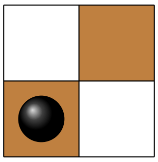
Étude du jeu alquerkonane sur un damier 2×2

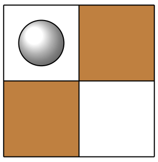
Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

10 janvier 2023

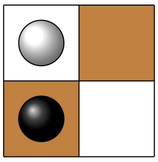
Les noirs avancent leur pion vers le haut et comme ce pion ne peut être que sur une case noire, c'est forcément ici qu'il est au début du jeu :



Et comme les blancs avancent leur pion vers le bas, il ne peut initialement être qu'ici :

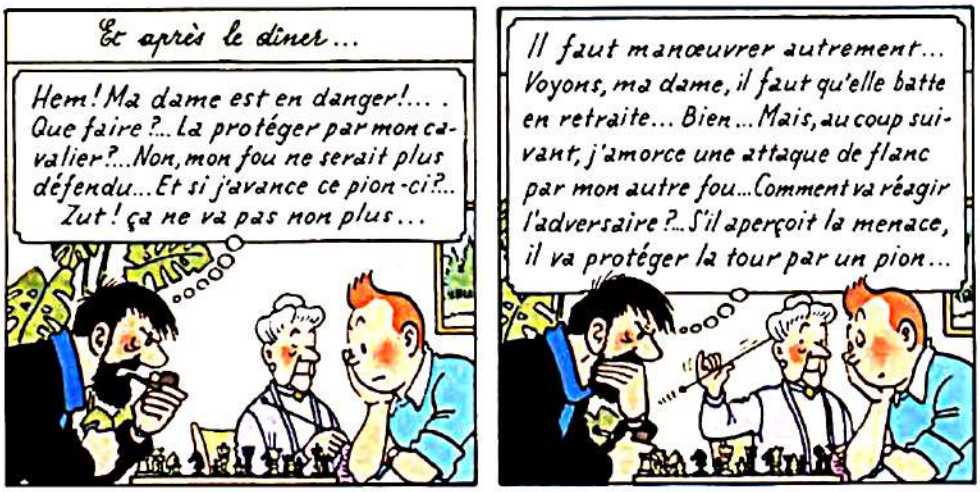


Voici donc la position initiale au jeu alquerkonane 2×2 :



Dans la construction de Conway, la valeur de ce jeu est zéro. Pour le vérifier, on va étudier séparément les cas où ce sont les noirs qui jouent en premier, et les cas où ce sont les blancs qui jouent en premier.

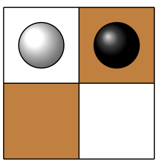
En effet pour évaluer une position de jeu, il ne faut pas seulement regarder quelles sont les options accessibles à chaque jouer, mais aussi lesquelles on peut obtenir à partir de chacune d'entre elles :



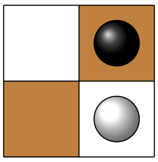
0.1 Graphe du jeu

0.1.1 Les noirs jouent en premier

En fait, l'unique pion noir ne peut pas sauter par dessus un pion blanc (il n'y a pas la place pour cela) donc la seule possibilité pour lui est d'avancer. Et il n'y a qu'une case vers laquelle il peut avancer. On passe donc à



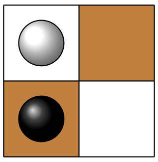
Maintenant c'est aux blancs de jouer. Eux aussi ne peuvent qu'avancer leur pion (vers le bas) donc on arrive à cette position :



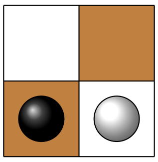
C'est maintenant aux noirs de jouer. Mais leur pion est déjà arrivé au bout et ne peut donc plus avancer : *les noirs ont perdu*. En fait les blancs aussi sont arrivés au bout donc si c'était à eux de jouer, ils auraient perdu aussi.

0.1.2 Les blancs jouent en premier

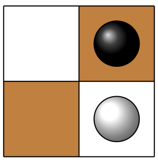
On rappelle la position de départ :



C'est aux blancs de jouer. La seule chose qu'ils puissent faire c'est avancer leur pion (vers le bas), pour aboutir à cette position :



C'est maintenant aux noirs de jouer. Ils ne peuvent faire qu'une chose : avancer leur pion vers le haut :

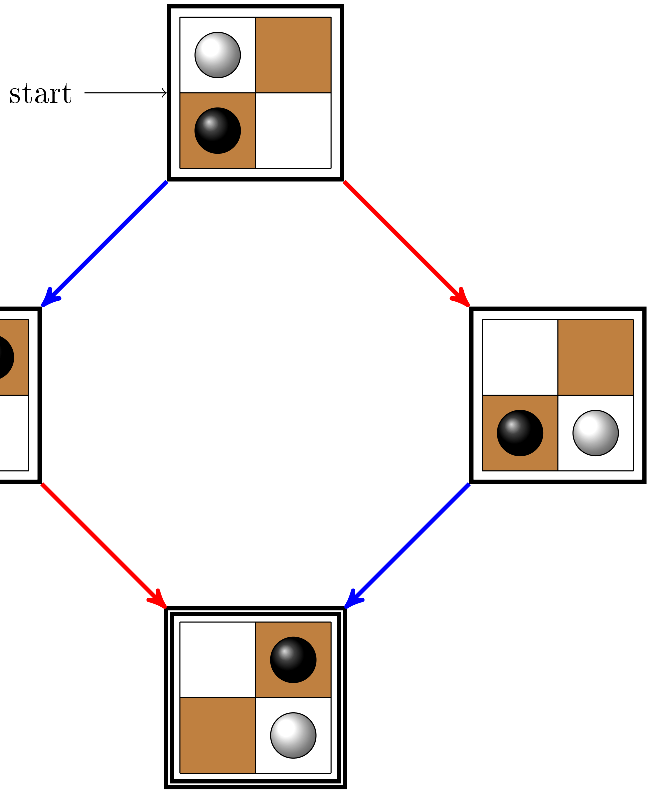


On a déjà vu cette position : aucun joueur ne pouvant bouger, elle est considérée comme nulle par Conway. En tout cas, puisque c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent pas avancer leur pion et donc *les blancs ont perdu*.

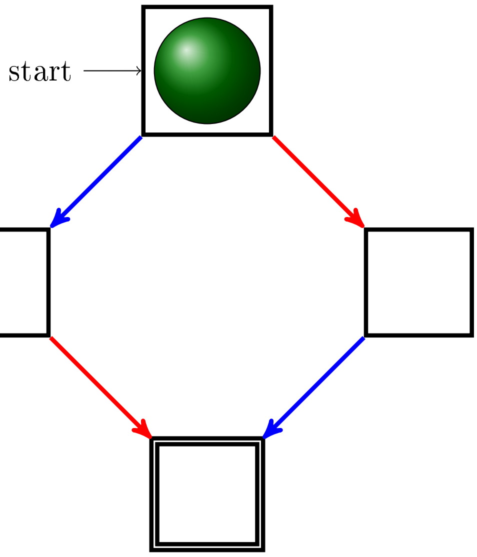
Finalement, le premier qui joue le jeu alquerkonane 2×2 perd ce jeu. Conway lui attribue donc la valeur zéro. On peut voir cela sur le graphe du jeu :

0.1.3 Le graphe du jeu

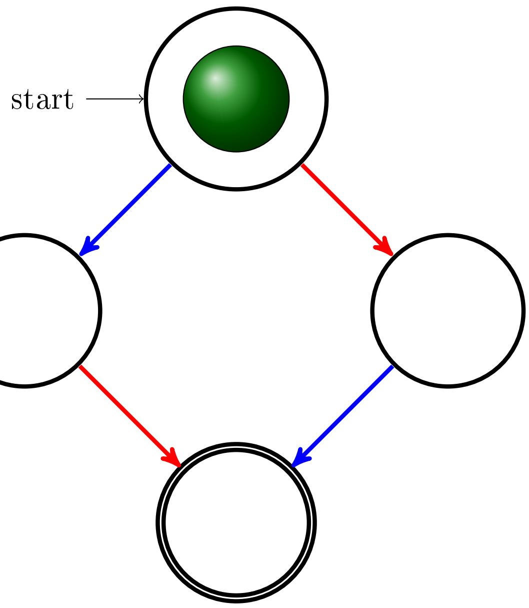
Une flèche bleue veut dire que ce sont les noirs qui jouent, une flèche rouge veut dire que ce sont les blancs qui jouent :



Le jeu alquerkonane 2×2 est donc équivalent à ce jeu de Nim bicolore (les noirs n'ont le droit d'avancer le pion vert que le long d'une flèche bleue, les blancs n'ont le droit d'avancer le pion vert que le long d'une flèche rouge) :



Le double trait en bas signifie qu'aucune flèche ne part de ce sommet : c'est *l'état final* de l'automate. On le voit mieux si on dessine les sommets du graphe en forme de ronds :

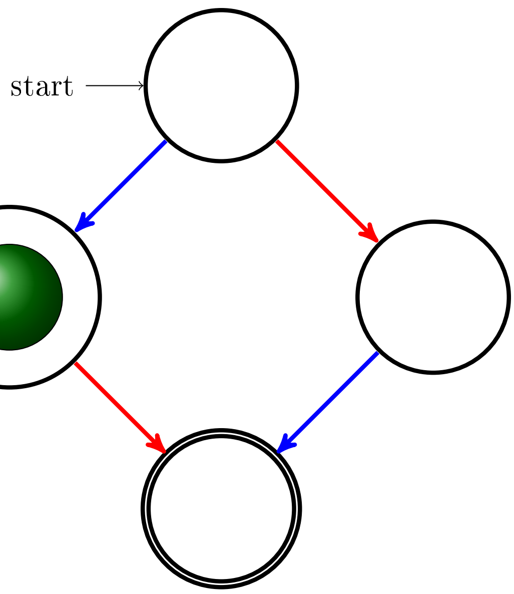


0.2 Un jeu à la Con(way)

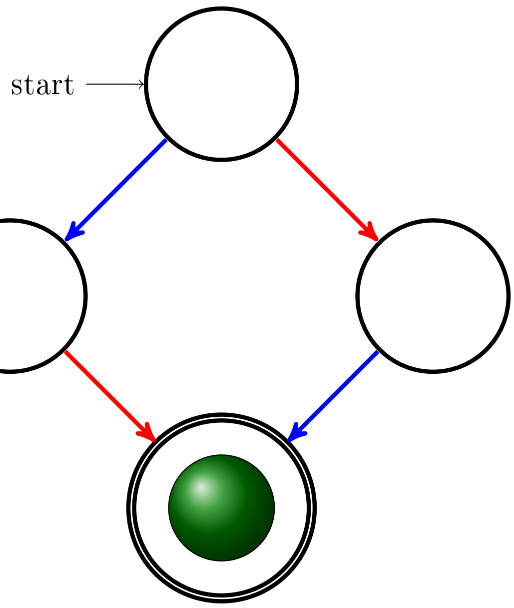
Les joueurs avancent le pion vert, chacun son tour, sur le graphe ci-dessus. Le premier qui ne peut plus avancer l'unique pion, a perdu le jeu.

0.2.1 Les noirs jouent en premier

Comme ils n'ont le droit d'avancer le pion que le long d'une flèche bleue, ils ne peuvent aboutir qu'à ceci :



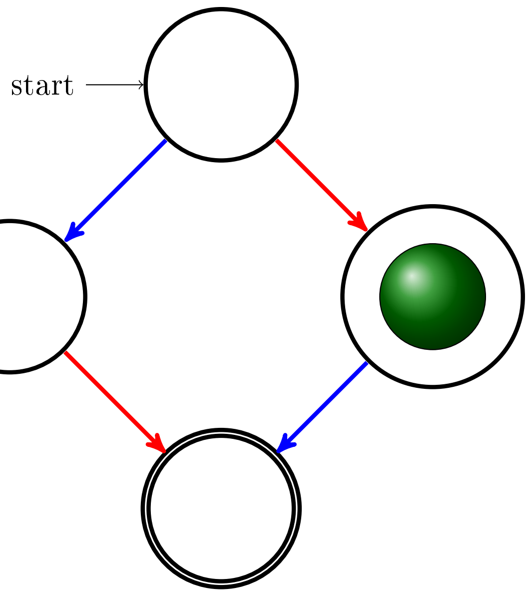
C'est maintenant aux blancs de jouer. Ils avancent alors le pion vert le long de la flèche rouge pour aboutir à la situation finale :



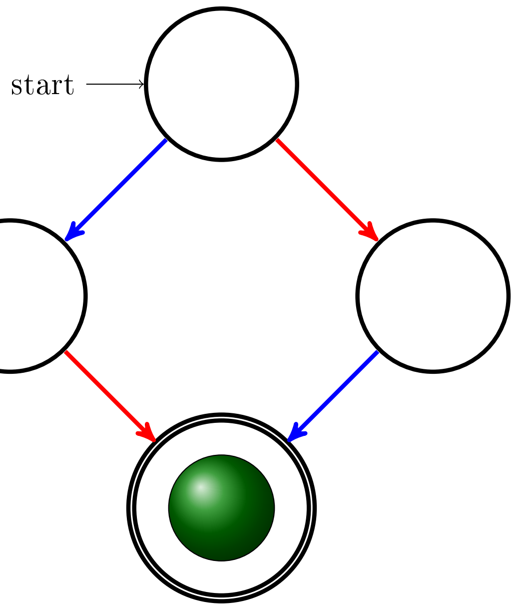
Les noirs devraient jouer mais ne peuvent pas, puisqu'il n'y a aucune flèche bleue partant de l'arrivée : ils ont perdu.

0.2.2 Les blancs jouent en premier

Comme ils ne peuvent avancer le pion vert que le long d'une flèche rouge, ils ne peuvent aboutir qu'à



C'est maintenant aux noirs de jouer. Ils avancent le pion vert le long de la flèche bleue, et arrivent à la situation finale :



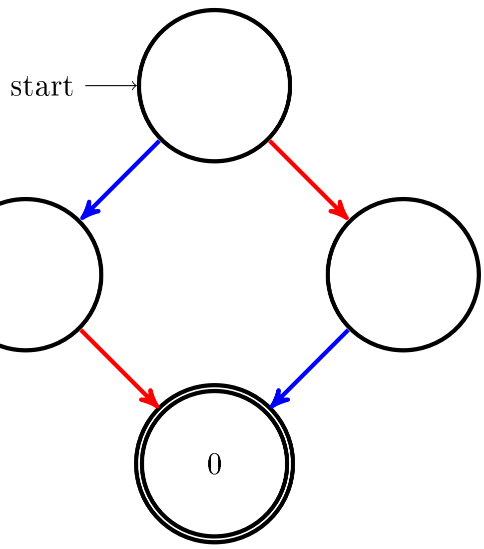
C'est maintenant aux blancs de jouer, mais ils ne peuvent pas avancer le pion le long d'une flèche rouge, car il n'y a aucune flèche rouge partant de l'arrivée. Les blancs ont perdu.

0.3 Analyse du jeu

On peut calculer les valeurs du jeu directement sur le graphe. On part de l'arrivée et on remonte vers le départ.

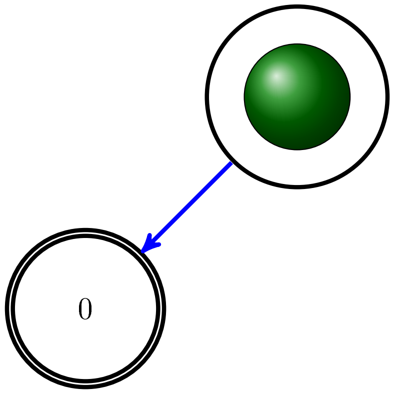
0.3.1 Le nombre 0

Si le pion vert est à l'arrivée, personne ne peut le bouger. Donc si c'est aux noirs de jouer, ils perdent et si c'est aux blancs de jouer, ils perdent. Conway donne à ce genre de (position de) jeu la valeur zéro. On inscrit alors le chiffre 0 dans le sommet d'arrivée :

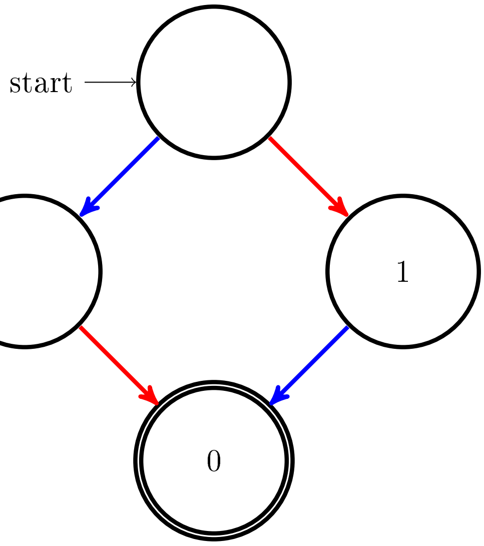


0.3.2 Le nombre 1

Dans ce jeu, les noirs peuvent arriver à 0 (ce qui fait perdre les blancs) alors que les blancs ne peuvent rien faire :

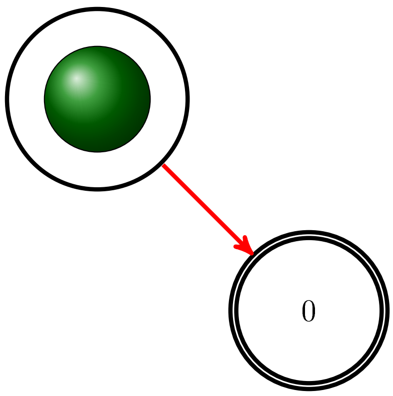


Les noirs ont donc un coup d'avance sur les blancs, et ce jeu vaut 1 (on compte positivement pour les noirs) :

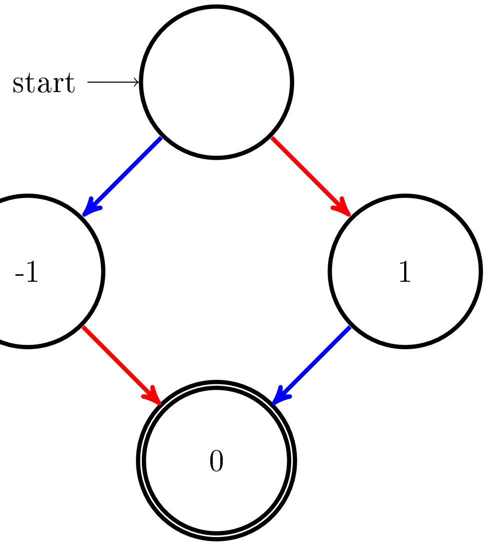


0.3.3 Le nombre -1

Dans ce jeu, les noirs ne peuvent plus rien faire, alors que les blancs peuvent arriver à 0 :



Les blancs ont donc un coup d'avance sur les noirs. Comme on compte positivement du point de vue des noirs, ce jeu a pour valeur -1. On inscrit cette valeur dans le graphe :



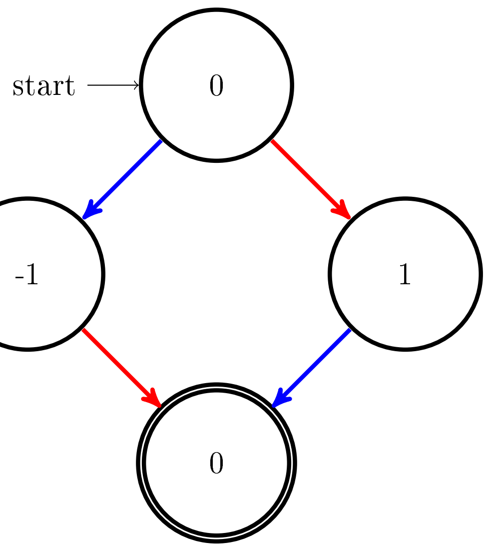
Maintenant, on peut calculer la valeur du sommet de départ, puisqu'on connaît les valeurs auxquelles peuvent arriver les deux joueurs depuis celle-ci : si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à -1 et si c'est aux blancs de jouer ils arrivent à 1.

0.3.4 Et alors ? Et alors ?

Zéro est arrivé ! En effet

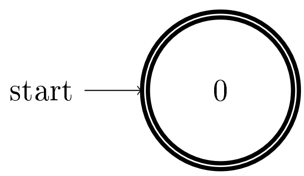
- selon Conway, si toute option des noirs (ici c'est -1) est inférieure à toute option des blancs (ici c'est 1) alors le jeu est un nombre (c'est la définition d'un nombre selon Conway).
- Il s'agit en l'occurrence du nombre le plus simple compris entre -1 et 1 : c'est 0.
- D'ailleurs on a vu plus haut que le prochain joueur est le perdant. C'est ainsi que Conway définissait le nombre 0.

