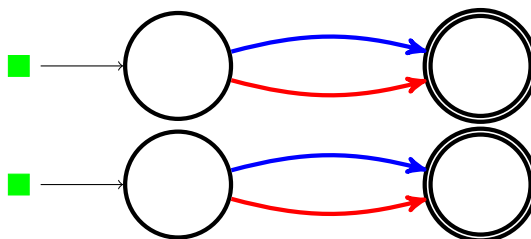


est noté $*2$ (à ne pas confondre avec 2^* qui est la somme du nombre 2 et de l'étoile).

On définit de façon similaire les jeux de Nim $*3$, $*4$ etc. Ces jeux, appelés *nimbers* ne sont pas des nombres (c'est toujours celui qui joue en premier qui gagne) et forment un corps de caractéristique 2. En particulier, chacun d'entre eux est son propre opposé.

0.1.3 Nim addition

La somme de $*$ et $*$

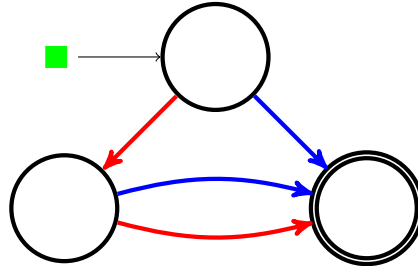


est égale à 0, comme on le voit en y jouant : le premier qui joue perd la somme en laissant son adversaire marquer le dernier but dans l'autre terme. L'étoile est bien son propre opposé, et additionner l'étoile revient au même que soustraire l'étoile.

0.2 $\uparrow$ et ses multiples

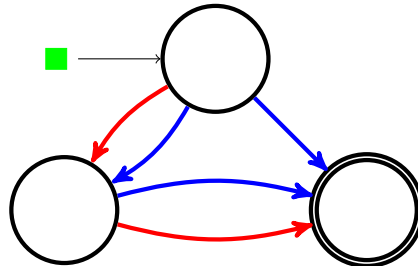
0.2.1 Le jeu $\uparrow$

Ce jeu est positif :



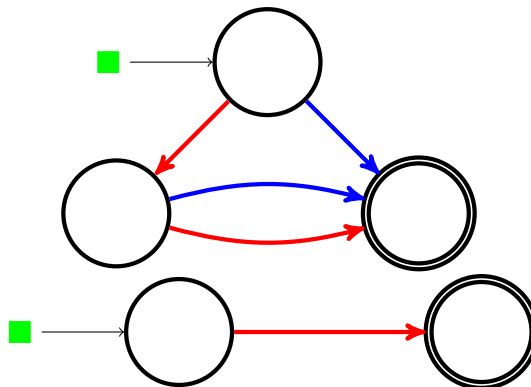
En effet, si les bleus commencent, ils marquent le but directement, et si ce sont les rouges qui commencent, ils laissent les bleus marquer le but juste après.

Ce jeu s'appelle *up* et se note $\uparrow$. En voici une variante :



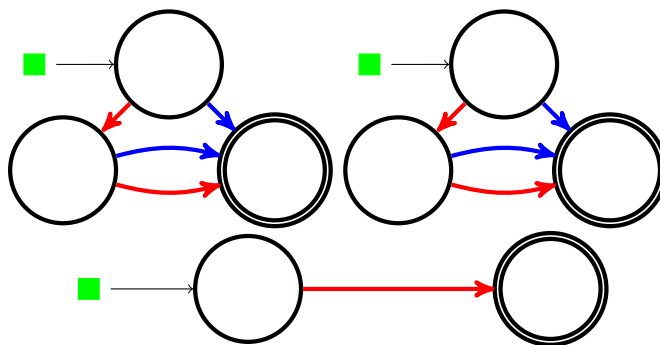
0.2.2 $\uparrow$ est infiniment petit

On rappelle que $\uparrow$ est positif. Mais $\uparrow - 1$ est négatif :

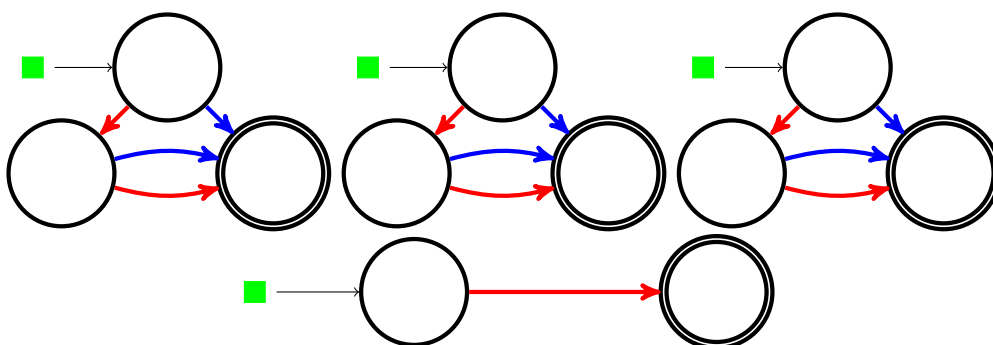


En effet ce sont les rouges qui gagnent à ce jeu. Que la somme $\uparrow - 1$ est négative, signifie que $\uparrow < 1$.

