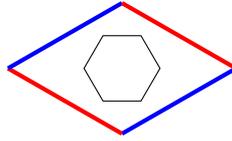


# 1 Le jeu de Hex

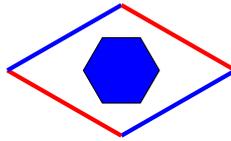
## 1.1 Losange de taille 1

Le plus simple des jeux de Hex est celui-ci :

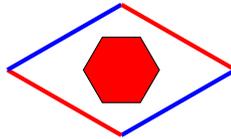


Ce n'est pas un nombre. On peut aisément l'analyser :

- Si c'est aux blues de jouer, ils ne peuvent que colorier l'unique hexagone, et gagner :



- Si ce sont les rouges qui jouent, eux aussi ne peuvent que colorier l'unique hexagone, et gagner :

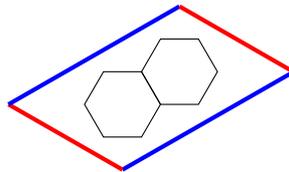


Le jeu de Hex à un seul hexagone est donc le jeu de Nim à une seule pièce : celui qui va jouer ne peut que prendre la pièce et gagner.

## 1.2 parallélogrammes de largeur 1

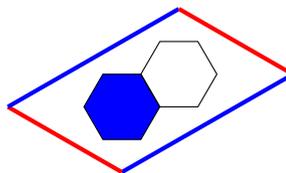
### 1.2.1 longueur 2

On en déduit la valeur de ce jeu :

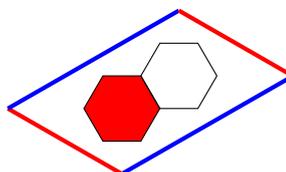


En effet,

- Si les bleus jouent, ils transforment le jeu en 0 qui fait perdre les rouges (l'existence d'un chemin bleu gagnant empêchant les rouges de continuer à jouer) :



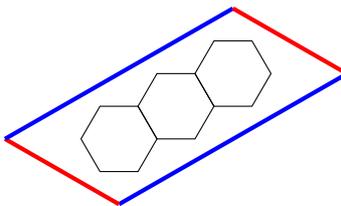
- Si ce sont les rouges qui jouent, ils aboutissent au jeu précédent, dont on a vu que c'est l'étoile :



Ce jeu est donc égal à celui que Conway nommait *up* et notait  $\uparrow$  (on remarque que ce jeu est positif puisque ce sont de toute façon les bleus qui gagnent).

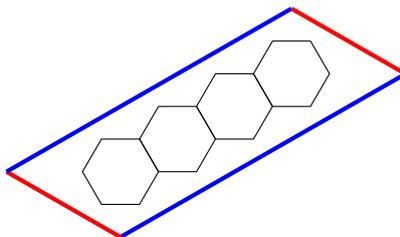
### 1.2.2 longueur 3

Le jeu suivant est donc égal à  $\uparrow\uparrow *$  :



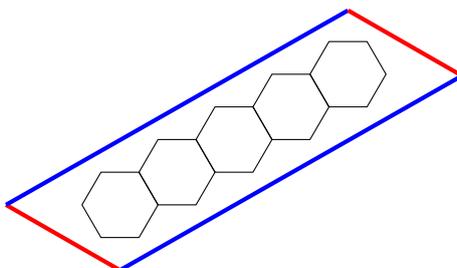
### 1.2.3 longueur 4

Ce jeu est donc égal à  $\uparrow\uparrow\uparrow$  :



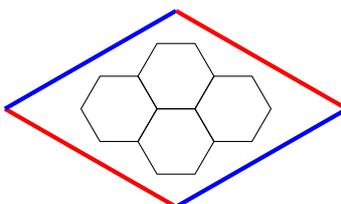
### 1.2.4 longueur 5

Ce jeu est donc égal à  $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow *$  :