On a donc fini de numéroter le graphe :



0.3.5 Le zen du zéro

Du coup le jeu alquerkonane 2×2 a la même valeur que le jeu



et donc on pouvait tout aussi bien ne pas jouer du tout, puisque le premier qui joue sait qu'il va perdre. On peut dire que le jeu ci-dessus est la forme simplifiée du alquerkonane 2×2. Mais on peut détailler comment on a fait pour aller de zéro pour finalement y retourner.

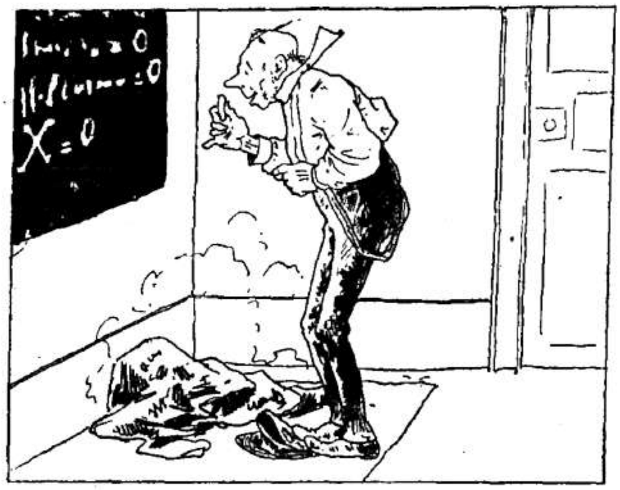
Le principe est simple, du moins tant qu'on est dans des nombres :

- chaque coup des noirs décrémente (fait baisser d'une unité) la valeur du jeu,
- chaque coup des blancs incrémente (fait monter d'une unité) la valeur du jeu.

Les noirs jouent en premier

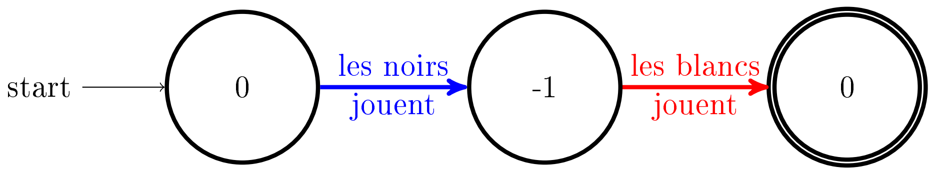
Au début, la valeur du jeu est 0. Mais comme ce sont les noirs qui jouent, ils la font passer à -1. Après cela, les blancs jouent et réaugmentent la valeur du jeu, la refaisant passer à 0.

Tout ça pour revenir à la valeur initiale qui était 0 ! En mathématiques, ce phénomène est bien connu, le résultat d'un calcul est souvent 0 :



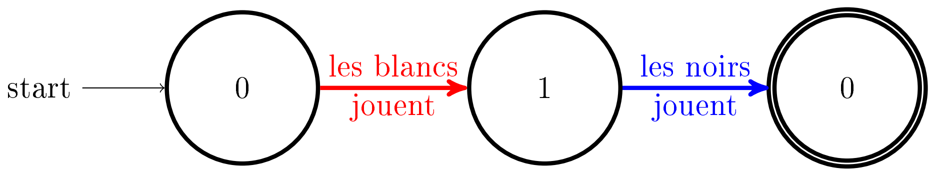
A trois heures et demie, le docteur découvre la valeur de x, l'inconnue cherchée; ce qui lui cause une joie sans mélange. — Nous prions les esprits superficiels de s'abstenir de toute réflexion sur la valeur de x, et de ne point prétendre que Zéphyrin a beaucoup travaillé pour peu de chose.

On peut résumer l'histoire de cette version du jeu (les noirs jouent en premier) dans un graphe orienté :



Les blancs jouent en premier

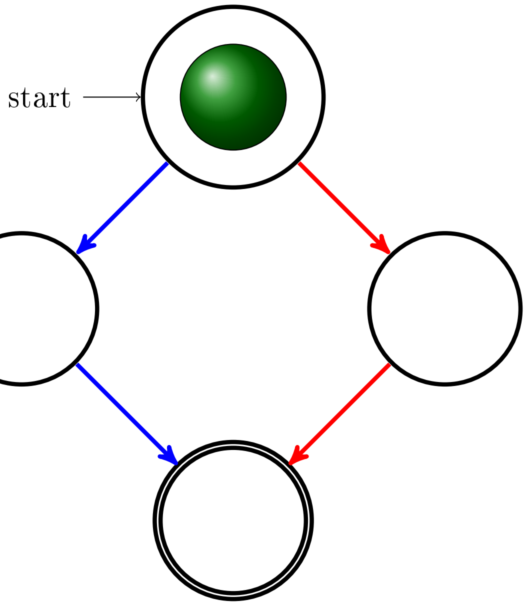
Au début du jeu, sa valeur est 0. Mais comme ce sont les blancs qui jouent, ils la font passer à 1. Mais ensuite les noirs jouent et refont passer la valeur à 0 :



En effet il est bien connu que lorsqu'on grimpe (ici, de 0 à 1) c'est souvent pour redescendre juste après :

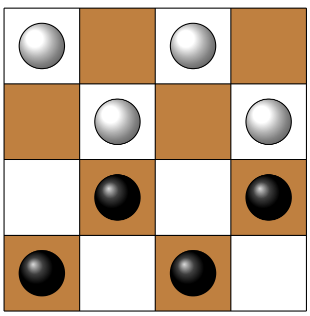
0.3.6 Les jeux ne sont pas tous des nombres

Tant qu'on est sur les graphes, que se passe-t-il si on change juste deux couleurs de flèches ? Comme ici :



- Si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 1 qui les fait gagner. Ce jeu n'est donc pas négatif puisqu'il n'est pas certain que les blancs gagnent.
- Il n'est pas nul non plus car sinon (si les noirs jouent) les noirs perdraient. Or dans ce cas ils gagnent.
- Si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent à -1 qui les fait gagner. Comme il n'est pas certain que les noirs gagnent, ce jeu n'est pas positif non plus.

N'étant ni positif, ni négatif, ni nul, ce jeu n'est donc pas un nombre. Conway le note ± 1.
Conjecture : le jeu alquerkonane 4×4 semble être égal à ± 2.
Sa position initiale est celle-ci :

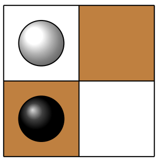


0.4 Résumé

Le jeu alquerkonane 2×2 est égal à zéro. Du moins, sa position de départ est nulle.

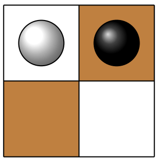
0.4.1 Position de départ

Ce jeu est donc égal à 0 :



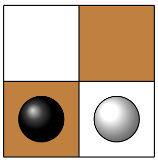
0.4.2 Jeu négatif

Ce jeu est égal à -1 :



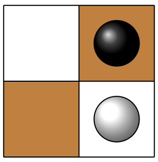
0.4.3 Jeu positif

Ce jeu est égal à 1 :



0.4.4 Position finale

Ce jeu (fin de partie d'alquerkonane 2×2) est aussi égal à 0 :



Sources des illustrations

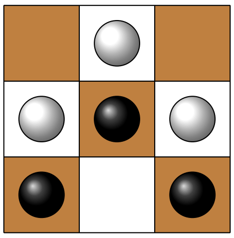
- Christophe, *L'idée fixe du savant Cosinus*, Armand Colin 1900
- Hergé, *Tintin au Tibet*, Casterman 1963

Étude du jeu alquerkonane sur un damier 3×3

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

24 janvier 2023

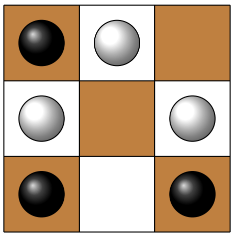
La position initiale du jeu alquerkonane 3×3 (sur un damier de 9 cases) est celle-ci :



Ce jeu est positif : que ce soit aux noirs de commencer, ou aux blancs, ce sont les noirs qui ont une stratégie gagnante.

0.1 Les noirs commencent

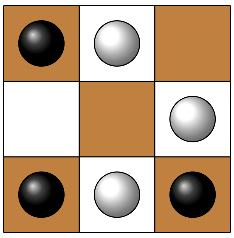
Il n'est pas dans l'intérêt des noirs, de commencer par prendre un pion blanc. Ils maximisent leur gain en glissant le seul pion qu'ils peuvent glisser :



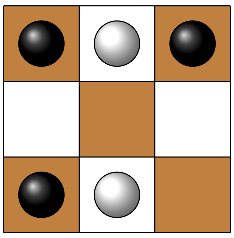
Les blancs peuvent alors avancer soit le pion de gauche, soit celui de droite.

0.1.1 Les blancs avancent le pion de gauche

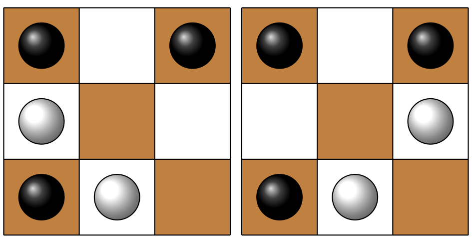
C'est dans leur intérêt car alors ils arrivent au nombre 1 qui fait gagner les noirs, mais de peu :



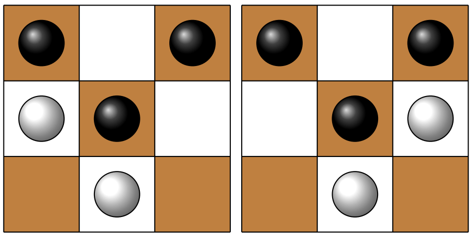
Les noirs ont maintenant intérêt à prendre un pion, bien que ce soit en avant :



Les blancs ne peuvent alors que glisser le seul pion qu'ils peuvent encore bouger, soit vers la gauche, soit vers la droite :



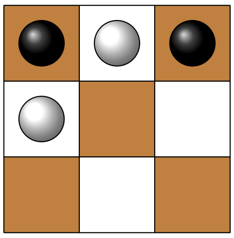
Dans les deux cas (qui valent 1), les noirs glissent un pion vers le centre, pour aboutir à deux situations qui sont symétriques l'une de l'autre :



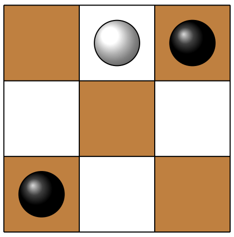
On ne décrira donc la suite de la stratégie gagnante, que sur la première d'entre elles.

Les blancs ont deux possibilités : prendre le pion noir central, vers l'arrière (le haut) ou vers le côté (la droite).

Les blancs prennent en arrière

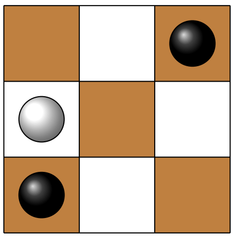


Dans ce cas les noirs également prennent en arrière, aboutissant à cette position :

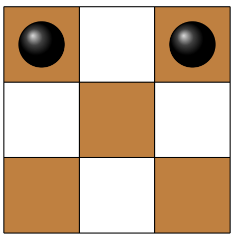


Alors les blancs n'ont plus qu'un pion à avancer, soit vers la gauche, soit vers la droite.

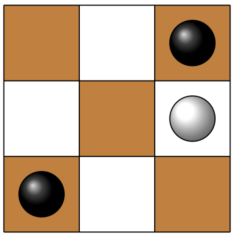
S'ils avancent vers la gauche, ils arrivent au nombre 1 :



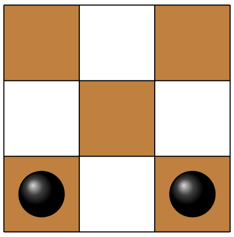
les noirs gagnant en prenant le pion blanc en avant (et arrivant à 0) :



Si les blancs avaient avancé leur pion vers la droite

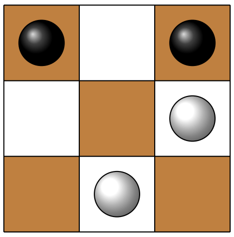


les noirs auraient pu prendre leur pion en arrière, arrivant alors au nombre 4 :

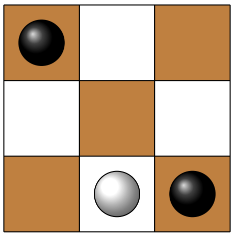


Les blancs n'avaient donc pas intérêt à glisser leur pion vers la droite.

Les blancs prennent sur le côté

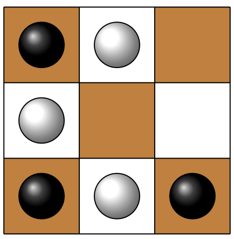


Alors les noirs prennent un pion blanc en arrière :

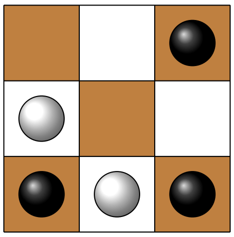


et peuvent encore bouger 3 fois leur pion (dont une prise latérale du pion blanc) alors que les blancs sont bloqués : la position à laquelle ont abouti les blancs vaut 4 pour les noirs.

0.1.2 Les blancs avancent le pion de droite

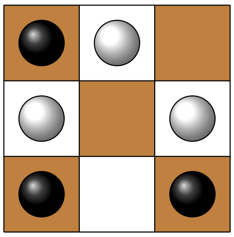


Les noirs, en prenant ce pion latéralement, peuvent aboutir au nombre 3 :



Les blancs, ne pouvant plus bouger, sont bloqués et ont donc perdu. Alors que les noirs auraient pu bouger avec 3 coups d'avance (prise en avant, prise latérale, avance vers le centre) sur les blancs. Cette situation n'est pas avantageuse pour les blancs qui n'avaient donc pas intérêt à avancer le pion de droite.

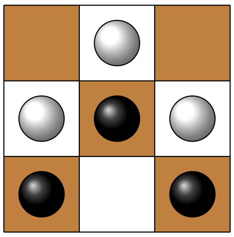
En résumé, depuis la position



les blancs ne pouvaient pas faire mieux que laisser un coup d'avance aux noirs, alors que si les noirs avaient dû rejouer depuis cette position, ils auraient également pu s'assurer un coup d'avance sur les blancs. Cette position n'est pas un nombre, mais elle est infiniment proche du nombre 1 (c'est la somme de 1 et de l'étoile, notée 1*).

0.2 Les blancs commencent

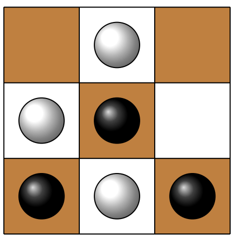
Les blancs, depuis la position initiale



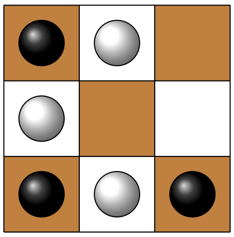
ont trois possibilités : avancer le pion de gauche, avancer le pion de droite (ce qui aboutit à une situation symétrique qu'on ne regardera donc pas), ou prendre le pion noir central.

0.2.1 Les blancs avancent un pion

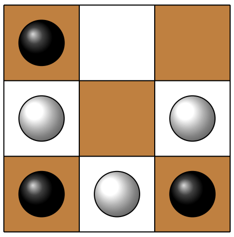
Par exemple s'ils avancent le pion de droite :



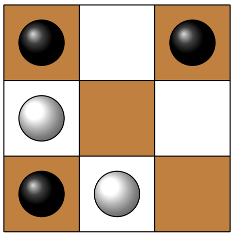
alors les noirs ont intérêt à avancer le pion central pour le mettre à l'abri :



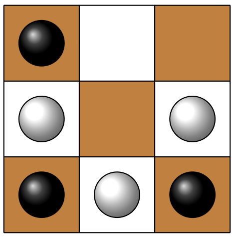
Alors, le seul pion que les blancs peuvent bouger, est celui du haut :



Les noirs peuvent alors gagner en prenant ce pion :

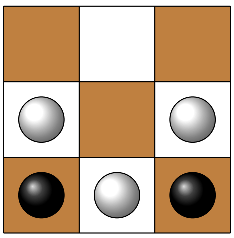


Les blancs, bloqués, ont perdu, alors que les noirs avaient encore 2 coups d'avance sur eux. La position

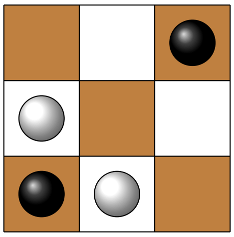


est donc égale au nombre 3, et le premier choix des blancs aboutissait donc à au moins 3. Il était donc peut-être moins catastrophique pour les blancs, de prendre un pion noir dès le début du jeu.

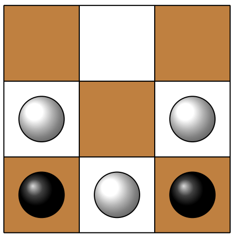
0.2.2 Les blancs prennent un pion



Les noirs ont intérêt à en faire de même (il leur reste toujours un autre pion à bouger, le cas échéant) :



Les blancs ont donc perdu (ils sont bloqués) alors que les noirs avaient encore deux coups d'avance. La position

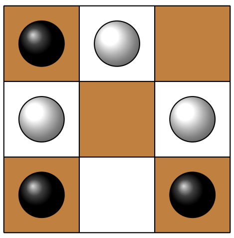


a donc pour valeur, le nombre 3. Les blancs n'avaient donc pas plus intérêt à prendre un pion noir, qu'à avancer un de leurs pions : dans les deux cas ils laissent une avance d'au moins 3 mouvements aux noirs.

0.3 Valeur du jeu alquerkonane 3×3

0.3.1 Le jeu est un nombre

Si les noirs commencent, ils aboutissent au jeu 1* qui est infiniment proche de 1 :

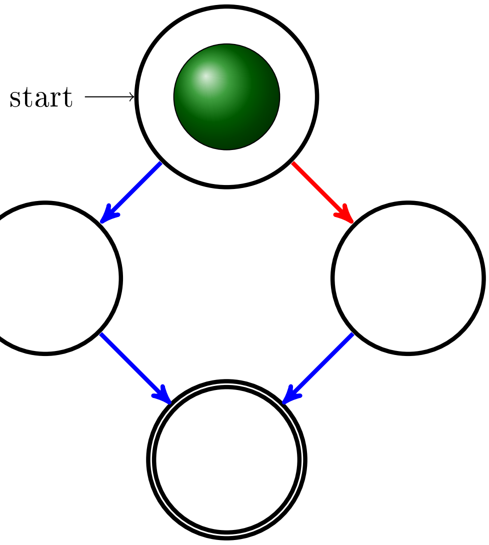


Alors que si les blancs commencent, ils aboutissent à 3. La valeur du jeu est donc un nombre : le nombre 1. C'est en effet le nombre le plus simple qui

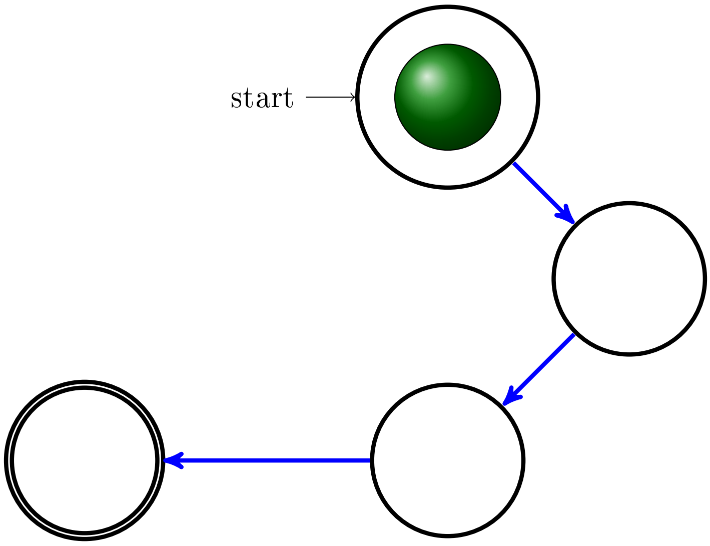
- ne soit pas plus petit que 1*,
- ne soit pas plus grand que 3.