Mais en fait $2 \uparrow < 1$ aussi puisque $\uparrow + \uparrow - 1$ est négatif :



Le jeu $\uparrow + \uparrow + \uparrow - 1$

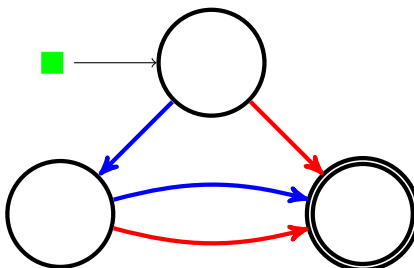


est également négatif. En fait, comme les rouges disposent d'un atout -1 à jouer le plus tard possible, ils ont une stratégie gagnante à $4 \uparrow - 1$, à $5 \uparrow - 1$, à $6 \uparrow - 1$ etc. Ce qui signifie que $\uparrow$ est inférieur à 1 mais aussi à $\frac{1}{2}$, à $\frac{1}{3}$, à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{5}$, à $\frac{1}{6}$ etc.

Le jeu $\uparrow$ est un infiniment petit positif.

0.2.3 L'opposé de $\uparrow$

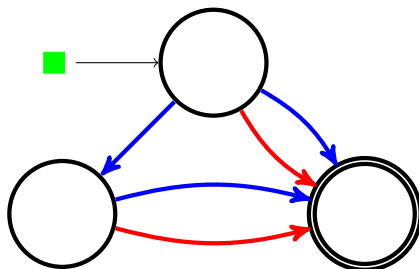
Le jeu $\downarrow$:



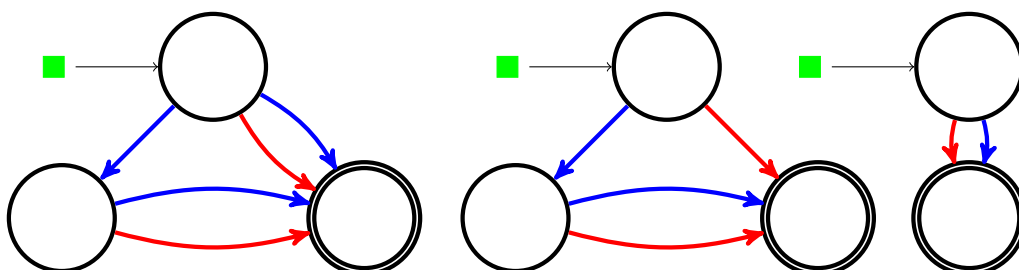
qui est opposé à $\uparrow$ (couleurs rouge et bleue inversées, somme des deux nulle) est donc un infiniment petit négatif.

0.2.4 $\uparrow *$

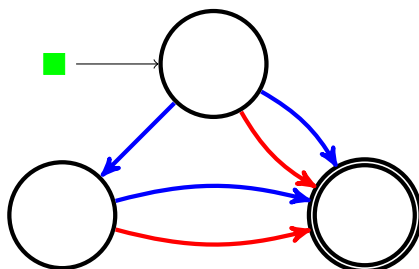
Ce jeu par contre



n'a pas de signe (le prochain à jouer, gagne ce jeu). Mais en lui additionnant $\downarrow$ et l'étoile (c'est-à-dire en lui soustrayant $\uparrow + *$ puisque l'étoile est son propre opposé) on trouve que $\uparrow * + \downarrow + * = 0$:



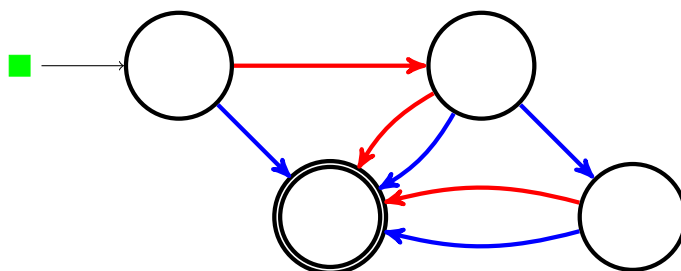
En effet si les bleus commencent, les rouges ont une stratégie gagnante, et si les rouges commencent, les bleus ont une stratégie gagnante. Ce qui signifie que la somme est nulle. Le jeu



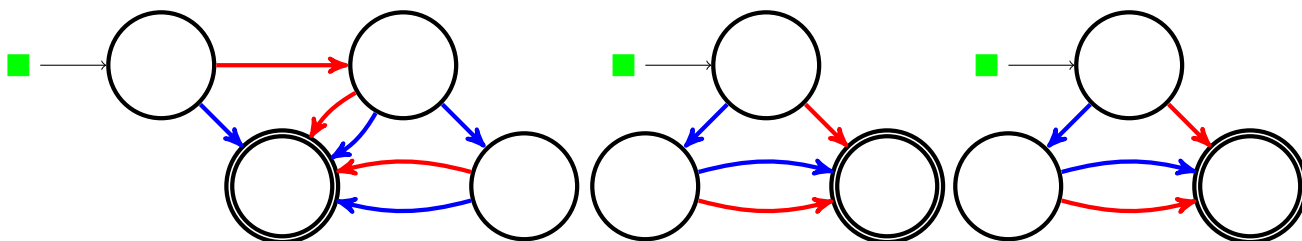
est donc égal à $\uparrow + *$ (que Conway note $\uparrow *$). On remarque que bien que $\uparrow$ soit positif et $*$ ne soit pas négative, leur somme $\uparrow *$ n'est pas positive. Conway et Norton assimilent $*$ à une agitation thermique qui perturbe suffisamment $\uparrow$ pour que la somme ne soit plus positive (autrement dit, pour annuler l'avantage des bleus à $\uparrow$).