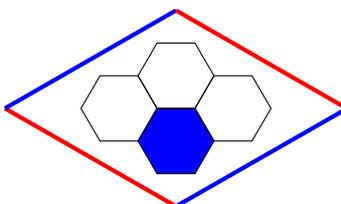


## 1.3 Losange de taille 2

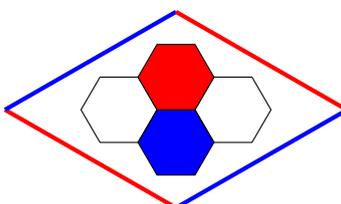
Cela permet d'étudier le jeu de Hex  $2 \times 2$  :



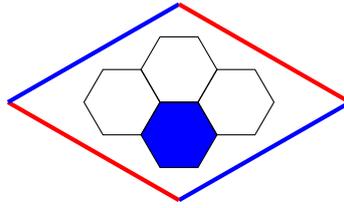
Supposons que ce soit aux bleus de jouer, ils ont intérêt à faire ceci :



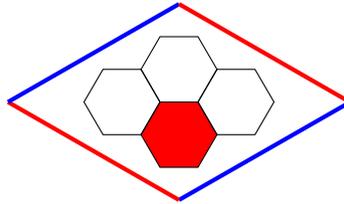
Cette nouvelle position est déjà vue : si les bleus rejouent ils finissent leur chemin et gagnent alors que si les rouges jouent ils ne peuvent rien faire d'autre qu'arriver à l'étoile, par exemple ainsi :



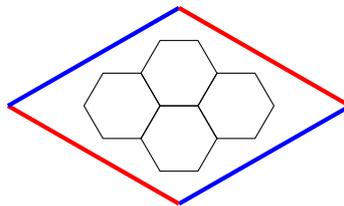
En résumé,



est égal à  $\uparrow$ , et par symétrie



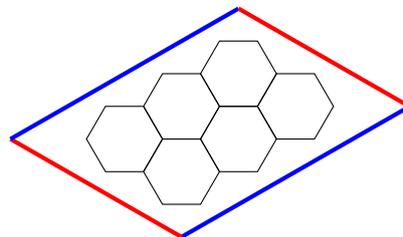
est égal à  $\downarrow$ , donc



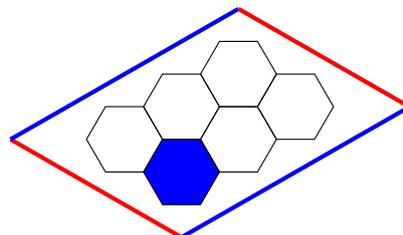
est égal à l'étoile \*.

#### 1.4 Parallélogramme de longueur 3 et de largeur 2

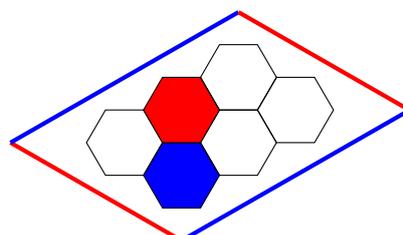
Une étude similaire permet de dire que



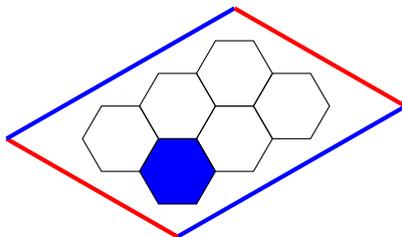
est positif. En effet, si ce sont les bleus qui jouent, ils arrivent à



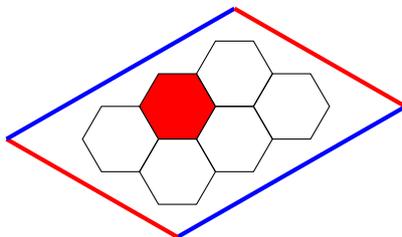
position depuis laquelle les rouges ne peuvent faire mieux qu'arriver à l'étoile \* :