0.3.2 Le graphe du jeu

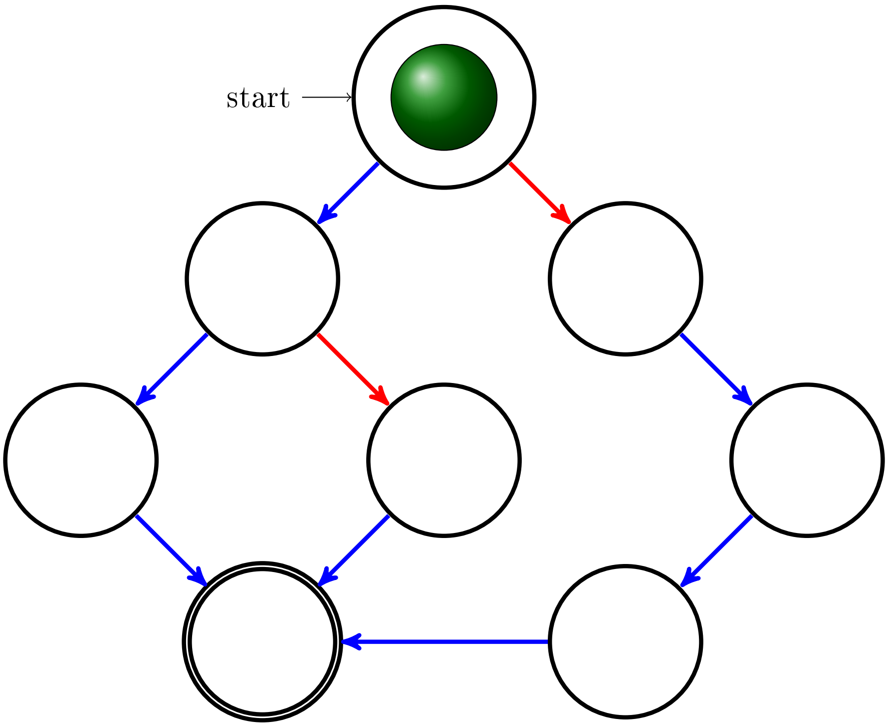
En assimilant les coups des noirs à des flèches bleues, et les coups des blancs à des flèches rouges, on représente le jeu 1* par ce graphe :



et le jeu 3 par ce graphe :



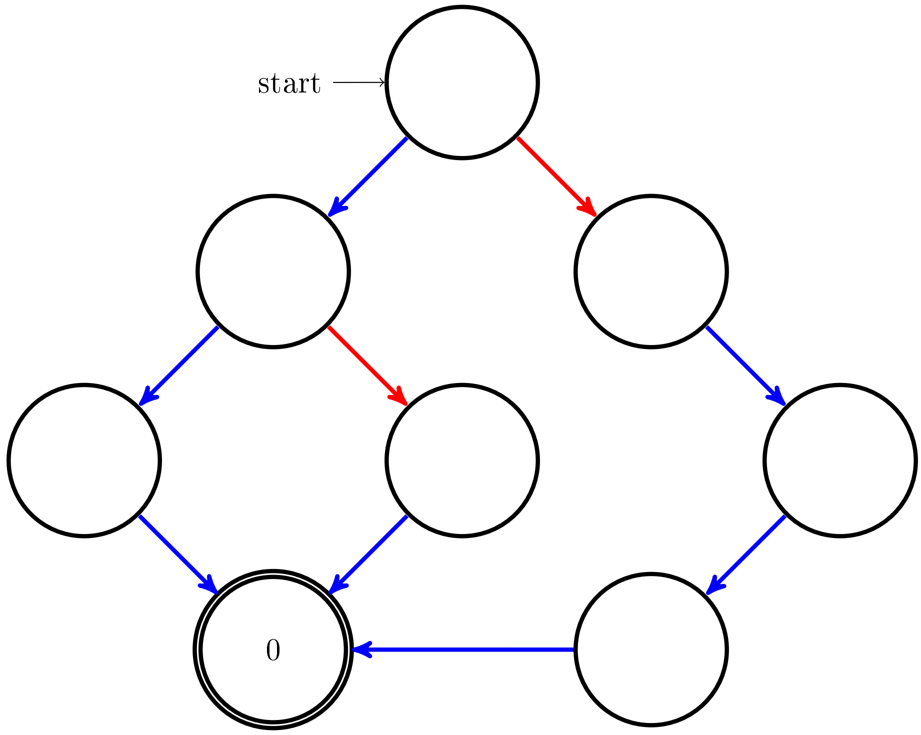
Et finalement la représentation graphique du jeu alquerkonane 3×3 est celle-ci :



On peut, sur ce graphe, recalculer la valeur du jeu.

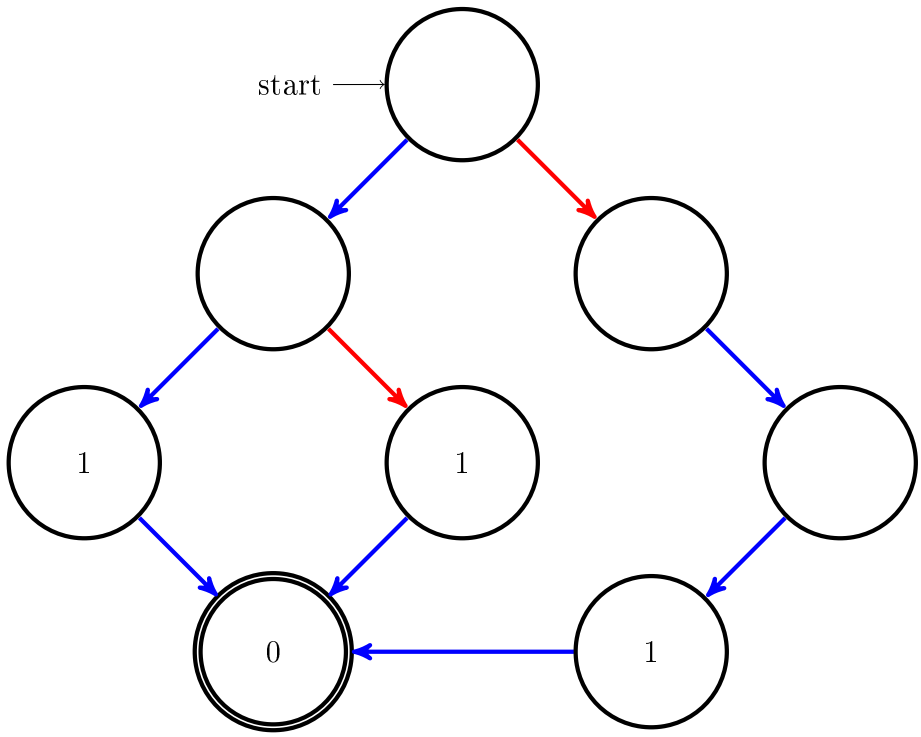
Initialisation

Le sommet d'arrivée est égal à 0 :



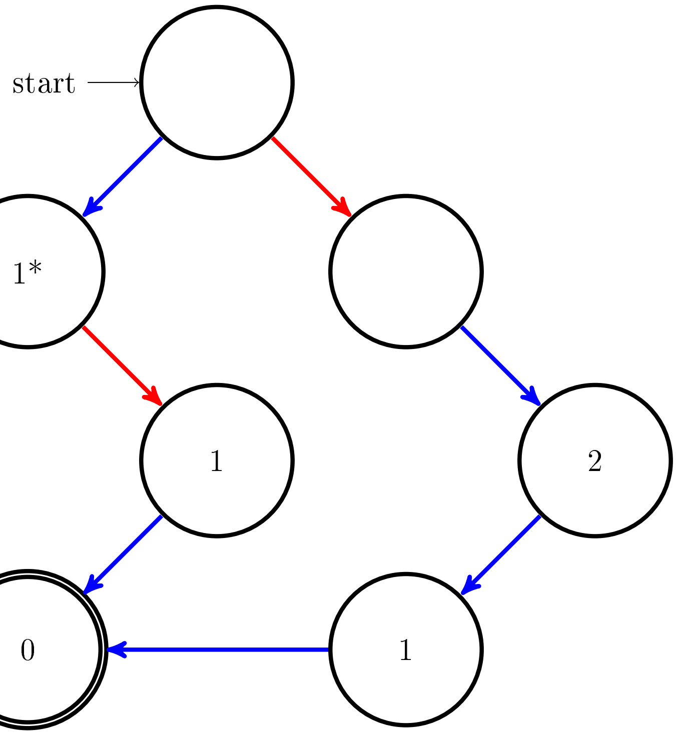
Première étape

Chacun de ses prédécesseurs immédiats ne va vers lui que par une flèche bleue, et vaut donc 1 :



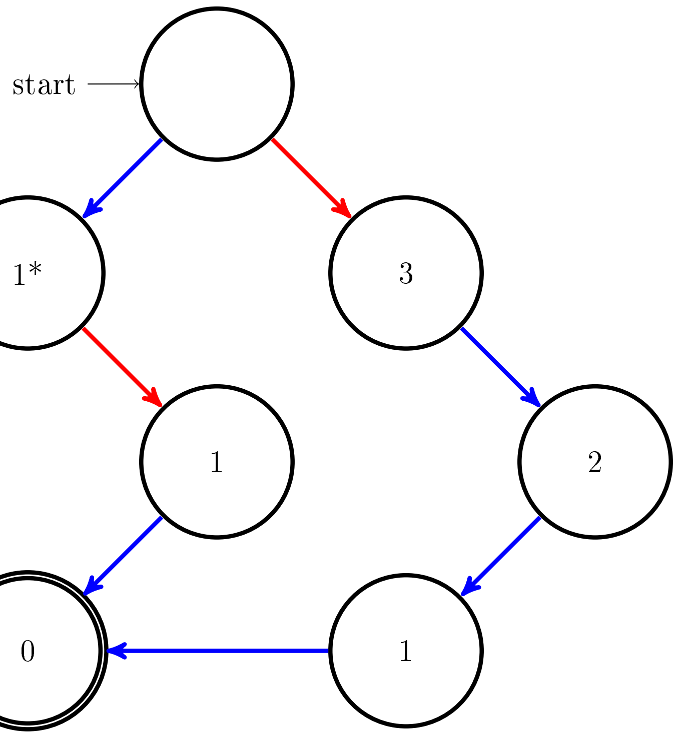
Seconde étape

Il y a un sommet qui mène à 1 par une flèche bleue ou une flèche rouge, il vaut donc 1*. Et le sommet qui ne mène qu'à 1, et que par une flèche bleue, est égal à 2 :



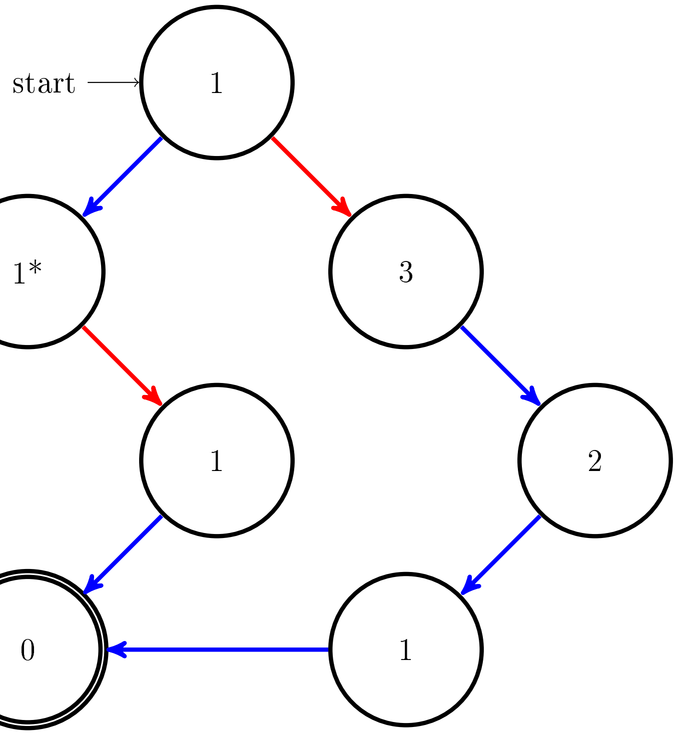
Troisième étape

Le sommet ne menant qu'à 2, et que par une flèche bleue, vaut 3 :



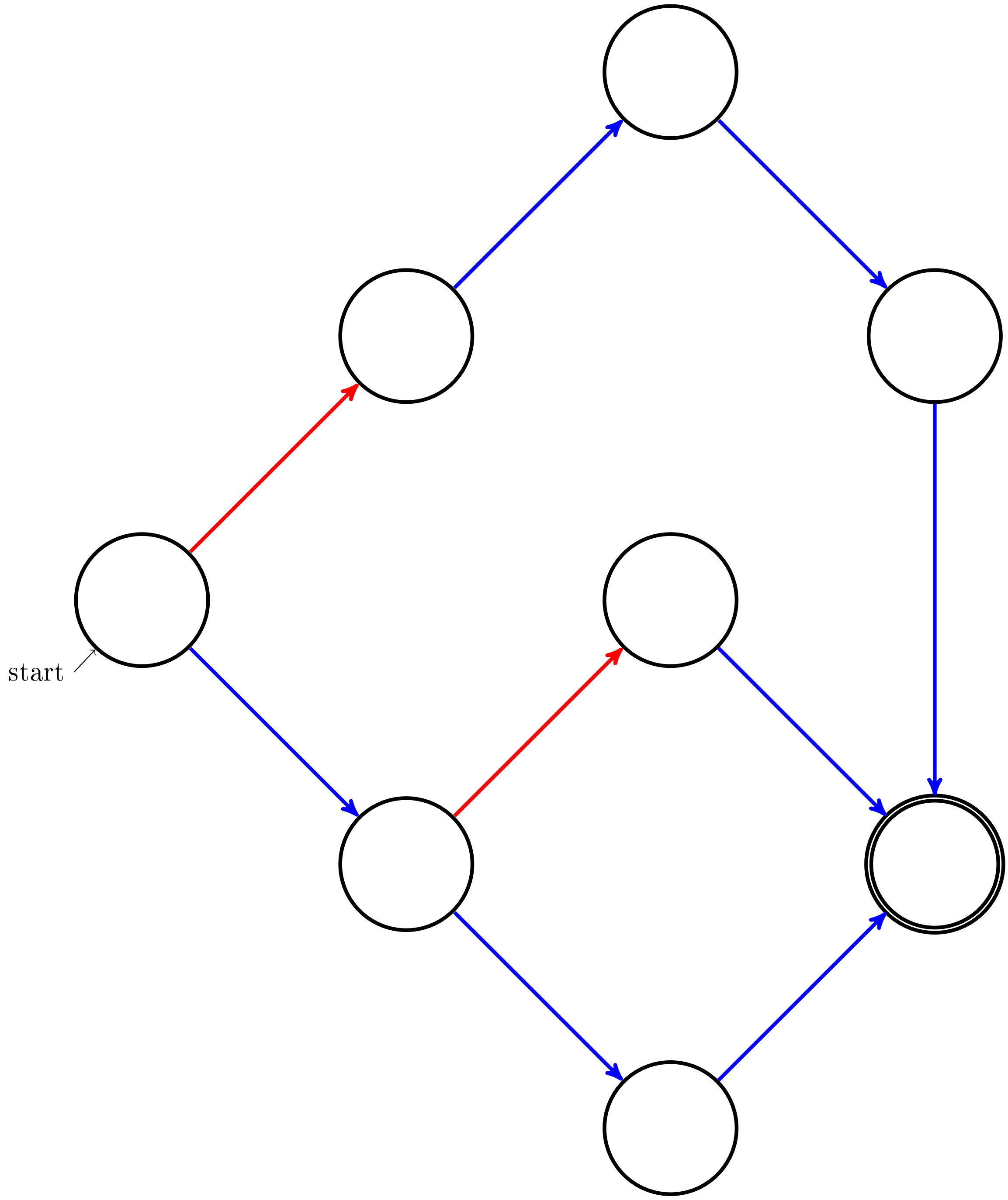
Conclusion

Le jeu vaut donc 1 :



0.4 Plateau du jeu

Pour jouer avec un pion :

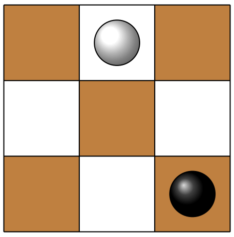


Une fraction dans alquerkonane sur un damier 3×3

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

4 février 2023

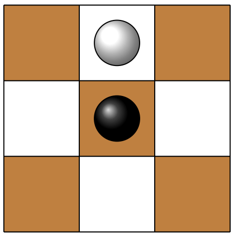
On va étudier cette position sur un damier alquerkonane 3×3 :



Ce jeu est négatif : que ce soit aux noirs de commencer, ou aux blancs, ce sont les blancs qui ont une stratégie gagnante.

0.1 Les noirs commencent

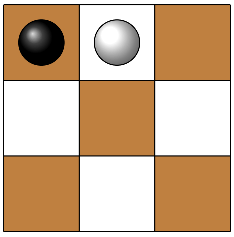
Ils ne peuvent qu'amener leur unique pion au centre :



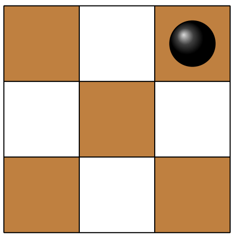
et ainsi, vont perdre parce que la valeur de cette position est -1 (avantage d'un coup pour les blancs). En effet

0.1.1 Si c'est aux noirs de jouer

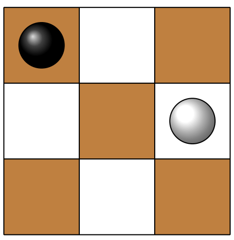
Ils ne peuvent qu'avancer (une seule possibilité, à symétrie près) :



Cette position n'est pas un nombre. En effet, depuis cette position, les noirs peuvent arriver à 0 :



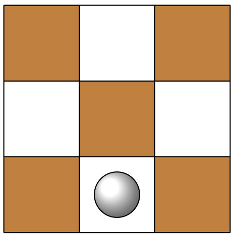
et les blancs, à -1 (ils jouent au mieux donc évitent l'autre option qui est 2 et les fait perdre) :



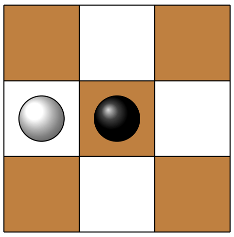
Comme 0 n'est pas plus petit que -1, la position n'est pas un nombre. Mais elle est plus grande que tous les nombres inférieurs à -1, et plus petite que tous les nombres positifs.

0.1.2 Si c'est aux blancs de jouer

Ils peuvent prendre le pion noir et arriver à 0 (donc gagner) :



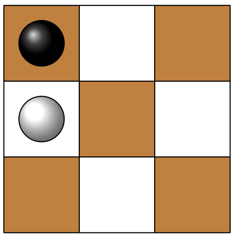
Mais ils peuvent faire mieux (de leur point de vue) :



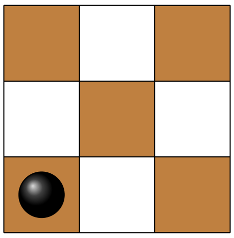
Cette position n'est pas un nombre, mais elle est globalement à l'avantage des blancs (elle est inférieure à tout nombre positif).

Si c'est aux noirs de jouer

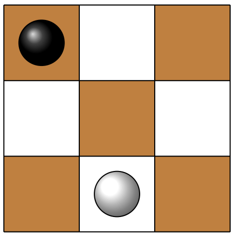
Le mieux qu'ils puissent faire est de menacer le pion blanc :



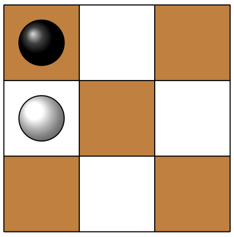
Depuis cette position, les noirs (si c'était à eux de jouer) gagnent en prenant le pion blanc, arrivant à 2 (coups d'avance sur les blancs)



alors que les blancs gagnent en arrivant à 0 :



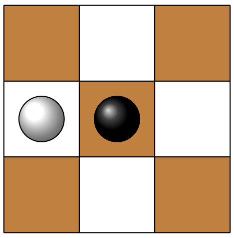
La position



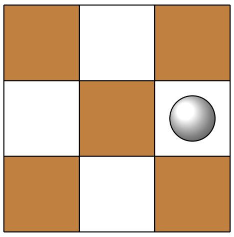
n'est donc pas un nombre puisque 2 n'est pas inférieur à 0, mais elle est plus grande que tout nombre négatif, et plus petite que tout nombre supérieur à 2.