0.2.5 $\uparrow\uparrow$

Ce jeu est positif :



Mais en lui soustrayant $\uparrow + \uparrow$ on trouve que $\uparrow\uparrow + \downarrow + \downarrow = 0$:

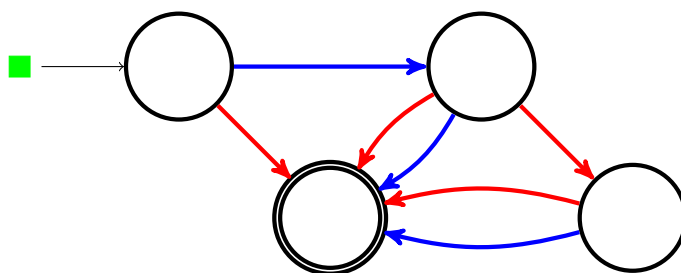


En effet on trouve que la somme des trois termes est gagnée par celui qui joue en deuxième. Cela prouve que le jeu étudié est égal à la somme $\uparrow + \uparrow$. On le note donc $\uparrow\uparrow$ ou $\uparrow\uparrow$.

$\uparrow\uparrow$ est positif, et même supérieur à $\uparrow$, mais il est également infiniment petit. On a d'ailleurs vu plus haut que $\uparrow\uparrow < 1$.

0.2.6 $\downarrow\downarrow$

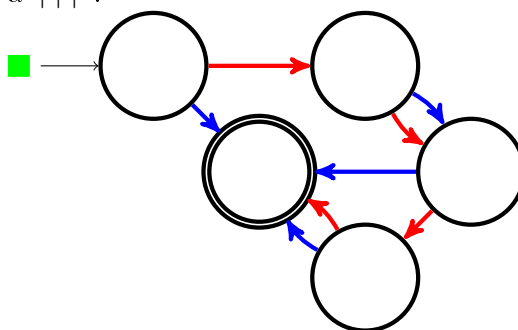
L'opposé de $\uparrow\uparrow$ est donc un infiniment petit négatif :



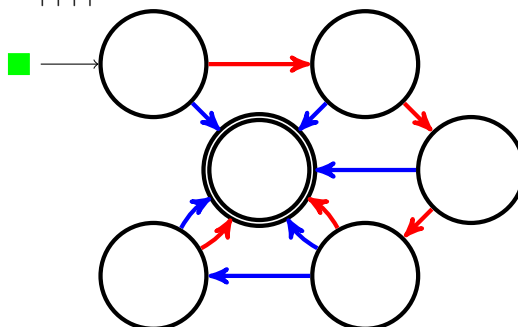
0.2.7 Autres multiples de $\uparrow$

On peut vérifier (en additionnant le nombre correct de termes égaux à $\downarrow$) que

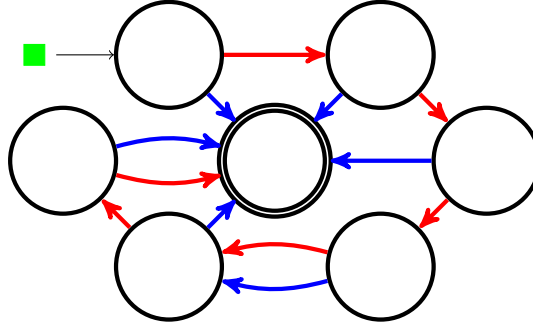
- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow$:



- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



- le jeu suivant est égal à $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:

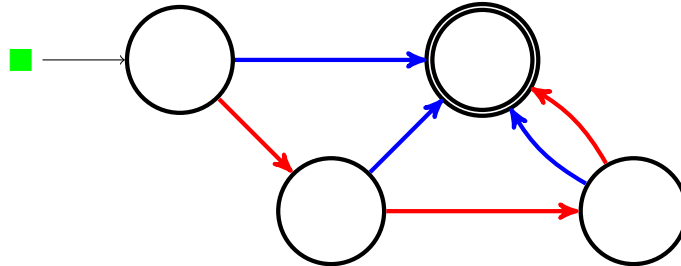


ce qui permet de refaire la construction des entiers, mais dans le monde infiniment petit, l'unité étant le jeu $\uparrow$. En fait, si $\uparrow$ ressemble à un atome (les autres infiniment petits connus jusqu'ici étant des multiples entiers de $\uparrow$), on a vu que l'étoile introduit une incertitude sur le signe d'un jeu. Pour quantifier cette incertitude, Conway et Norton ont élaboré une théorie de la thermodynamique de l'infiniment petit, avec la notion de masse atomique d'un jeu infinitésimal.