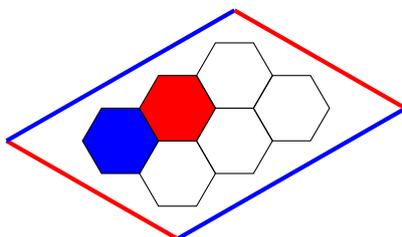
Donc



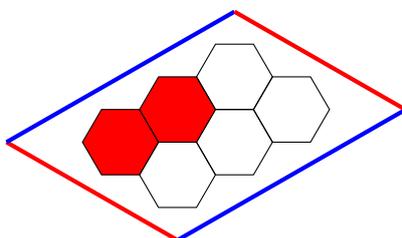
est égal à  $\uparrow$ . Alors que



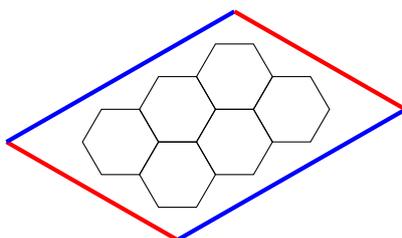
est l'étoile \* (parce que depuis ce jeu les bleus arrivent à  $\uparrow$  :



et les rouges arrivent à 0 :



donc le jeu se calcule comme l'étoile \*). Donc le jeu



est égal à  $\{\uparrow | *\} = \uparrow + \uparrow^2$ .

## 2 Le jeu Y

### 2.1 Triangle de côté 1

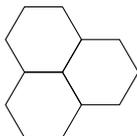
Le plus simple des jeux de Y est celui-ci :



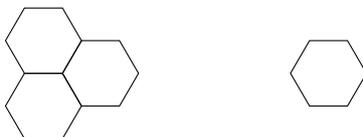
Comme pour le Hex à un hexagone, le jeu est l'étoile de Conway : le premier qui joue colorie l'hexagone et gagne.

## 2.2 Triangle de taille 2

Plus surprenant, le jeu suivant est aussi égal à l'étoile:

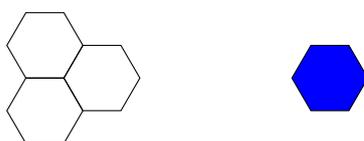


Pour le vérifier, on examine la somme de ce jeu et de l'étoile :

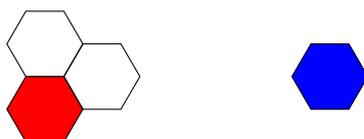


Par symétrie, on suppose que c'est aux bleus de jouer (les coups possibles pour les deux joueurs sont les mêmes).

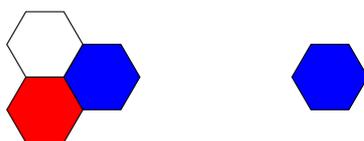
- S'ils annulent l'étoile,



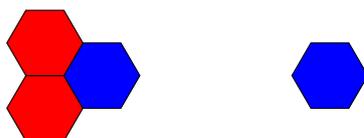
alors les rouges ont une stratégie gagnante consistant à colorier un des hexagones du Y à 3 hexagones :



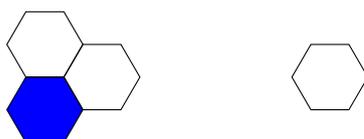
En effet, quoique fassent les bleus au coup suivant :



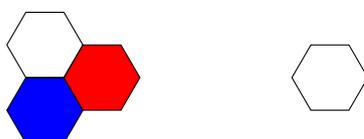
les rouges gagnent ensuite avec un chemin qui rejoint les trois bords du triangle :



- Si les bleus commencent par le triangle :

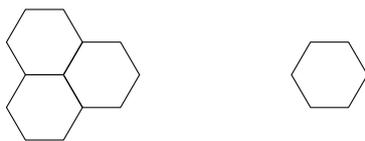


alors, là encore, les rouges ont une stratégie gagnante, consistant à colorier un autre hexagone du triangle :

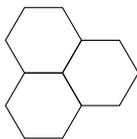


Il reste alors deux hexagones à colorier. Les bleus en colorient un, et les rouges gagnent en coloriant l'autre.

Puisque le jeu



permet de toute manière au second joueur de gagner, il est égal au nombre 0. Or l'étoile \* est son propre opposé, ce qui prouve que



est bien égal à l'étoile.