Si les blancs rejouaient

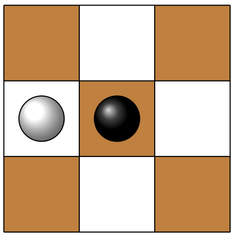
Il leur suffirait, depuis cette position,



de prendre le pion noir



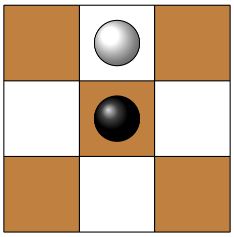
pour arriver au nombre -1 (ils ont un coup d'avance sur les noirs). La position ci-dessous



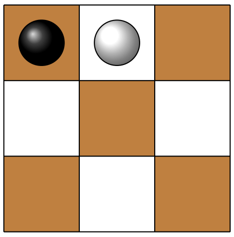
n'est pas non plus un nombre : elle permet aux noirs d'accéder à une position non numérique mais supérieure à tout nombre négatif (en particulier à -1), et aux blancs d'arriver à -1, donc la position à laquelle accèdent les noirs n'est pas inférieure à -1. Mais la position en question, même si elle n'est pas un nombre, est néanmoins à la fois supérieure à tout nombre inférieure à -1, et inférieure à tout nombre positif. Elle est donc suffisamment à l'avantage des blancs, pour que la position de départ soit négative.

0.1.3 Récapitulation

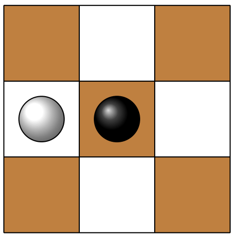
Depuis la position



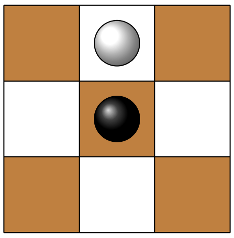
les noirs peuvent arriver à



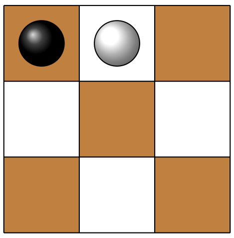
qui est supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif, alors que les blancs peuvent arriver à



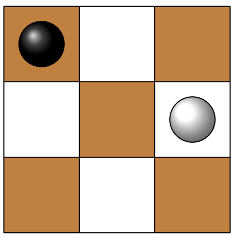
qui est également supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif. Il résulte de la théorie thermodynamique de Berlekamp et Conway, que



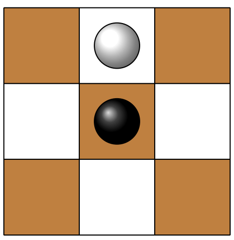
est égal à -1. On peut le vérifier, en faisant jouer les noirs (une fois, au mieux) puis les blancs (une fois, au mieux). On a d'abord



puis

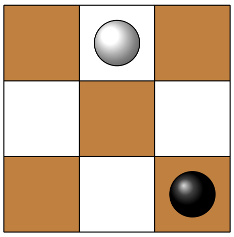


Cette position est équivalente à



et on voit qu'elle donne un coup d'avance aux blancs : elle vaut -1.

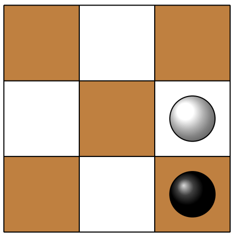
En résumé, si les noirs commencent le jeu initial,



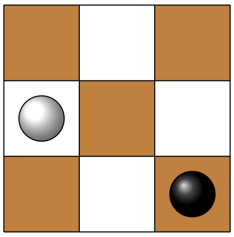
ils perdent (et même en laissant un coup d'avance aux blancs puisque la position à laquelle ils arrivent vaut -1). Le jeu initial est donc négatif ou nul.

0.2 Les blancs commencent

Depuis le jeu initial, les blancs peuvent se suicider en avançant leur pion devant le pion noir :



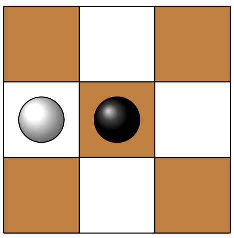
mais ils peuvent faire mieux :



Cette position vaut 0 (qui les fait gagner) :

0.2.1 Les noirs jouent

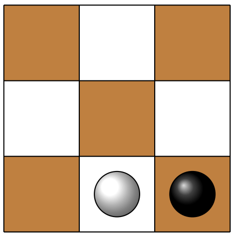
Ils ne peuvent arriver qu'ici :



Cette position a déjà été examinée : ce n'est pas un nombre mais elle est supérieure à tout nombre inférieur à -1, et inférieure à tout nombre positif. Les noirs, qui ont commencé, perdent (les blancs prennent le pion noir et arrivent à -1).

0.2.2 Les blancs rejouent

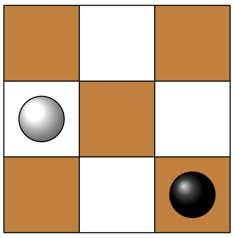
Dans ce cas, ils perdent :



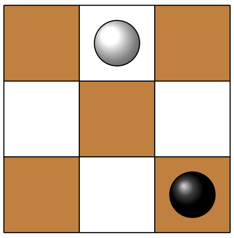
En effet, les noirs prennent le pion blanc et arrivent au nombre 2, alors que les blancs n'avaient aucune option. La position ci-dessus est donc égale au nombre 3 : les noirs peuvent encore bouger 3 fois (prendre le pion blanc puis avancer 2 fois) alors que les blancs ne peuvent plus bouger.

0.2.3 Récapitulation

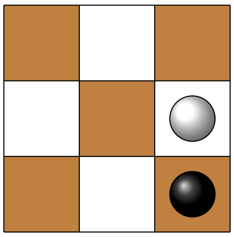
Depuis la position



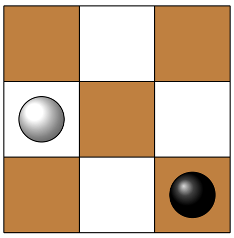
le prochain qui joue perd donc cette position est le nombre 0.
Depuis la position



les blancs peuvent donc aller, ou bien à 1 :



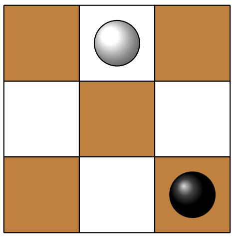
(ce qui n'est pas dans leur intérêt), ou bien à 0 :



ce qu'ils font évidemment, puisqu'ainsi ils gagnent.

0.3 Valeur du jeu initial

Finalement, depuis le jeu



les noirs vont à la position -1 qui les fait perdre, et les blancs vont à 0 (qui les fait gagner) ou 1 (qui les fait perdre). Comme -1 est inférieur à la fois à 0 et à 1, le jeu étudié est un nombre. On a vu que ce nombre est négatif. En fait il est

- supérieur à la plus grande option des noirs qui est -1,
- inférieur à la plus petite option des blancs qui est 0.

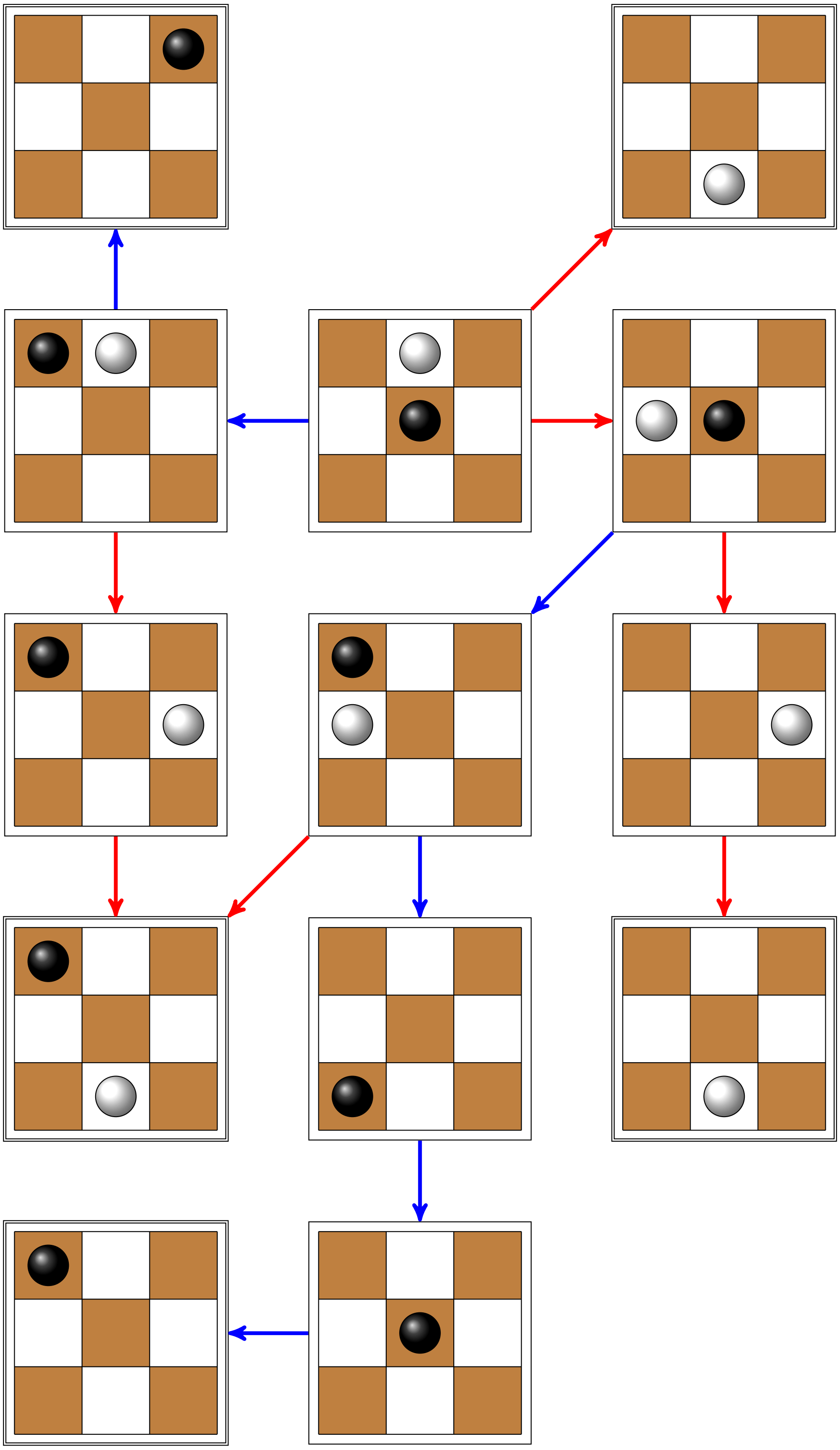
Il s'agit donc du nombre le plus simple possible qui soit strictement compris entre -1 et 0, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}$.

0.4 Graphe

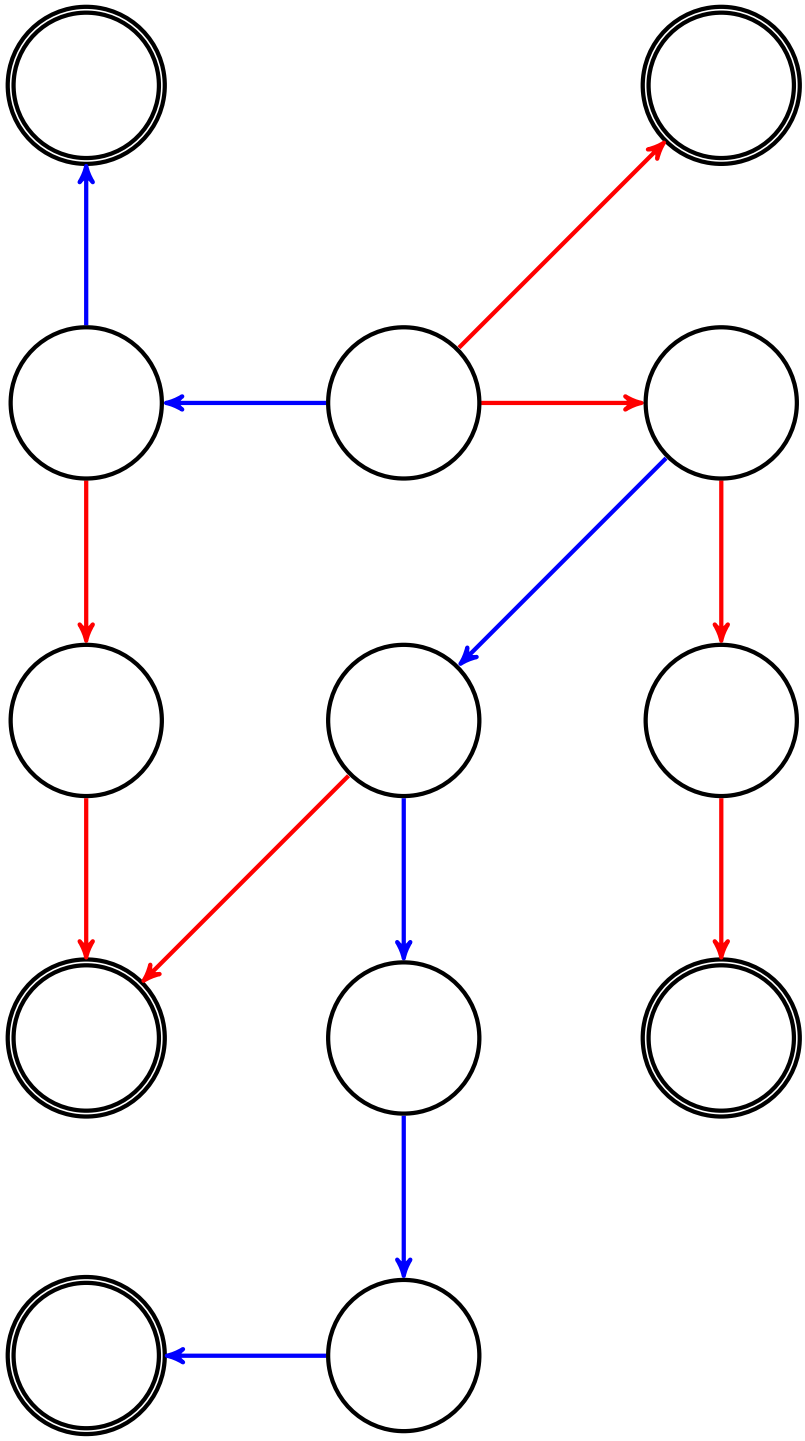
On représente les mouvements possibles des noirs par des flèches bleues, les mouvements possibles des blancs par des flèches rouges.

0.4.1 Option des noirs

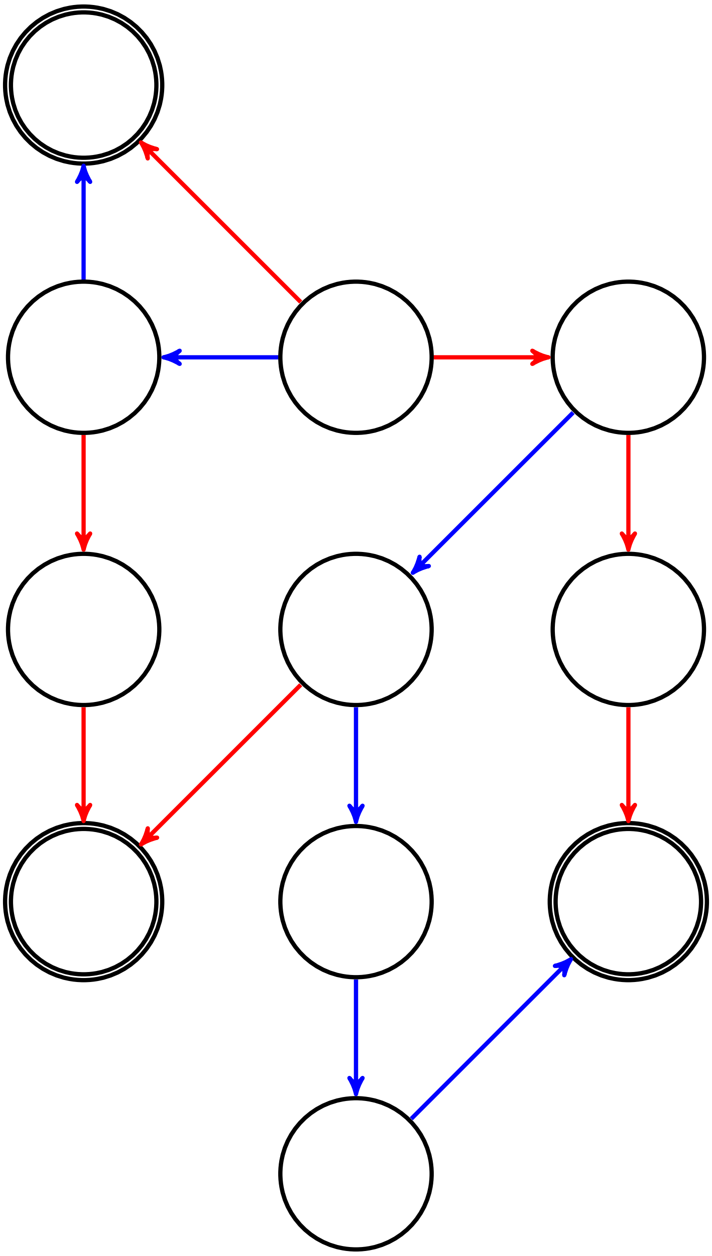
On commence par construire l'arbre du jeu (en fait, une partie de l'arbre, parce qu'on suppose que les blancs ne vont pas perdre lorsqu'ils peuvent gagner), et ensuite on va simplifier cet arbre, en le transformant en un graphe.



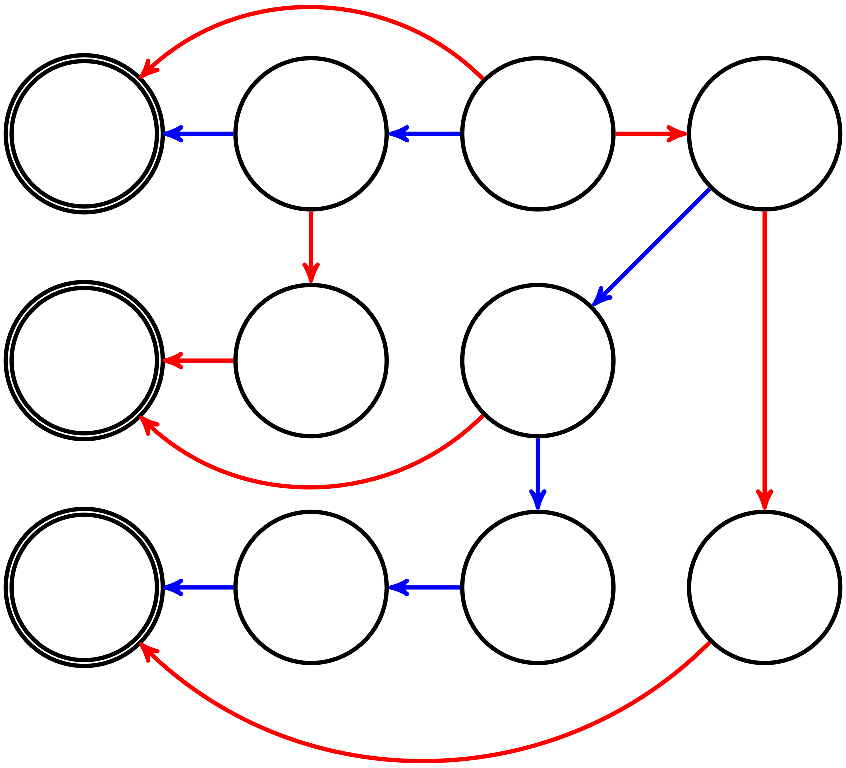
En vidant les étiquettes des sommets du graphe, il devient ceci :