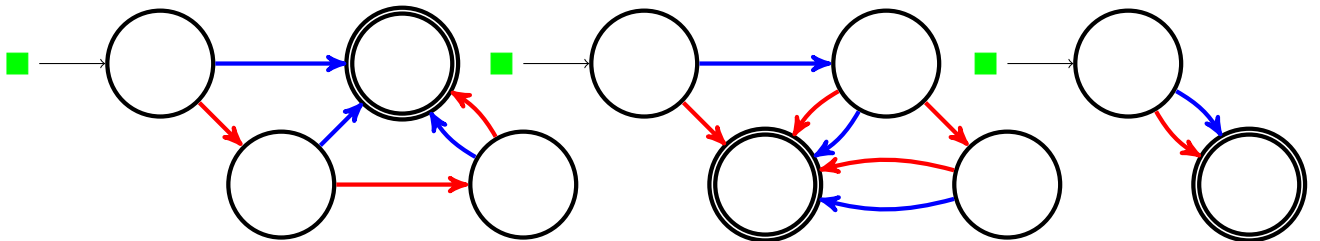
0.3 Masse atomique

0.3.1 Un infiniment petit positif

Ce jeu est intéressant en lui-même. On constate d'abord que les bleus disposent d'une stratégie gagnante, ce qui signifie que ce jeu est positif :



Pour le nommer, on propose de lui soustraire $\uparrow\uparrow$ et $*$ (ce qui revient à lui ajouter $\downarrow\downarrow + *$ puisque l'étoile est son propre opposé) :



On découvre que cette somme de 3 termes est égale à 0 (le prochain joueur est perdant à cette somme). Cela prouve que le jeu étudié est égal à $\uparrow\uparrow *$.

0.3.2 Masse atomique

Résumons :

- $*$ n'est ni positive, ni négative : elle introduit une incertitude autour de 0, similaire à une agitation thermique infinitésimale.
- $\uparrow$ est infiniment petit, mais positif.
- Cependant $\uparrow *$ n'est pas positif : l'agitation thermique ajoutée par $*$ à $\uparrow$ suffit à annihiler l'avantage des bleus à $\uparrow$.
- Mais si on ajoute un infiniment petit positif (à savoir $\uparrow$), la somme $\uparrow\uparrow *$ est positive.

L'étoile est donc assez forte pour détruire le signe de $\uparrow$ mais pas celui de $\uparrow\uparrow$. Ce résultat s'exprime en disant que *la masse atomique de $\uparrow$ est égale à 1*.

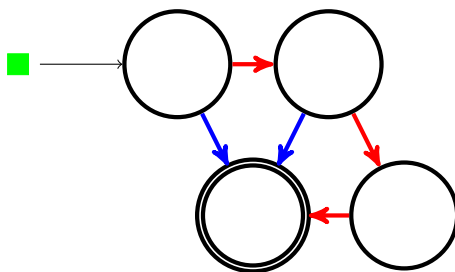
Conway et Norton ont en fait introduit une fonction (calculable mais pas facilement) sur les infinitésimaux, qu'ils ont appelée *masse atomique* et dotée des propriétés suivantes :

- La masse atomique de 0 est 0.
- La masse atomique de $*$ est 0.
- La masse atomique de $*2$, $*3$ etc est 0.
- Un jeu qui n'est pas infinitésimal, n'a pas de masse atomique.
- La masse atomique est un homomorphisme des jeux infinitésimaux dans les jeux. Ce qui signifie que la masse atomique d'une somme de jeux infinitésimaux est la somme des masses atomiques de ces jeux.
- La masse atomique de $\uparrow$ est 1.
- La masse atomique de $\downarrow$ est donc -1.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow$ est 2.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow$ est 3.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ est 4.
- La masse atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ est 5.

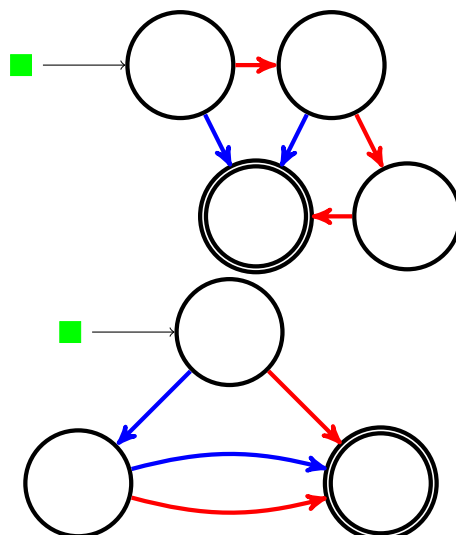
La masse atomique d'un jeu infinitésimal est un jeu. Jusqu'à présent on n'a vu que des masses atomiques égales à des nombres entiers. Mais ce n'est pas nécessairement le cas. On verra plus bas que des masses atomiques peuvent être des fractions, voire ne pas être des nombres. Cela mène à la découverte de jeux infinitésimaux particuliers, qui sont donc intéressants à étudier, par exemple en y jouant.

0.3.3 Infiniment petit par rapport à $\uparrow$

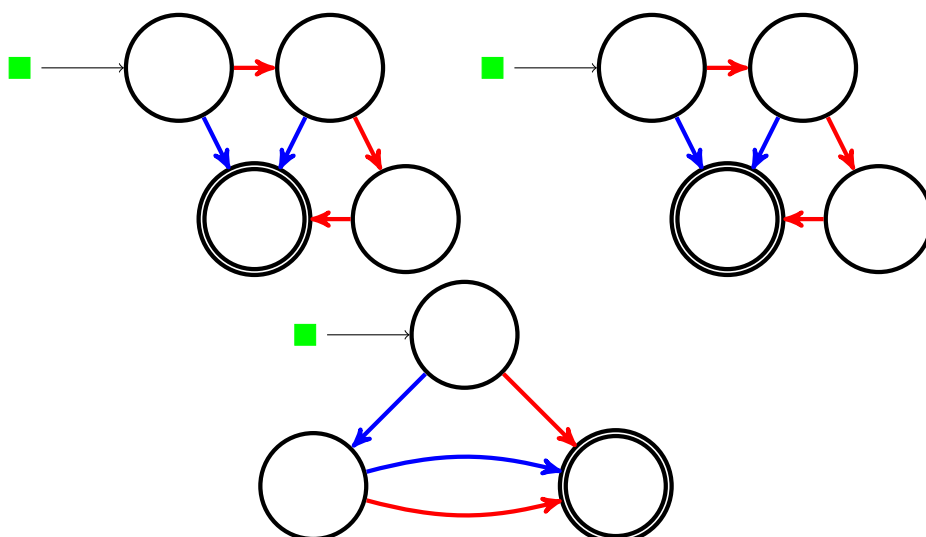
Ce jeu est positif :



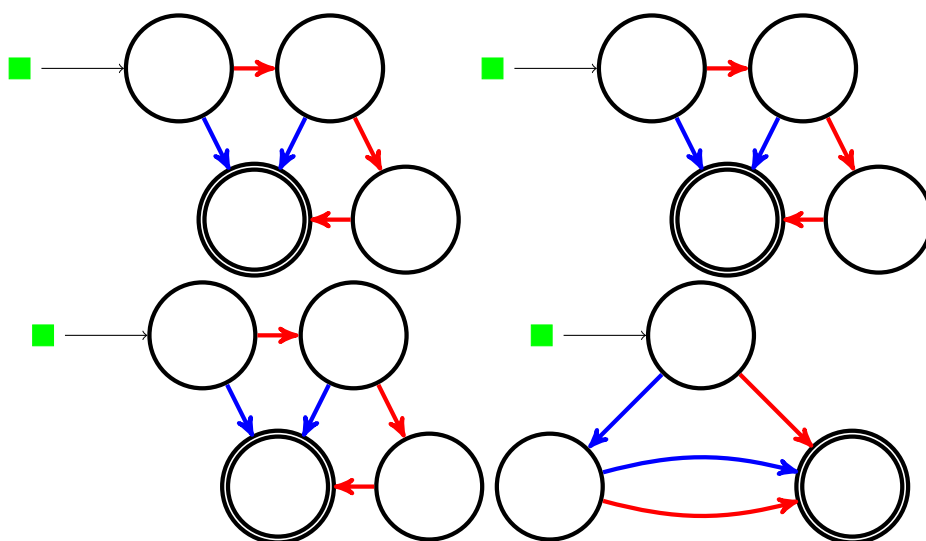
Mais en lui ajoutant un infiniment petit négatif (en l'occurrence $\downarrow$), la somme est négative :



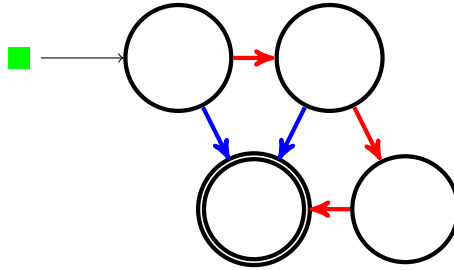
Il en est de même pour



ou



etc, ce qui prouve l'existence d'un jeu positif mais infiniment plus petit que $\uparrow$ qui est lui-même infinitésimal. Le jeu

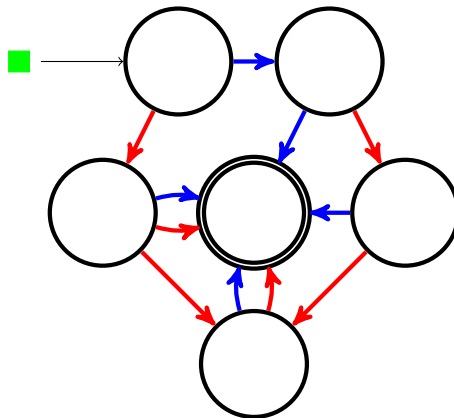


noté $+_1$ (et nommé *tiny one* par Conway) est donc un infinitésimal infiniment petit par rapport à $\uparrow$. Sa masse atomique est donc 0. L'opposé de $+_1$ est noté $-_1$ (et nommé *miny one*).