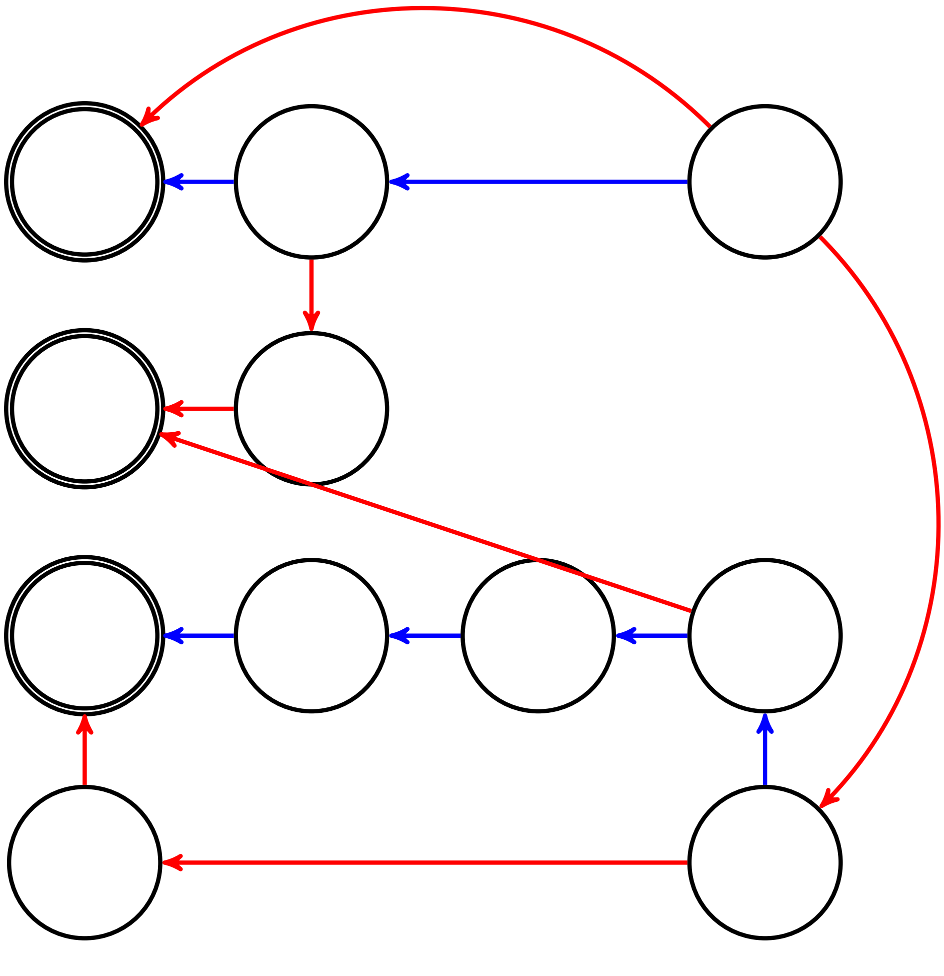


Une simplification apparaît alors, puisque les sommets valant 0 (doubles cercles) peuvent être fusionnés. D'abord

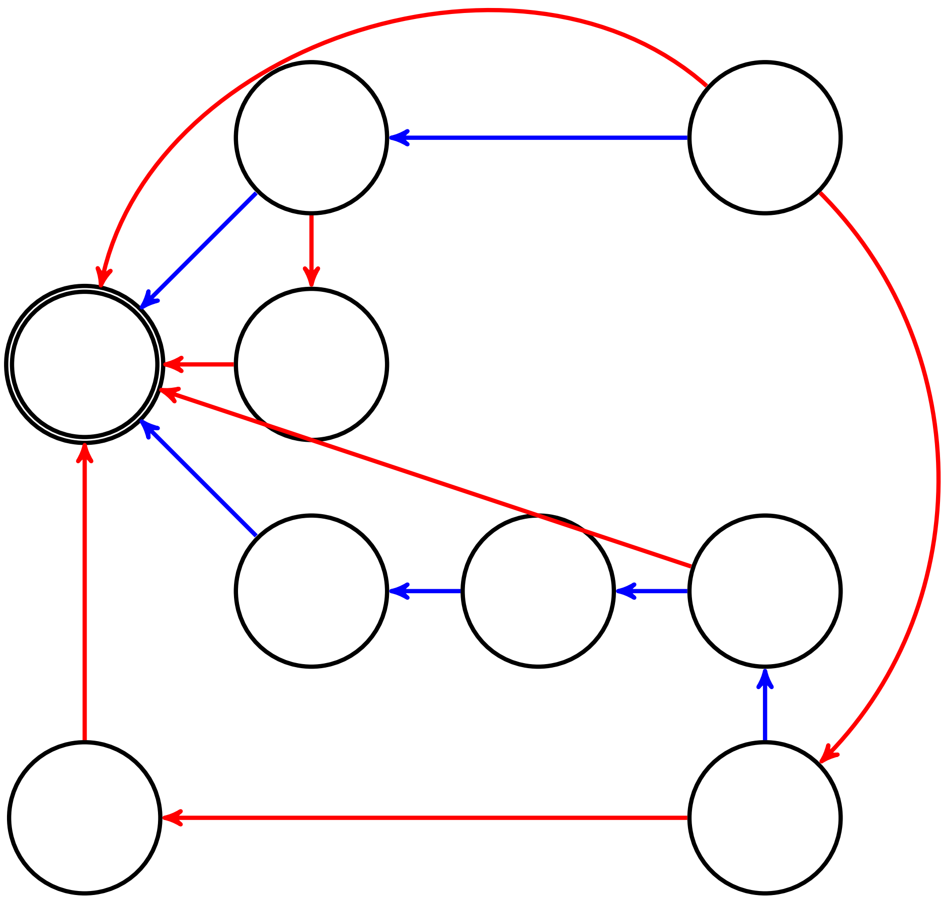


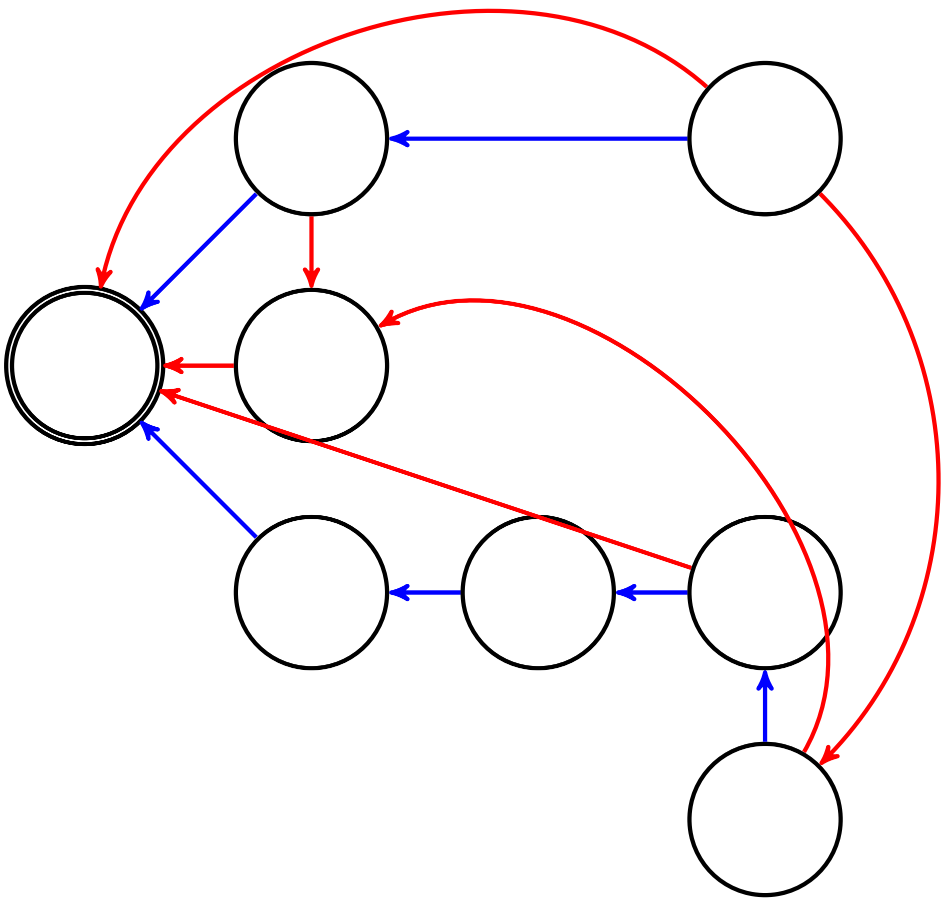
puis d'autres représentation du même graphe :



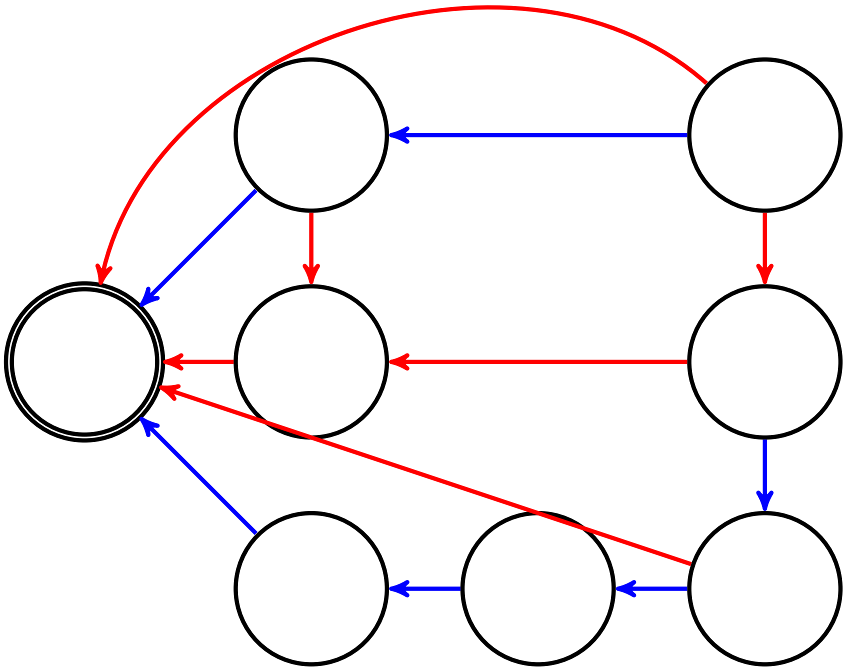


ce qui amène à de nouvelles simplifications :

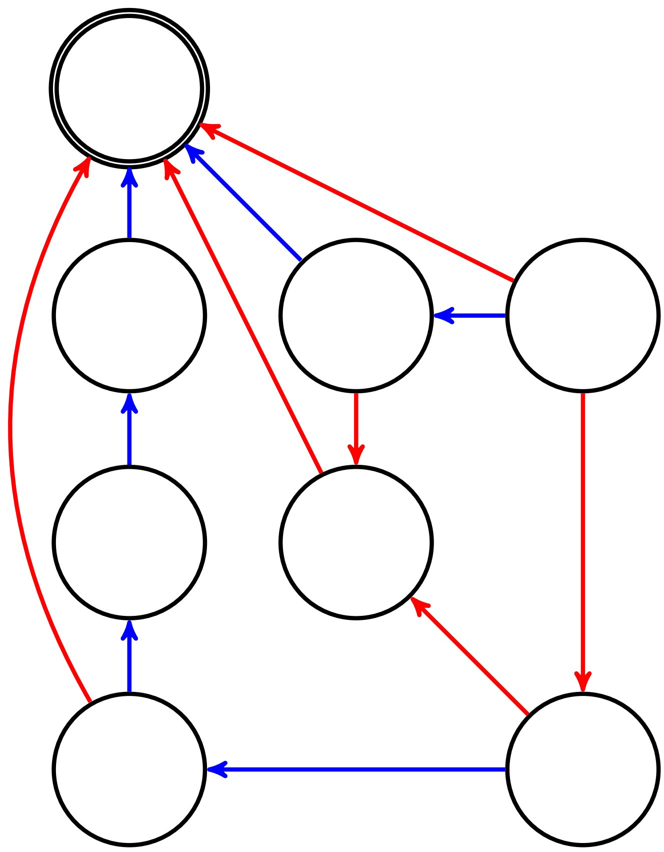




Le graphe devient

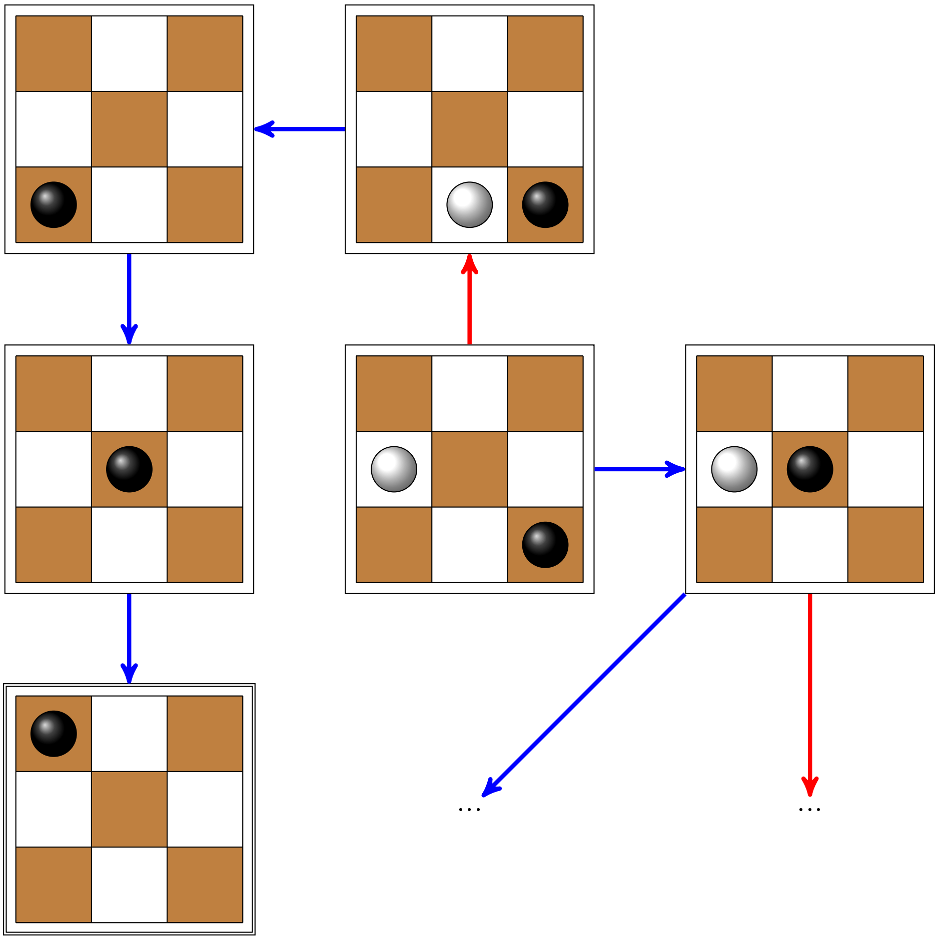


puis

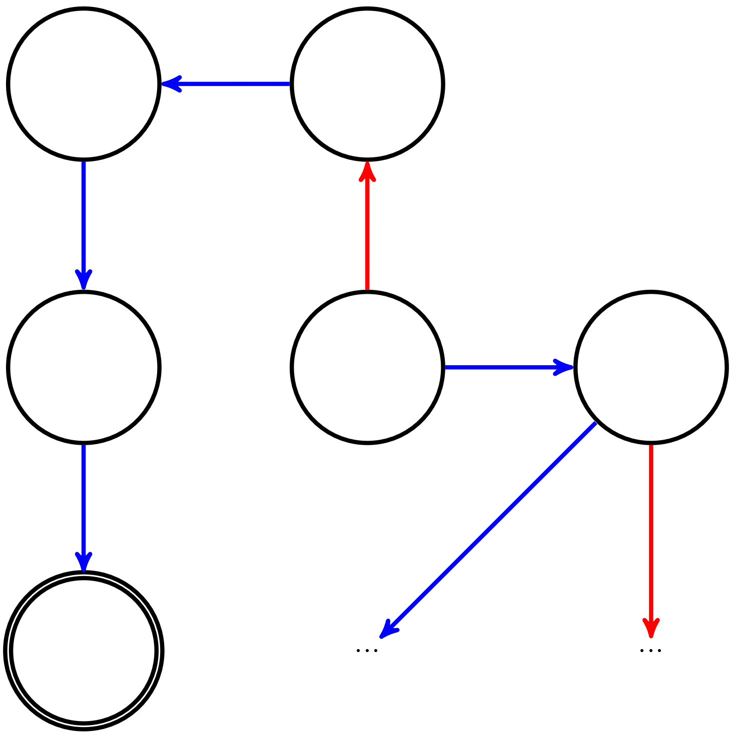


0.4.2 Option des blancs

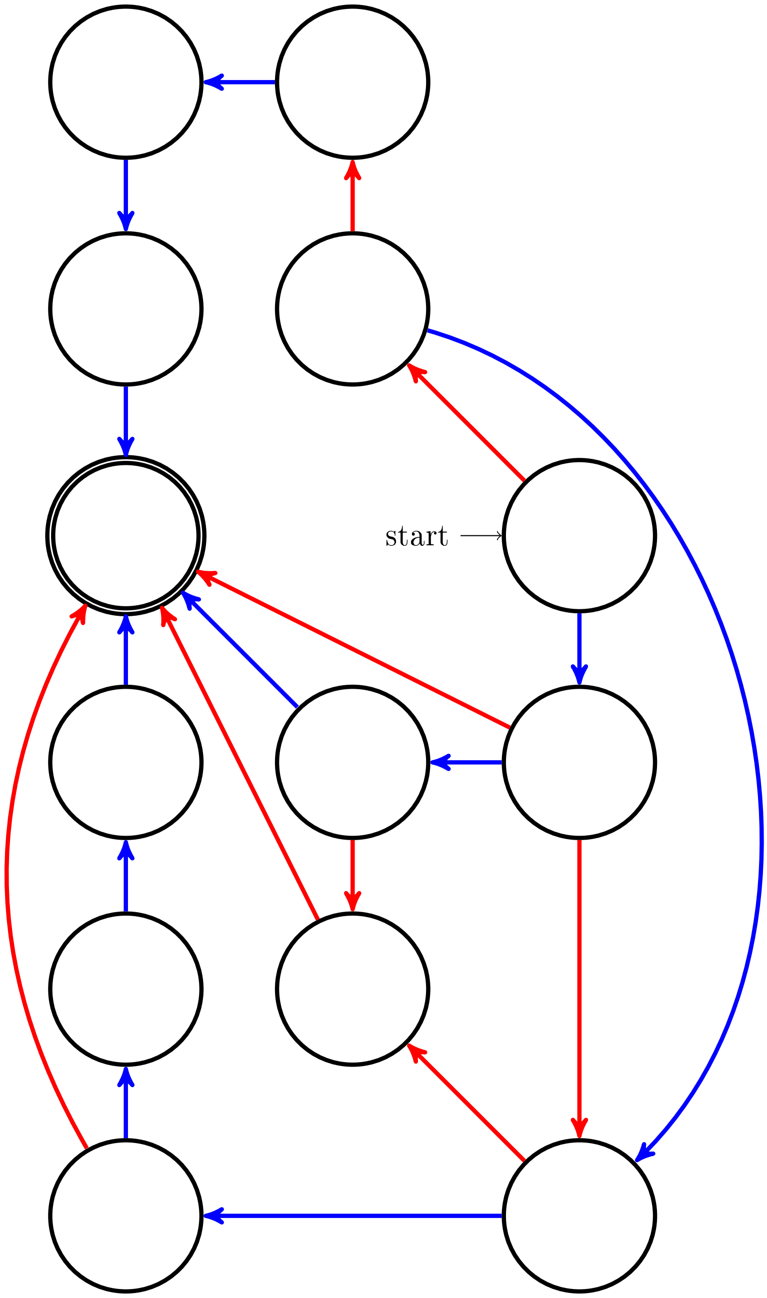
On commence par l'arbre (l'une des branches, déjà présente dans l'autre graphe, n'a pas été reproduite *in extenso*) :



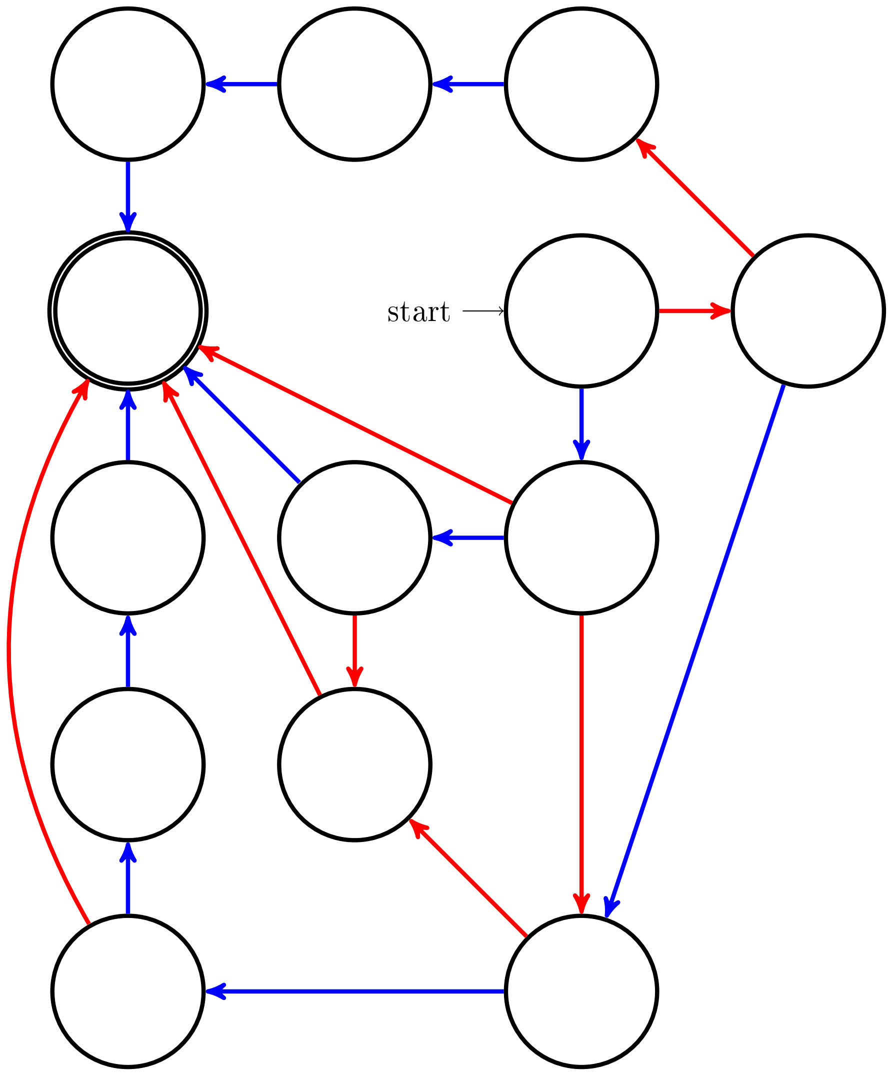
Pour finir, il suffit donc de brancher ce graphe sur le précédent :



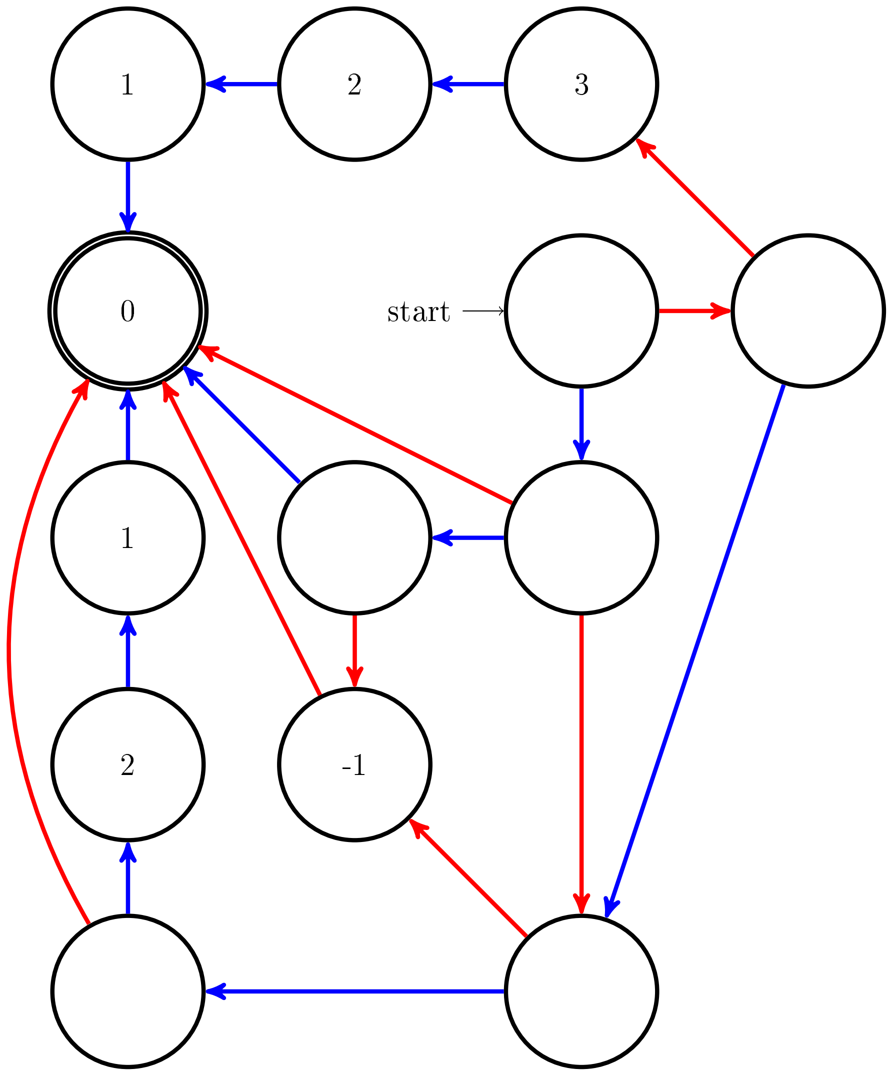
0.4.3 Le graphe au complet



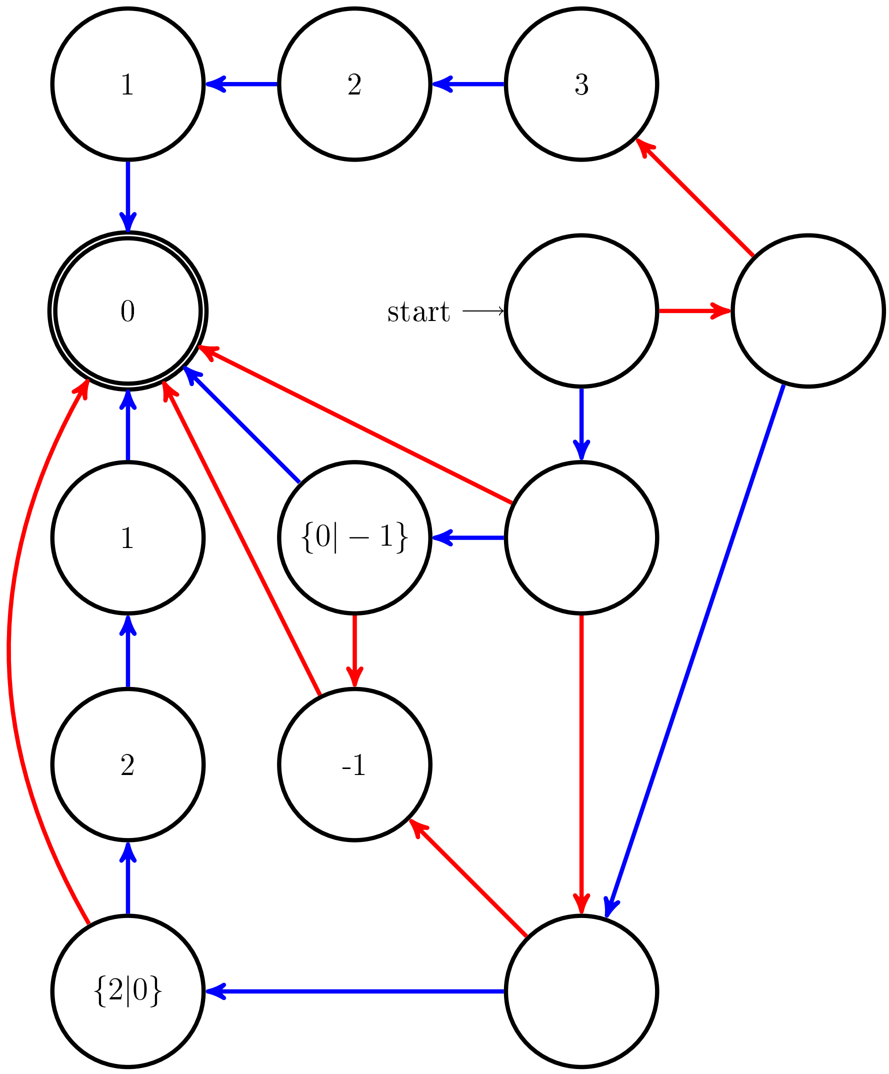
On peut l'améliorer :



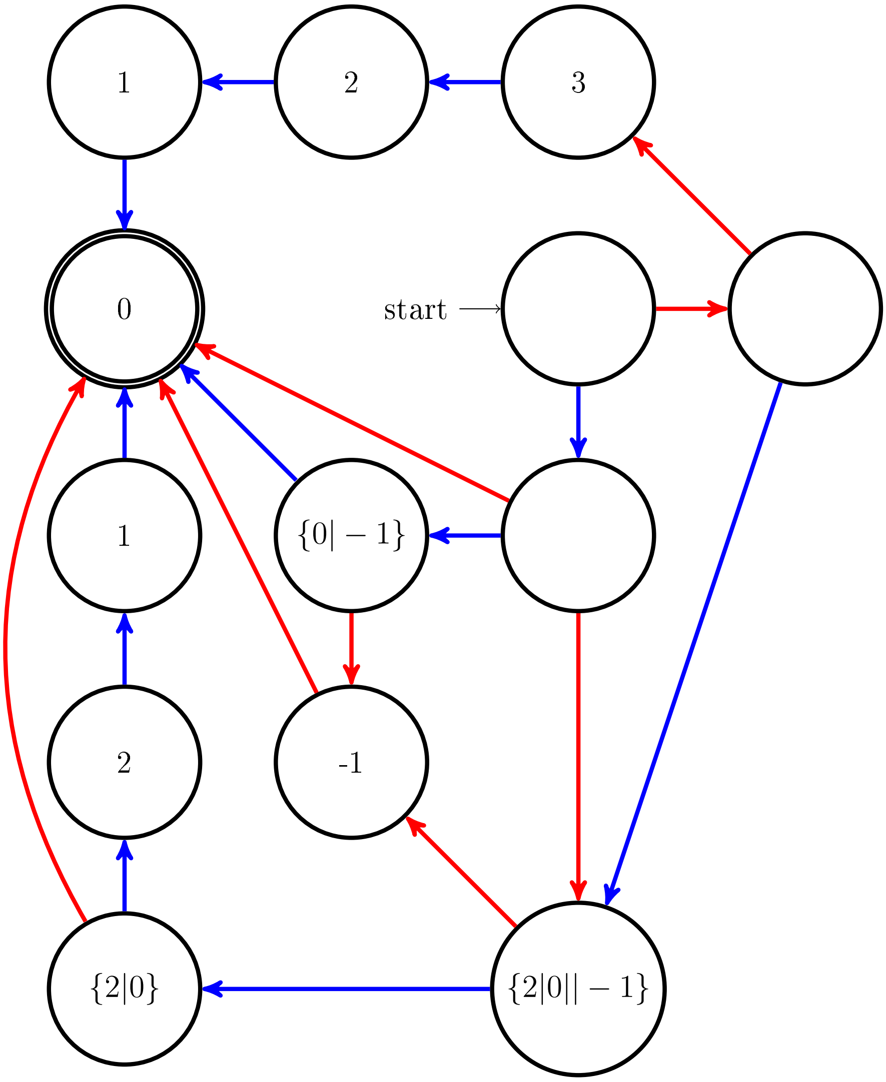
On peut maintenant calculer la valeur du graphe, en commençant par le fait que le sommet final vaut 0, et en remontant :



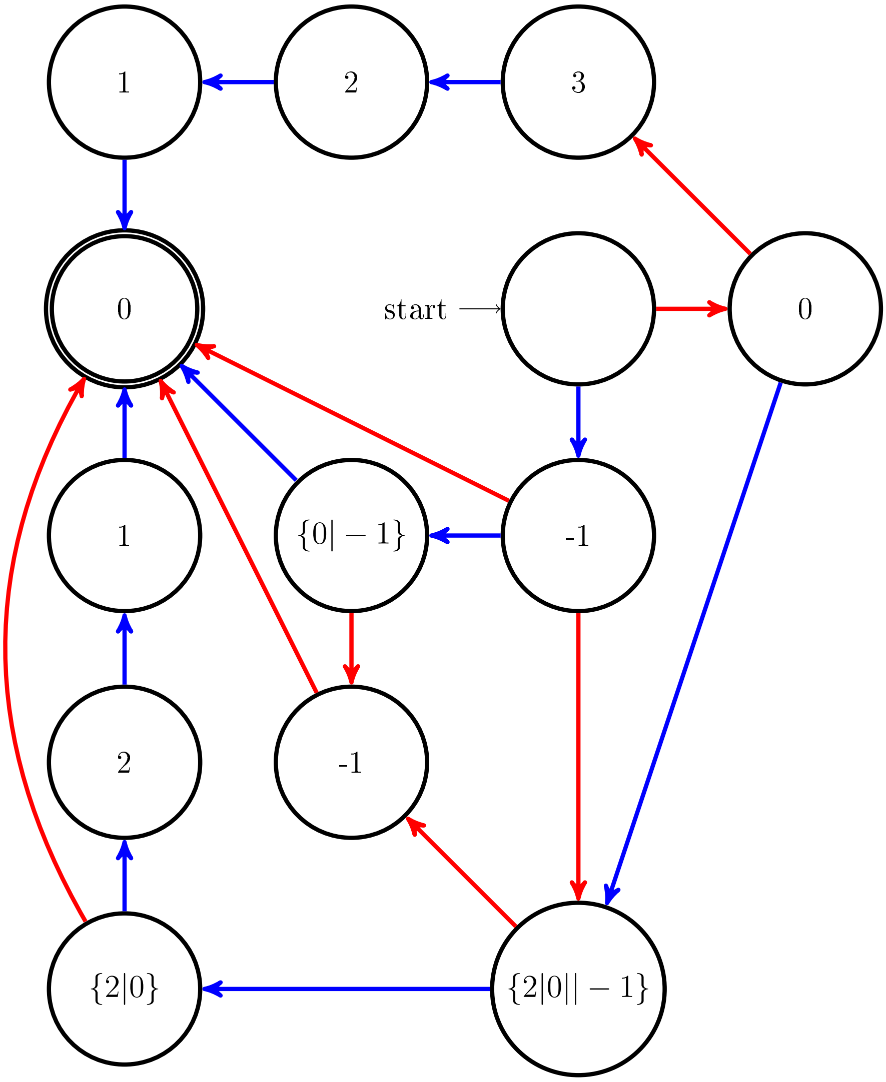
puis



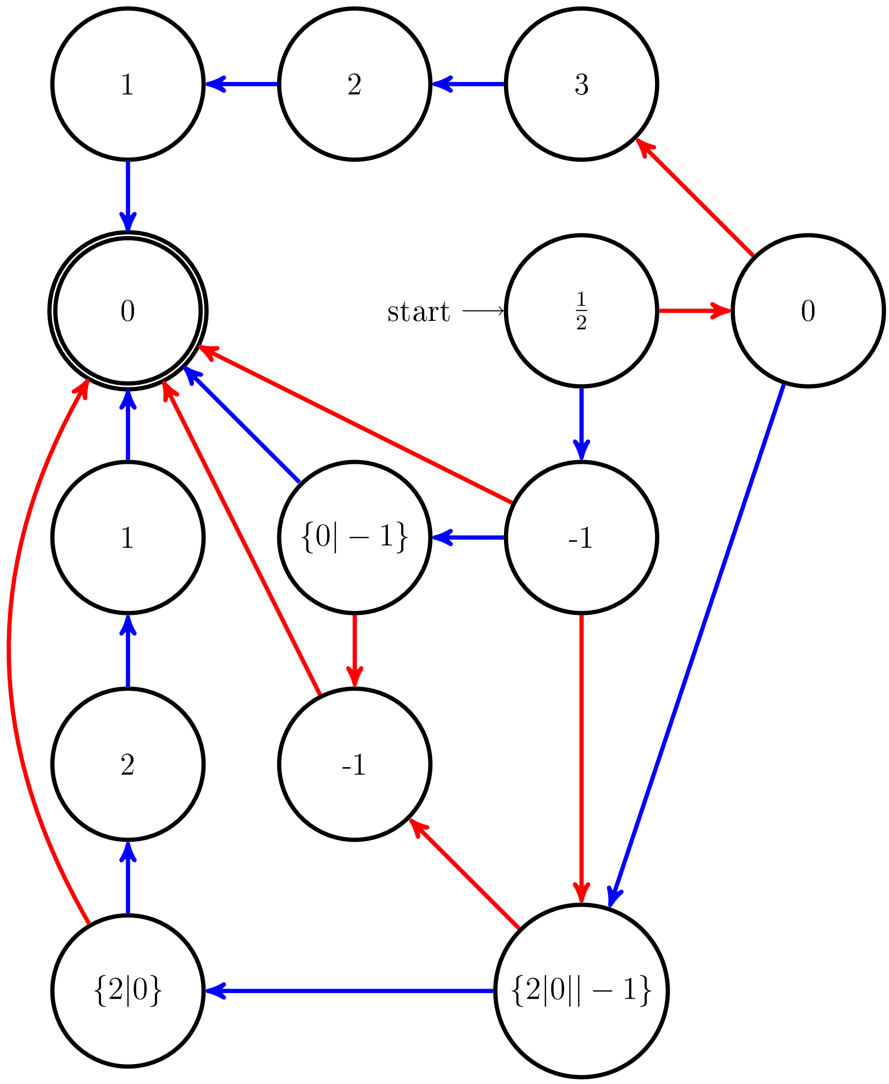
puis



ensuite

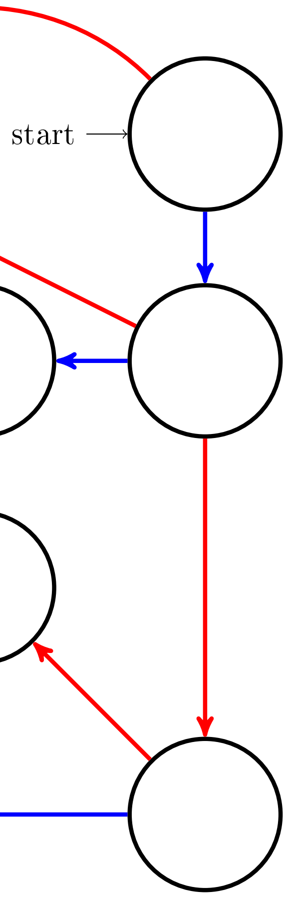


enfin

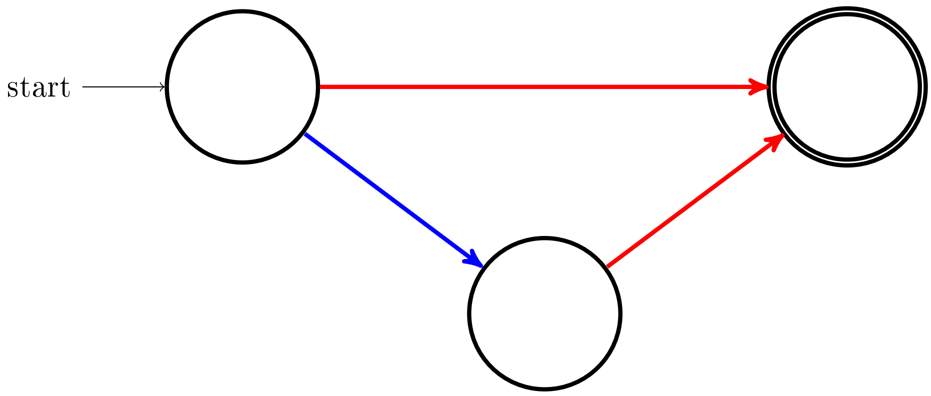


Remarques :

Maintenant qu'on sait que le sommet tout à droite vaut 0, on peut simplifier le graphe en