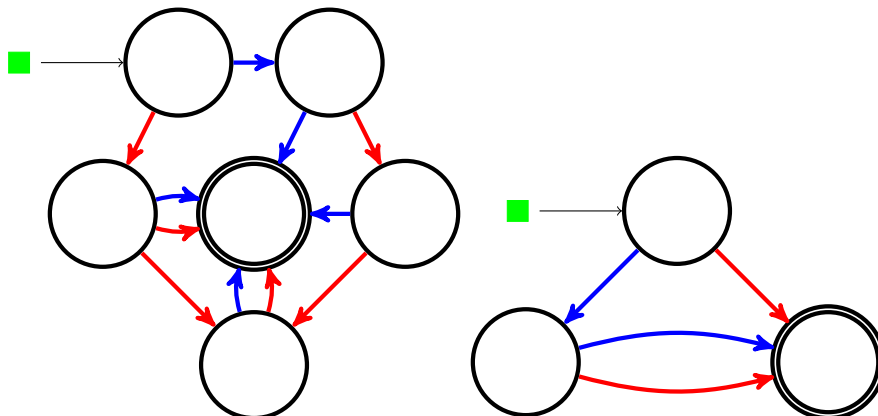
Il y a d'autres infinitésimaux positifs dont la masse atomique est plus petite que 1 (c'est-à-dire qui sont eux-mêmes compris entre 0 et $\uparrow$) sans pour autant être nulle.

0.3.4 La moitié de $\uparrow$

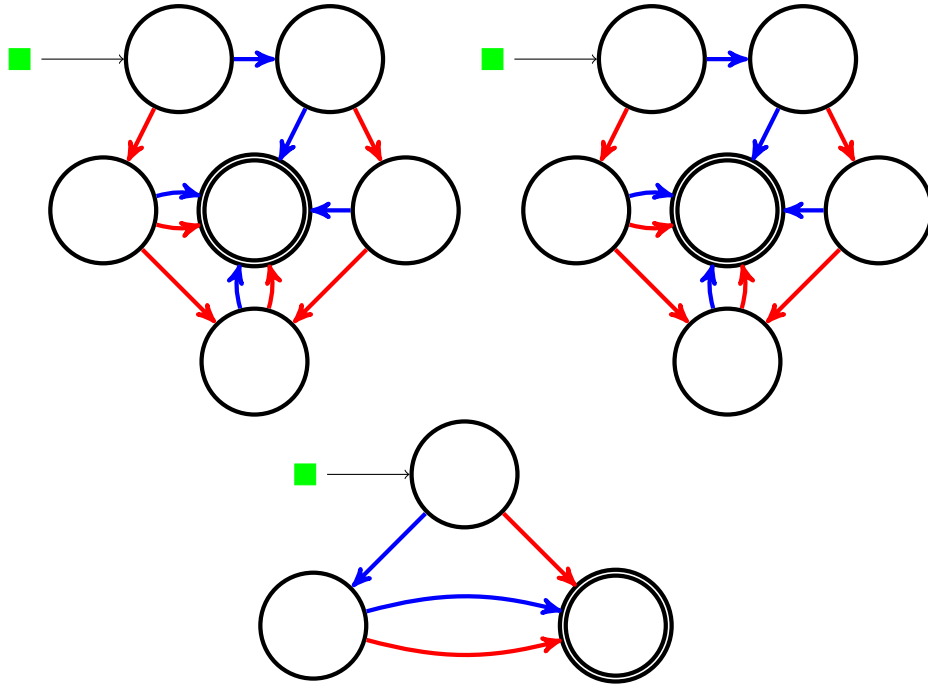
On constate que ce jeu est positif :



Mais on constate également qu'en lui ajoutant $\downarrow$, la somme est négative :



Le jeu est donc inférieur à $\uparrow$. Mais la somme de ce jeu avec lui-même et $\downarrow$ est nulle (il y a une stratégie gagnante pour celui qui joue en second) :

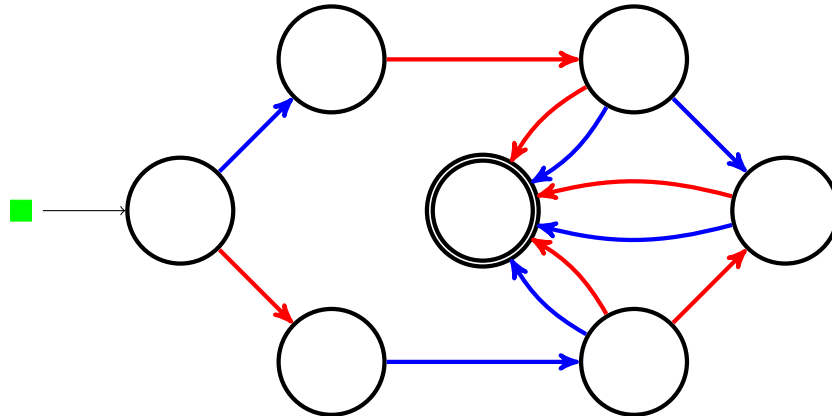


Cela signifie que la somme du jeu avec lui-même est égale à $\uparrow$, autrement dit, que le jeu étudié est $\frac{1}{2}$. Sa masse atomique est donc égale à $\frac{1}{2}$.