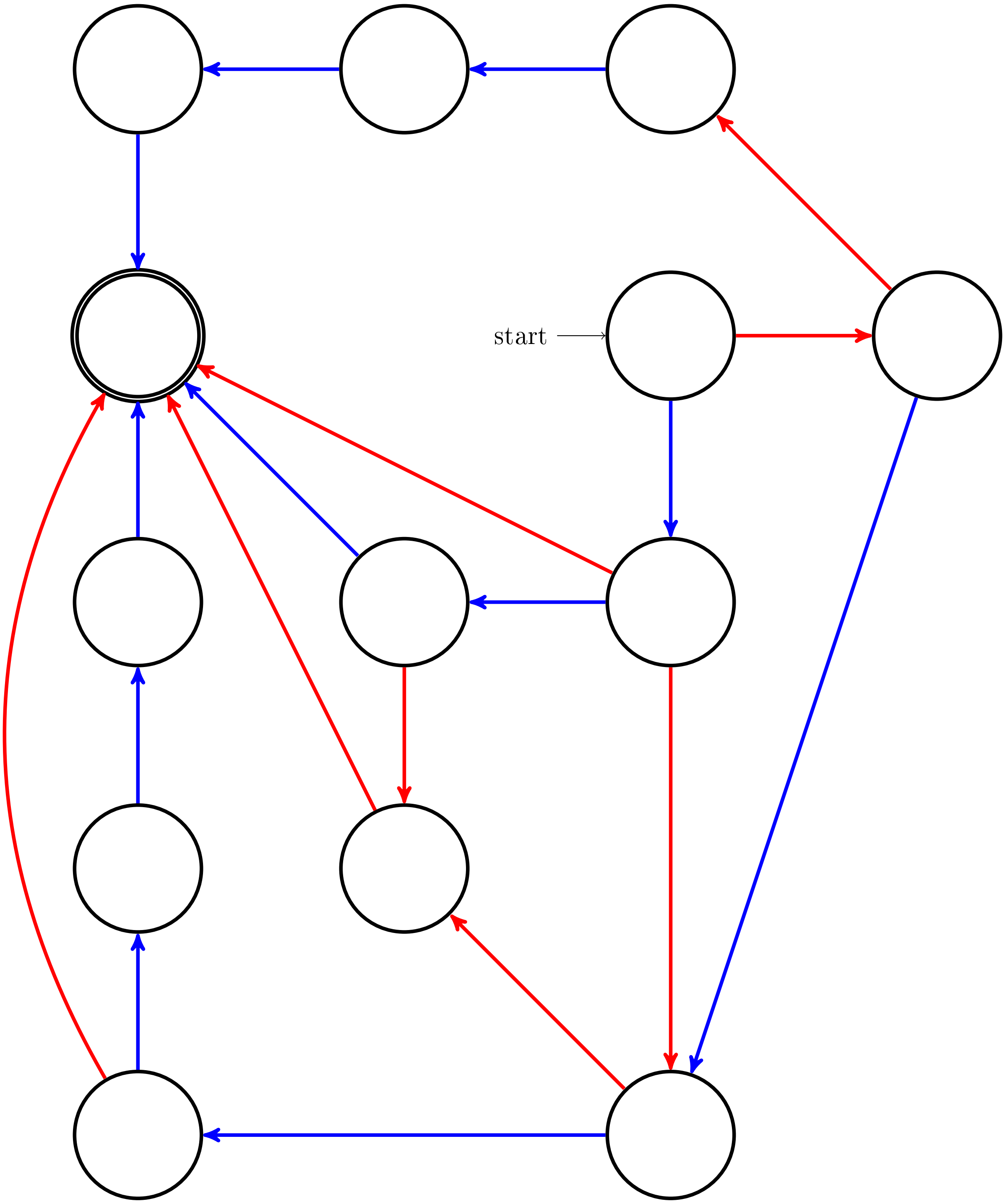


Comme on a calculé le jeu, et vu qu'il est égal à $-\frac{1}{2}$, on en déduit une version plus simple de ce graphe :



0.5 Plateau du jeu

Pour jouer avec un pion :

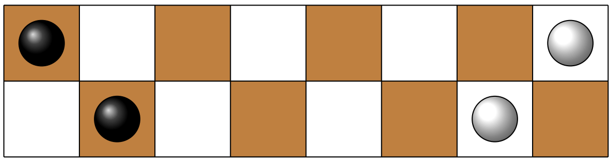


alquerkonane sur un damier $n \times 2$

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

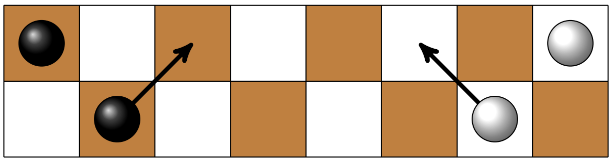
31 mai 2023

Alquerkonane peut se jouer sur un damier 8×2 :



Les noirs jouent vers la droite (l'est) et les blancs jouent vers la gauche (l'ouest).

Ainsi, dans le alquerkonane 8×2, les mouvements possibles pour les noirs et les blancs sont, au début :



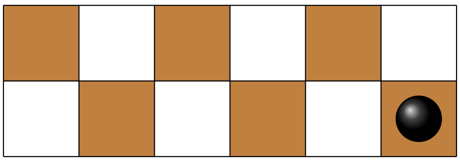
En effet l'autre pion noir et l'autre pion blanc sont bloqués.

Dans la suite, on va considérer des positions sur le damier 6×2 où la construction des surréels par Conway s'illustre bien.

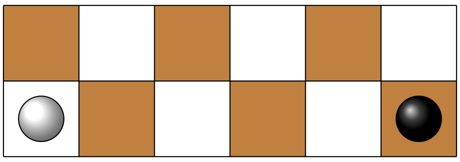
0.1 Notation de Conway

Un jeu est défini par Conway, en listant les options des noirs, puis les options des blancs, les listes étant séparées par un trait vertical et le tout encadré par des accolades. Par exemple on verra plus bas que le jeu $\{-5|4\}$ où la meilleure option (en fait, la seule) des noirs est le nombre -5, et la meilleure (en fait, la seule) option des blancs est 4, est un nombre.

Par exemple, dans ce jeu :



ou dans celui-là :



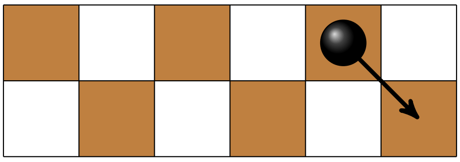
aucun des joueurs n'a d'option de jeu (les pions s'il en reste sont bloqués au bout donc aucun mouvement possible) et donc *le prochain qui joue, perd ce jeu.* C'est la définition que Conway donne du nombre zéro, donc le jeu $\{|\}$ représenté ci-dessus (aucune option pour aucun des joueurs) est le nombre 0. On s'en servira pour définir d'autres jeux plus complexes par la suite.

0.2 Entiers relatifs

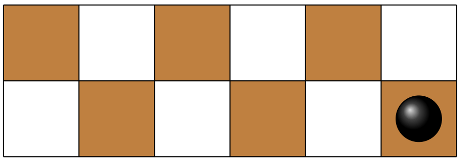
0.2.1 Entiers positifs

Un

Dans ce jeu :

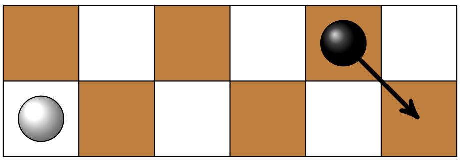


les noirs peuvent arriver au jeu zéro :



alors que les blancs, n'ayant plus de pion à bouger, n'ont aucune option. On constate que les noirs ont un coup d'avance sur les blancs (la flèche ci-dessus) donc le jeu est noté $\{0|\}$ et égal au nombre 1.

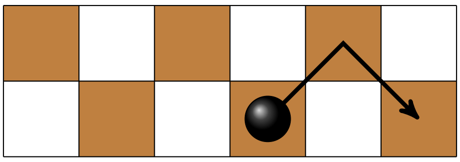
Il en est de même pour le jeu ci-dessous puisque les blancs, déjà à gauche, ne peuvent plus bouger :



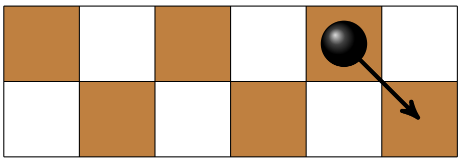
En fait, le jeu $\{0|\}$ est le nombre le plus simple qui soit plus grand que 0, et ce nombre est 1.

Deux

Dans le jeu ci-dessous :



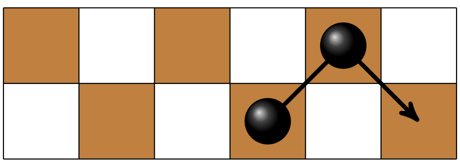
- les noirs ont pour option le nombre 1 :



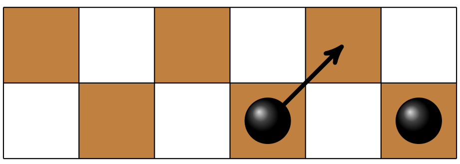
- et les blancs n'ont aucune option.

Donc ce jeu est $\{1|\}$ qui est le nombre le plus simple qui soit supérieur à 1. C'est le nombre 2, d'ailleurs les noirs ont bel et bien 2 coups d'avance sur les blancs à ce jeu.

De même, le jeu ci-dessous est égal à 2 :



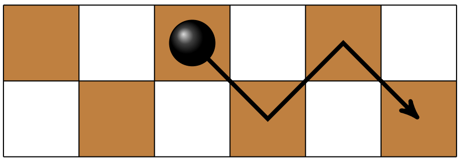
En effet, les noirs ont pour option 1 :



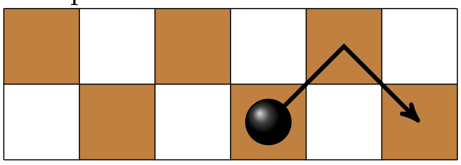
alors que les blancs n'ont aucune option.

Trois

Ce jeu vaut 3 :



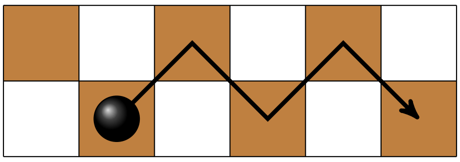
En effet
- les noirs ont 3 coups d'avance sur les blancs,
- autrement dit, les noirs ont pour option le nombre 2 :



alors que les blancs n'ont aucune option. Le jeu est donc $\{2|\}$ qui est le nombre le plus simple qui soit supérieur à 2, soit le nombre 3.

Quatre

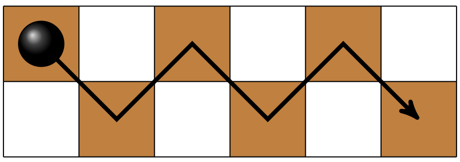
De même, ce jeu est $\{3|\} = 4$:



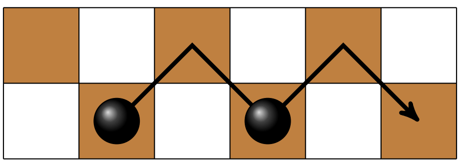
(le nombre le plus simple possible qui dépasse 3).

Cinq

De façon similaire à ce qui précède, ce jeu est le nombre 5 :



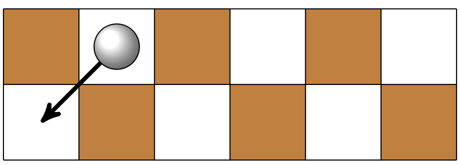
Ce même nombre (5) peut apparaître aussi comme somme (ici 2+3) :



0.2.2 Entiers négatifs

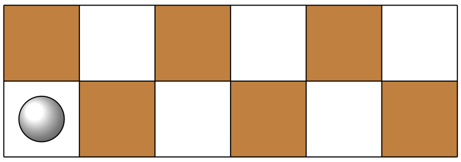
Moins un

Voici le nombre -1 :



En effet,

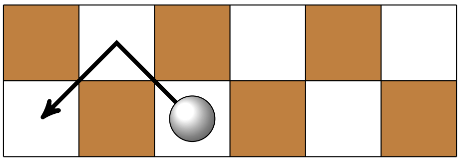
- les noirs n'ont aucune option,
- alors que les blancs peuvent arriver à 0 :



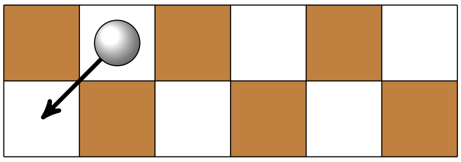
(autrement dit, les blancs ont un coup d'avance sur les noirs). Donc ce jeu se note $\{|0\}$ et c'est le nombre le plus simple possible, qui soit plus petit que 0 : c'est -1.

Moins deux

Dans ce jeu :



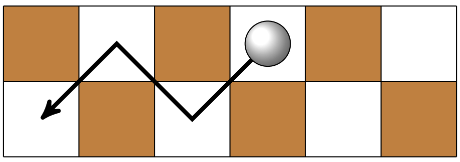
- les noirs n'ont aucune option,
- les blancs ont pour option -1 :



Le jeu se note donc $\{|-1\}$ et c'est le nombre le plus simple possible qui soit plus petit que -1 : c'est le nombre -2.

Moins trois

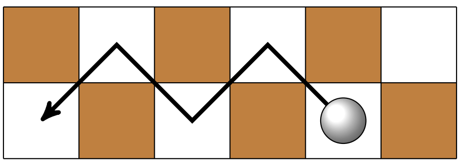
Dans ce jeu, les noirs n'ont aucune option mais les blancs peuvent arriver au jeu précédent (-2) :



Le jeu, noté $\{|-2\}$, est donc le nombre le plus simple qui soit plus petit que -2, à savoir -3.

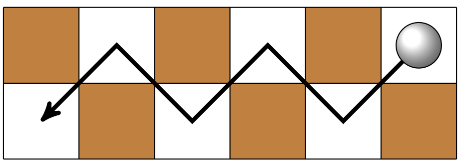
Moins quatre

De façon similaire, ce jeu vaut $\{|-3\} = -4$:



Moins cinq

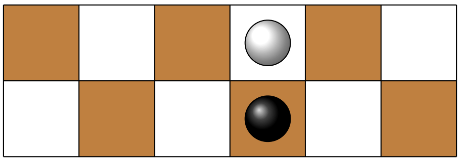
et ce jeu vaut $\{|-4\} = -5$:



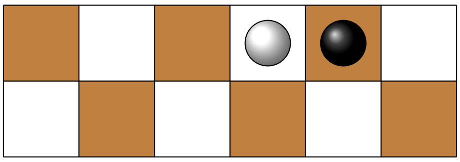
0.2.3 Zéro

Exemple

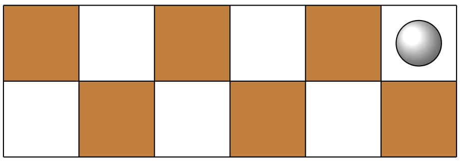
Ce jeu est le nombre 0 :



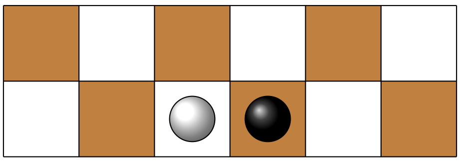
En effet, si c'est aux noirs de jouer, ils ne peuvent faire que ceci :



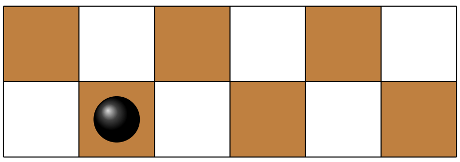
ce qui permet alors aux blancs d'arriver au nombre -5 qui leur est avantageux, en prenant ce pion noir en arrière :



alors que si c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent que faire ceci :

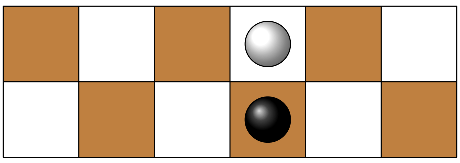


ce qui permet alors aux noirs d'arriver à 4 en prenant ce pion blanc en arrière :

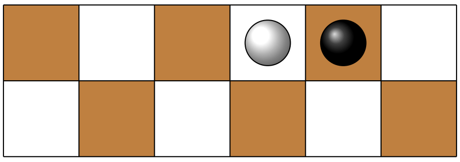


Comme -5 (l'option des noirs) est plus petit que 4 (l'option des blancs), le jeu est un nombre (c'est la définition donnée par Conway, d'un nombre). Et c'est le nombre $\{-5|4\}$ qui est le nombre le plus simple possible, compris entre -5 et 4 : c'est bien le nombre 0, considéré comme le plus simple de tous les nombres (et même de tous les jeux).

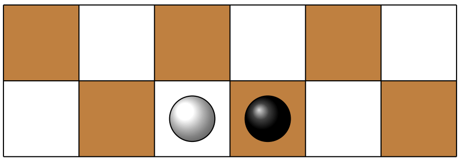
En fait c'est un peu plus compliqué : s'il est vrai que $\{-5|4\}$ est égal à 0, le jeu



n'est pas égal à $\{-5|4\}$, parce que d'une part, le jeu



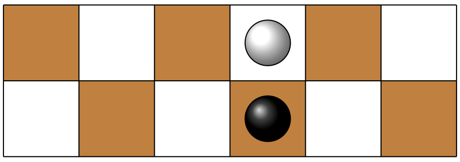
n'est pas égal à -5 mais à $\{3|-5\}$ (qui n'est pas un nombre puisque 3 n'est pas plus petit que -5), et d'autre part, le jeu



n'est pas égal à 4 mais à $\{4|-4\}$ qui n'est pas un nombre non plus puisque 4 n'est pas plus petit que -4. Cependant la théorie de Conway montre que $\{\{3|-5\}\,|\,\{4|-4\}\} = 0$ (le premier qui joue, perd).

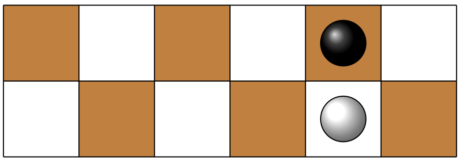
0.2.4 Résumé

En résumé, deux pions l'un à côté de l'autre valent 0 du moment qu'ils sont sur des bords différents (c'est-à-dire à la verticale) :

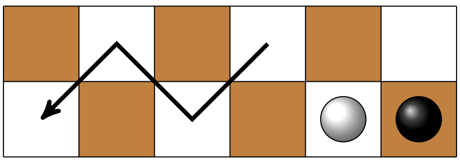


peu importe sur quelle verticale ils se trouvent, y compris près d'un bord.

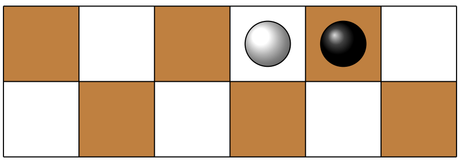
Par exemple



est égal 0, puisque les noirs arrivent à $\{2|-3\}$:

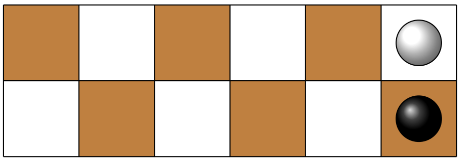


et que les blancs arrivent à $\{3|-5\}$:

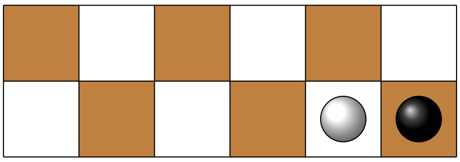


et que $\{\{2|-3\}\,|\,\{3|-5\}\} = 0$ (concrètement comme les noirs viennent de jouer, on ne regarde pas l'option 2 qui ne leur est de fait pas accessible puisqu'ils ne rejouent pas, et idem pour les blancs qui une fois avoir joué ne peuvent pas aller à -2 ce qui fait que le jeu ci-dessus est simplifié en $\{-3|3\}$ qui est un nombre, à savoir le plus simple qui soit entre -3 et 3, et ce nombre est bien 0)

Et même



est égal à 0 puisque les noirs n'ont aucune option, alors que les blancs peuvent aller à $\{2|-3\}$:



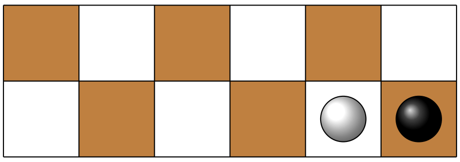
Or $\{|\,\{2|-3\}\}$ est égal à 0 : si c'est aux noirs de jouer, ils ont perdu parce qu'ils sont déjà bloqués, et si c'est aux blancs de jouer, les noirs gagnent. Le prochain qui joue perd ce jeu donc le jeu est 0.

Reste à voir ce que valent des jeux où les deux pions côte à côte sont sur le même bord (alignés à l'horizontale). On va voir que c'est plus compliqué.

0.3 Bascules

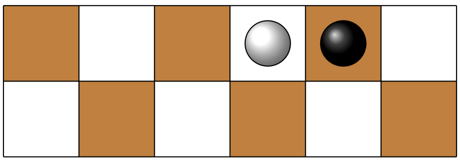
0.3.1 Cas simples

On vient de voir que ce jeu est $\{2|-3\}$:



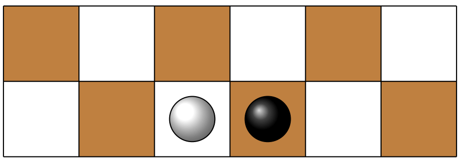
En moyenne, ce jeu vaut -0,5 et sa température est 2,5. Ce qui signifie que l'option des noirs est -0,5+2,5 = 2 et que l'option des blancs est -0,5-2,5 = -3. Le jeu $\{2|-3\}$ se note $-0,5 \pm 2,5$.