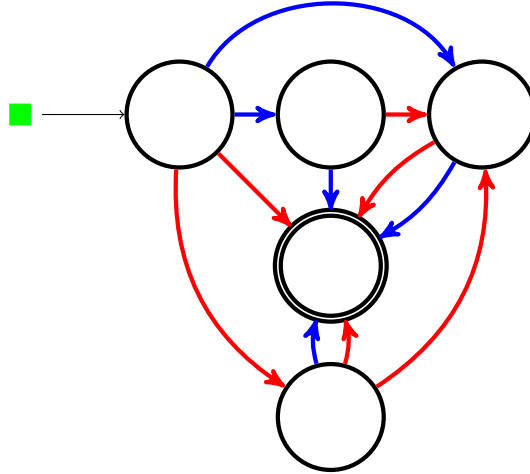
Cet exemple montre que la masse atomique d'un jeu n'est pas nécessairement un nombre entier. En fait, ce n'est même pas nécessairement un nombre.

0.3.5 Masse atomique étoile

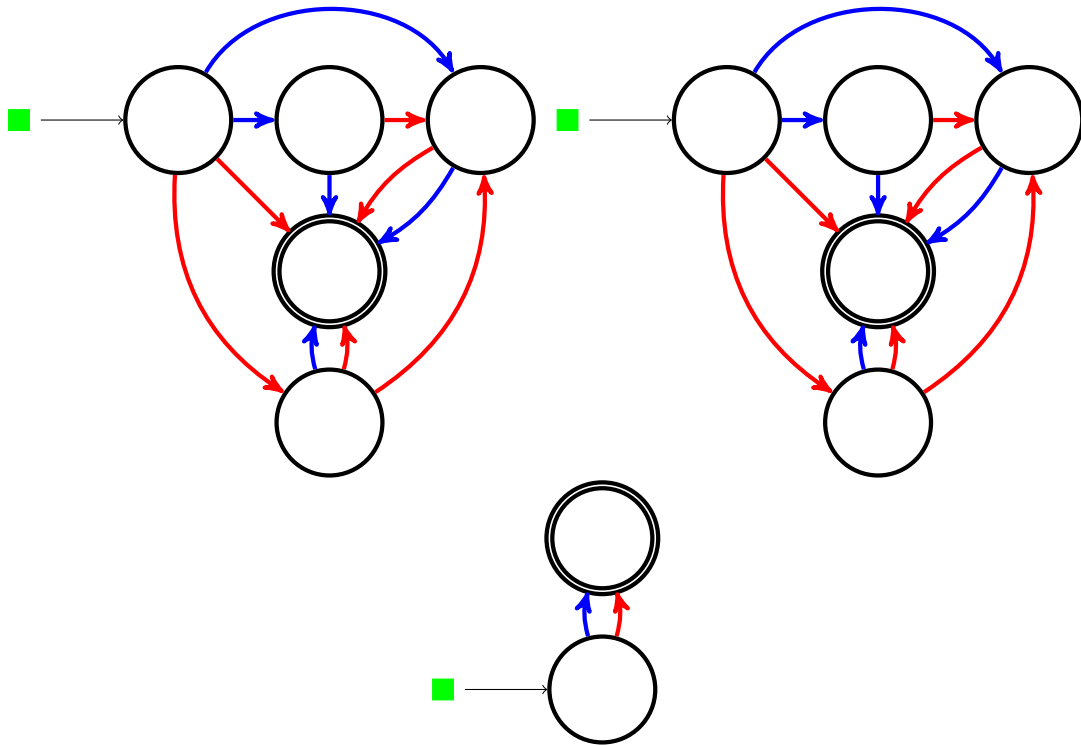
La masse atomique de ce jeu est égale à l'étoile :



Conway et Norton se servent de cette construction pour étudier ce jeu qui n'est ni positif, ni négatif (il y a une stratégie gagnante pour le prochain qui joue) :



Si on évalue la somme de ce jeu avec lui-même et l'étoile :

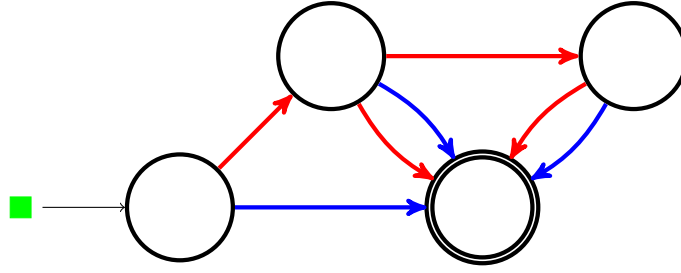


on découvre l'existence d'une stratégie gagnante pour celui qui joue en second, donc la preuve (puisque l'étoile est son propre opposé) que le jeu en question est la moitié de l'étoile, dans la mesure où la somme avec lui-même est l'étoile. Ce jeu se note donc $\frac{*}{2}$.

0.4 Ordres de grandeur

0.4.1 $\uparrow^2$

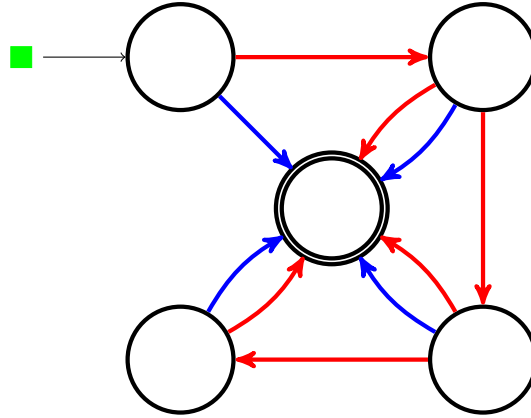
Voici un jeu positif :



Mais en lui ajoutant $\downarrow$ la somme est négative, et même en ajoutant $\downarrow$ à la somme de plusieurs copies du jeu ci-dessus. Le jeu ci-dessus est donc infiniment petit par rapport à $\uparrow$. Conway le note $\uparrow^2$. L'opposé de $\uparrow^2$ (qui est infiniment petit négatif) est $\downarrow^2$.

0.4.2 $\uparrow^3$

De façon similaire, on découvre que ce jeu (dont on voit qu'il est positif) est infiniment petit par rapport à $\uparrow^2$:

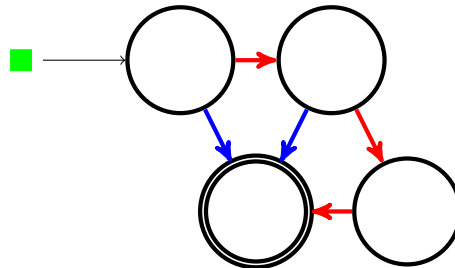


L'opposé de $\uparrow^3$ est $\downarrow^3$. On peut continuer la construction avec $\uparrow^4$ etc, et leurs opposés.

Il y a donc une gradation des infiniment petits positifs, chacun étant infiniment petit par rapport au précédent.

0.4.3 $+_1$

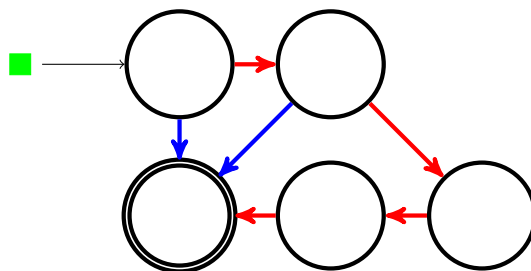
Les techniques précédentes permettent de vérifier que ce jeu, noté $+_1$ (prononcé *tiny one*) :



est infiniment petit non seulement par rapport à $\uparrow$ (on l'a vu précédemment) mais également par rapport à $\uparrow^2$, par rapport à $\uparrow^3$, à $\uparrow^4$ etc. C'est, de fait, le plus petit des jeux positifs vus jusqu'à présent. Jusqu'à présent...

0.4.4 $+_2$

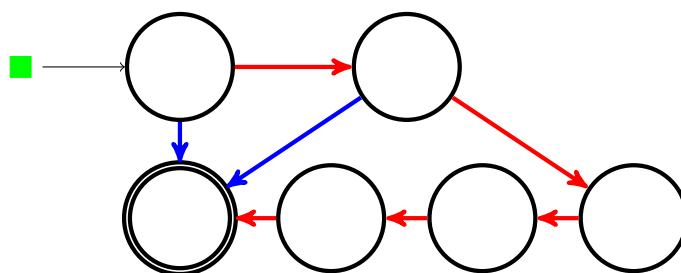
Les techniques habituelles permettent de montrer que ce jeu :



quoique positif, est infiniment petit par rapport à $+_1$. On le note $+_2$ (il répond au doux nom de *tiny two*, et son opposé $-_2$ à celui de *miny two*). On imagine la suite : s'il y a un $+_2$, il doit bien y avoir un $+_3$.

0.4.5 $+_3$

Le jeu positif

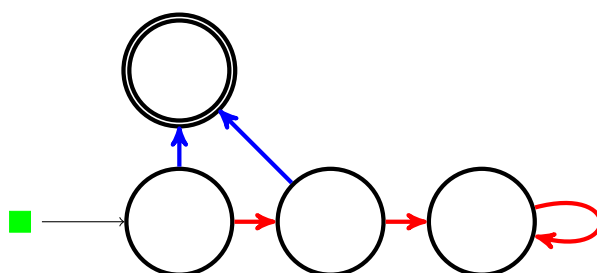


est positif, mais infiniment plus petit que $+_2$: c'est *tiny three*, noté $+_3$.

Il y a donc une autre gradation des ordres de grandeur, cette fois-ci avec la série des $+_n$. Tous ces jeux ont une masse atomique nulle.

0.4.6 Tout au bout

En fait, il y a un jeu défini comme une sorte de $+\infty$:



Ce jeu (appelé *tiny* et noté $+$), infiniment petit par rapport à chacun des $+_n$, est de fait le plus petit jeu positif. Son étude est compliquée par le fait qu'il y a une boucle rendant la partie potentiellement infinie.

Alain Busser
IREMI 974
février 2023