De façon similaire, ce jeu vaut $\{3|-5\}$:

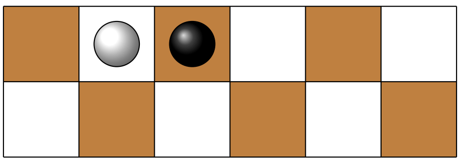


C'est un jeu qui vaut, en moyenne, -1 (il est globalement favorable aux blancs) et dont la température est 4. Il est donc également noté -1 ± 4.

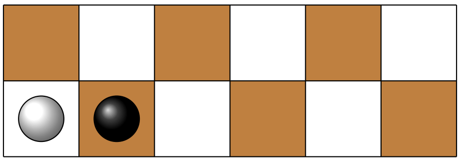
Ce jeu vaut$\{4|-4\} = \pm 4$ (température 4 mais moyenne nulle) :



Celui-ci vaut$\{5|-3\} = 1 \pm 4$ (température 4 aussi mais moyenne 1) :

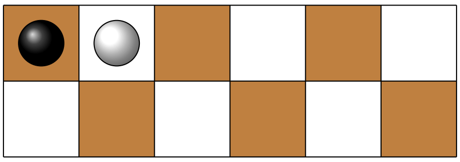


et celui-là vaut$\{3|-2\} = 0,5 \pm 2,5$ (température 2,5 et moyenne 0,5) :

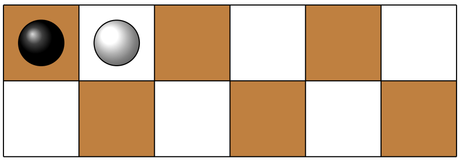


0.3.2 Cas complexes

Ce jeu est plus compliqué à examiner :

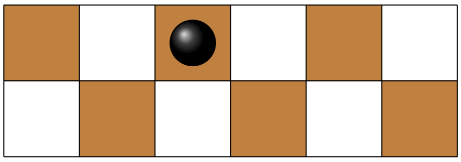


En effet, si les blancs n'ont que 0 comme option :

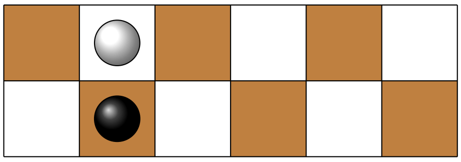


les noirs ont **deux** options maintenant :

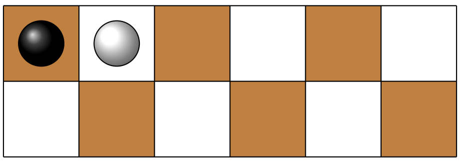
- Le nombre 3 :



- et le nombre 0 :

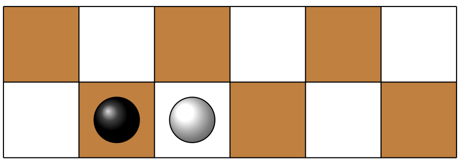


Mais comme ils jouent au mieux de leurs intérêts, ils choisiront l'option 3 et le jeu

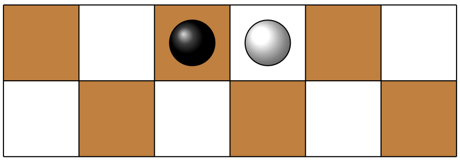


est donc égal à $\{3|0\}$. Sa moyenne est 1,5 et sa température est 1,5 aussi et il se note donc $1,5 \pm 1,5$.

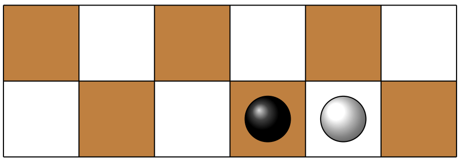
De façon similaire, le jeu



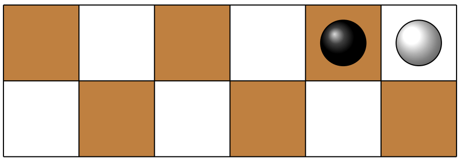
est égal à $\{2|0\} = 1 \pm 1$ (moyenne 1 et température 1),
et le jeu



est égal à $\{1|-1\}$. Sa moyenne est donc nulle et sa température est 1 et on le note ± 1.
De façon similaire, le jeu



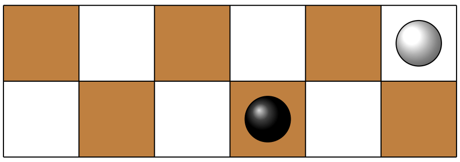
est égal à $\{0|-2\} = -1 \pm 1$ (moyenne -1 et température 1)
et le jeu



est égal à $\{0|-3\} = -1,5 \pm 1,5$ (moyenne -1,5 et température 1,5).

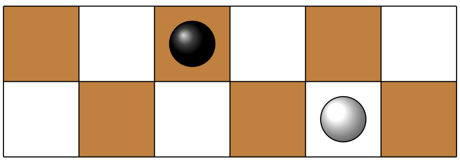
0.4 Zéro

Ce jeu vaut zéro :

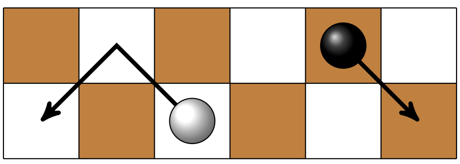


En effet si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à $-1,5 \pm 1,5$ qui les fait perdre (les blancs arrivent à -3 le coup d'après) alors que si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent à ± 1 qui fait gagner les noirs le coup d'après.

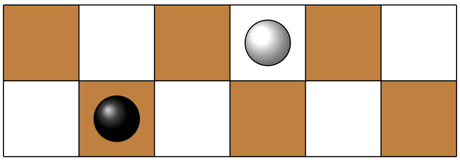
Pour une raison similaire, ce jeu vaut 0 aussi :

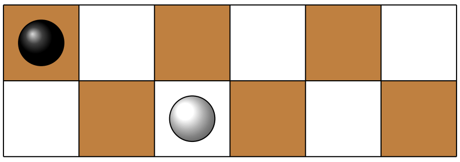


alors que celui-ci qui lui ressemble vaut 1-2 = -1 :



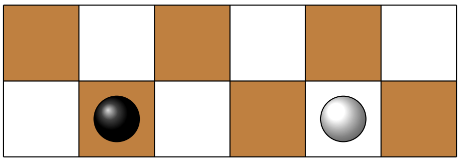
Plus généralement, un pion noir et un pion blanc à distance de cavalier représentent un nombre (0 si le pion noir est à gauche). Voici donc des variantes du jeu 0 :



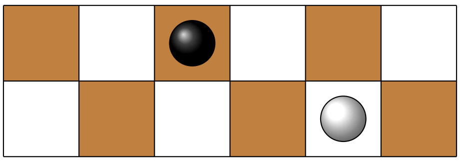


0.4.1 L'étoile

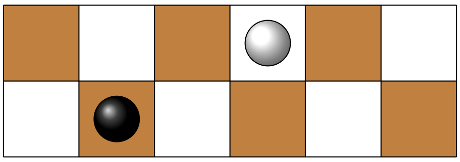
Ce jeu est intéressant :



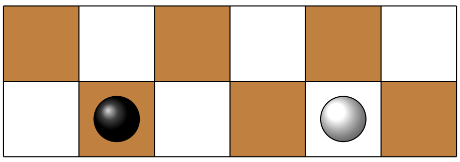
En effet si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 0 :



mais si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent aussi à 0 :



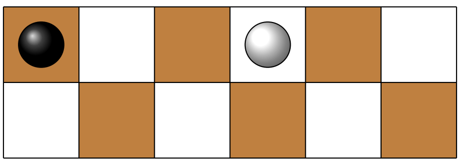
Le jeu

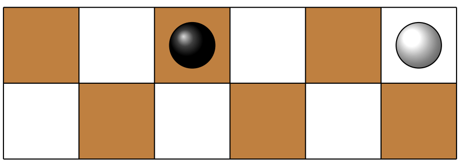


est donc égal à $\{0|0\}$.

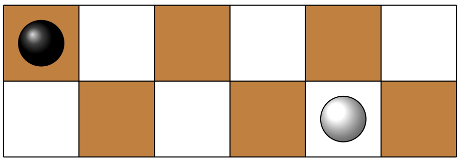
- Ce n'est pas un nombre parce que 0 n'est pas plus petit que 0,
- ce n'est pas non plus une bascule parce que 0 n'est pas plus grand que 0.

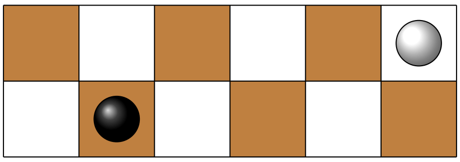
Ce jeu s'appelle l'étoile et se note $*$.
On retrouve l'étoile sous deux autres formes dans le alquerkonane 6×2 :





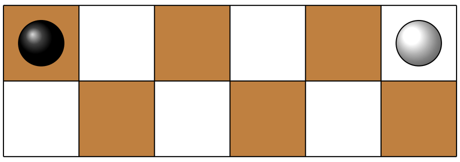
Et du coup on retrouve 0 de deux autres manières :





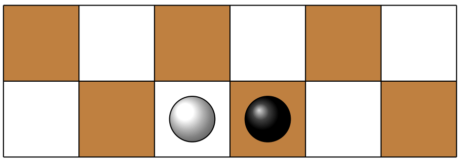
En effet $\{*|*\} = 0$ puisque dans $\{*|*\}$ chaque joueur a pour option $*$ qui fait gagner son adversaire, et donc perd dans $\{*|*\}$ ce qui est la définition de 0.

Mais alors, ce jeu est l'étoile puisqu'il vaut $\{0|0\}$:

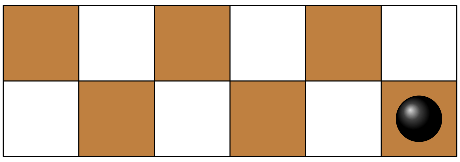


0.5 Avec plus de pions

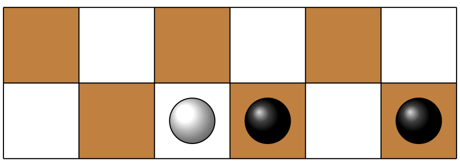
On a vu que ce jeu est ± 4 :



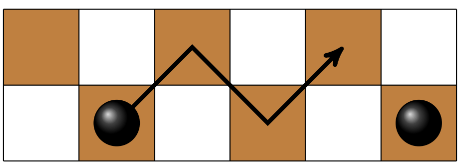
Comme ce pion est déjà au bout, il ne risque pas d'y changer quelque chose :



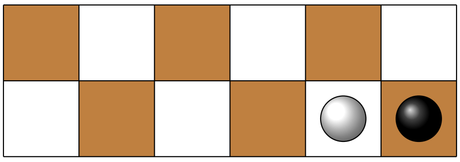
Donc *a priori*, ce jeu est aussi ± 4 :



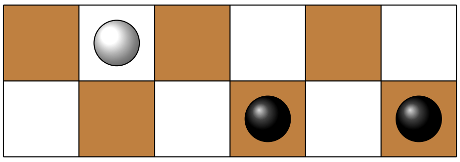
En fait ce serait le cas s'il n'y avait aucun risque d'interférence, mais si c'est aux noirs de jouer, leur meilleur coup les fait arriver à 3 :



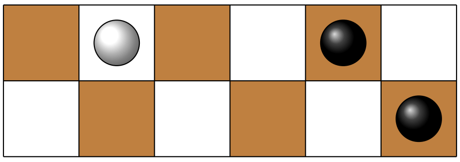
et si c'est aux blancs de jouer, ils peuvent aller à



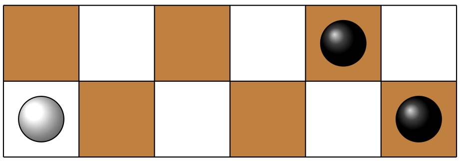
qui les fait perdre (les noirs arrivent à 2), ou leur meilleur coup



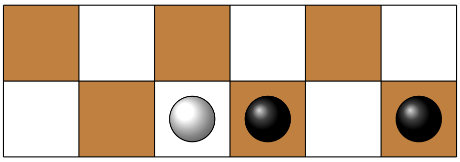
qui les fait gagner : les noirs ne peuvent qu'avancer leur seul pion mobile :



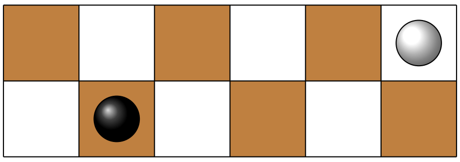
et après les blancs gagnent en arrivant à 0 :



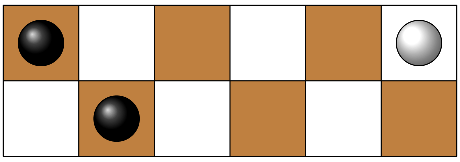
Le jeu



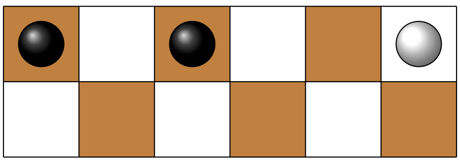
n'est donc pas égal à ± 4 mais à $\{3|0\} = 1,5 \pm 1,5$.
On a vu plus haut que ce jeu est 0 :



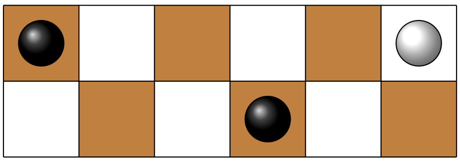
Qu'en est-il de celui-là ?

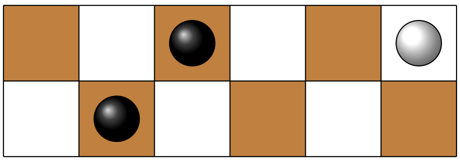


Les noirs ne peuvent aller qu'ici :

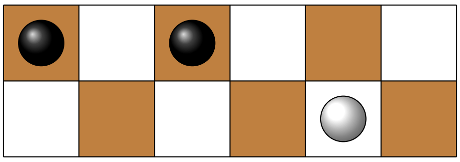


Cette position est-elle toujours l'étoile ? Cela voudrait dire que parmi ces deux positions :

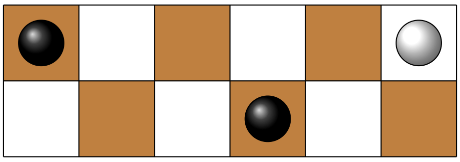




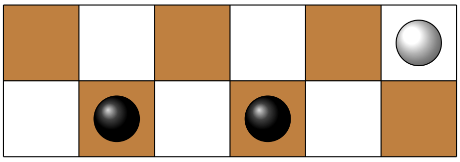
la meilleure (du point de vue des noirs) vaut 0, et que cette position aussi vaut 0 :



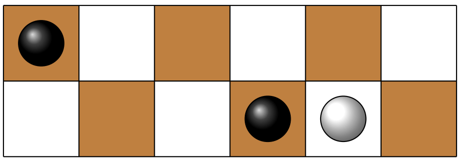
Or la position



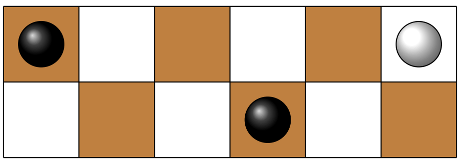
est positive (il y a une stratégie gagnante pour les noirs). Si c'est aux noirs de jouer, le meilleur coup pour eux est



qui leur assure un minimum de 7, et si c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent faire que

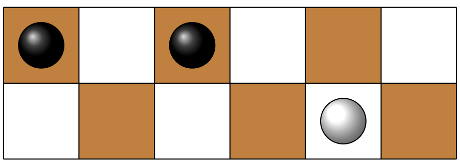


qui vaut 7 aussi. Donc le jeu

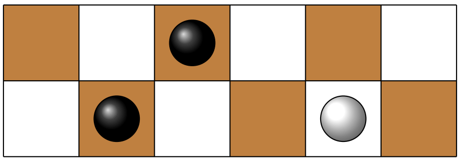


est égal à $\{7|7\} = 7*$ (c'est la somme de 7 et de l'étoile) qui est clairement positif.

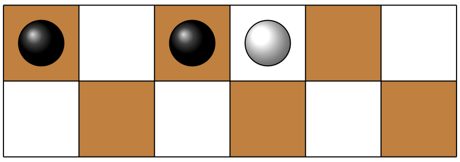
Cette position non plus n'est pas 0 :



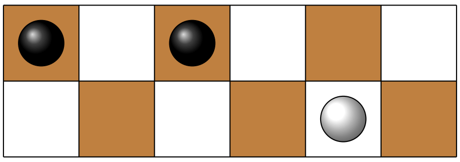
En effet le meilleur coup pour les noirs est



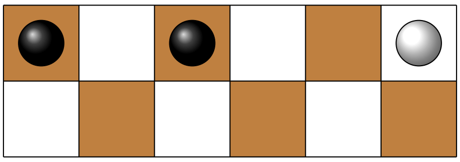
qui vaut 1, et les blancs ne peuvent faire que



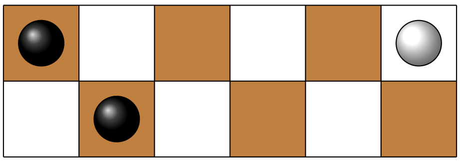
qui vaut $\{8|3\} = 5,5 \pm 2,5$.
Donc



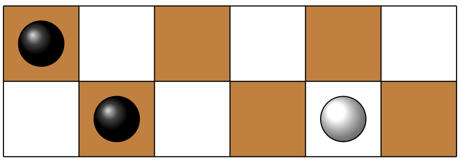
vaut $\{1|5,5 \pm 2,5\} = 2$ qui est un nombre positif. Et donc



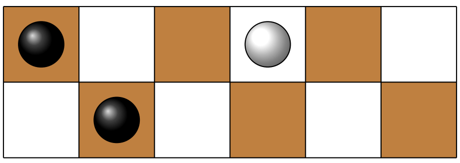
est égal à $\{7 * |2\}$ qui est positif.
Dans



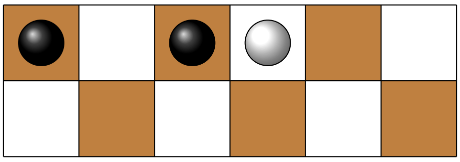
les blancs n'ont eux aussi qu'une possibilité :



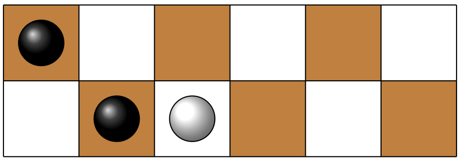
mais celle-ci vaut-elle toujours l'étoile ?
Si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 2 (vu plus haut) mais si c'était aux blancs de rejouer, ils arriveraient à



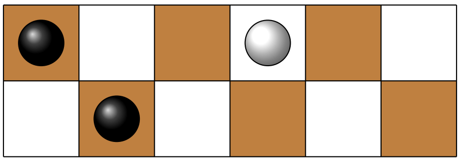
Si les noirs jouent, ils arrivent à



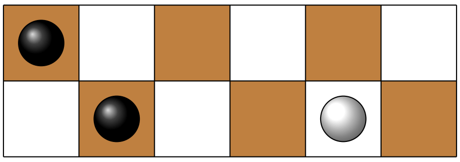
qui vaut $5,5 \pm 2,5$ (positif), alors que si les blancs jouent ils arrivent à $\{6|-2\} = 2 \pm 4$:



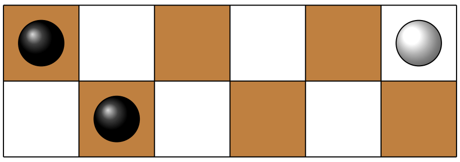
Donc



est égal à $\{5,5 \pm 2,5|2 \pm 4\} = 3$ qui est positif.
Donc



est égal à $\{2|3\} = 2,5$ (nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 2 et plus petit que 3).
Finalement



n'est pas égal à 0 mais à $\{\{7 * |2\}|2,5\} = 2$: le rajout d'un pion noir (même bloqué) a transformé un jeu nul en jeu positif.