

Compte-rendu de la séance Gerbert en CP le 2 décembre 2024

21 élèves présents (école : Aristide Briand). Pour la plupart des élèves, le principe de la numération de position n'est pas encore acquis (voir plus bas, plusieurs exemples). L'activité devait être menée aussi dans l'autre classe de CP mais, l'enseignant étant absent, l'activité a été menée dans cette classe, à laquelle ont été ajoutés quelques élèves de l'autre classe de CP. Les élèves avaient déjà fait une activité sur l'abaque *TiPont974* et certains d'entre eux avaient déjà participé à des activités mathématiques les deux années précédentes (jeux en MS, jeux et géométrie en GS).

Présentation et repères historiques

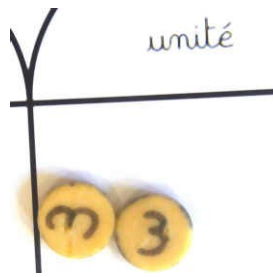
L'abaque de Gerbert a été présenté, avec évocation du contexte historique et de la structure de l'église catholique (Gerbert ayant été moine, abbé, évêque, cardinal et pape, ces fonctions n'évoquent pas grand-chose en CP). Les mots **dizaines** et **unités** ont été déchiffrés directement sur l'abaque. Il a été rappelé que c'est Gerbert qui a introduit la numération de position (d'origine indienne ou chinoise) en occident, et proposé que l'activité soit effectuée sur son abaque. L'activité consiste à représenter, à l'aide de jetons portant des chiffres (ou de chiffres en bois prédécoupés), divers nombres, sur l'abaque de Gerbert.

Chaque élève a reçu un abaque portant deux colonnes (celle des dizaines et celle des unités) et des jetons en nombre suffisant pour pouvoir représenter d'une manière chacun des nombres proposés. Deux garçons ont demandé pourquoi il n'y a pas de jetons portant le « nombre » zéro (la réponse est « parce que Gerbert n'en avait pas besoin ») ce qui a permis d'évoquer la différence entre chiffres et nombres. La première réponse a été énoncée par une fille : *un chiffre c'est quand il n'y en a pas beaucoup, un nombre c'est plus grand*. Entendant qu'il y a un peu de ça, un garçon a alors proposé *un chiffre c'est quand il y en a beaucoup, un nombre c'est comme 1, 2, 3 etc*. La réponse donnée a été la suivante : « la différence entre un chiffre et un nombre est la même qu'entre une lettre et un mot : les chiffres sont des dessins¹, servant à écrire les nombres ».

Orientation des jetons et des chiffres

Les élèves ne maîtrisent pas tous l'orientation des chiffres, ce qui se voit bien avec l'abaque de Gerbert, dont les jetons peuvent être placés comme on le veut. Par exemple (représentation correcte du nombre six) :

¹ Ce n'est pas tout-à-fait vrai : les glyphes sont bel et bien des dessins, mais un chiffre (comme une lettre) est plus qu'un glyphe, c'est un symbole, c'est-à-dire l'association entre un glyphe et sa signification sémantique.



On le voit également avec cette représentation (correcte) du nombre sept :



ou ces représentations (également correctes) du nombre neuf :



ou cette représentation (incorrecte, peut-être par confusion entre les chiffres 1 et 7) du nombre douze :



Avec les chiffres découpés la situation est encore plus complexe puisqu'on ne peut pas seulement les tourner mais aussi les retourner. Par exemple avec cette représentation (erronée) du nombre sept :



ou cette représentation (correcte puisque le 1 est dans la colonne des dizaines) du nombre 12 :

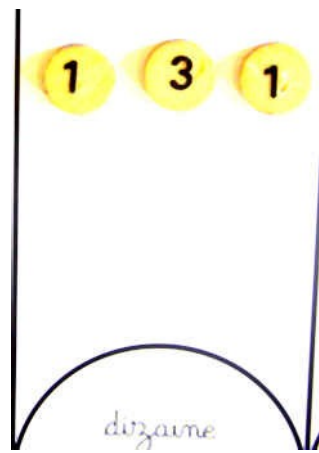


Le nombre cinq

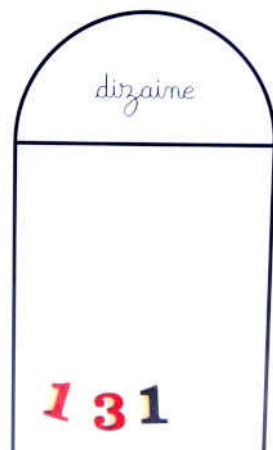
Il n'y a qu'une seule manière de représenter le nombre un dans l'abaque de Gerbert : un jeton portant le chiffre 1. Il n'y a que deux manières de représenter le nombre deux : 2, ou 1+1. Il y a trois manières de représenter le nombre 3 : 1+1+1, 2+1 ou 3. Il y a 5 manières de représenter le nombre quatre : 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. Par conséquent on a directement demandé aux élèves de représenter le nombre cinq sur l'abaque de Gerbert.

Erreurs de position

A priori le nombre cinq est bien représenté sur cet abaque :

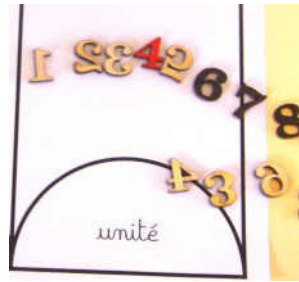


Mais comme les jetons sont placés dans la colonne des dizaines, le nombre représenté est cinquante (5 dizaines). Il en est de même ici :



Peu d'élèves de CP, à cette période de l'année, semblent savoir que le nombre représenté par un chiffre dépend de la position de ce chiffre. Mais on leur a conseillé, pour la suite, d'utiliser uniquement la colonne des dizaines. Il a fallu parfois insister longtemps (on verra que pour le nombre dix, personne n'a utilisé la colonne des dizaines).

Ici par contre, l'élève a visiblement décidé de créer un motif (frise numérique?) plutôt que répondre à la consigne :



Avec 3 chiffres

4 élèves ont choisi de représenter cinq comme ici :

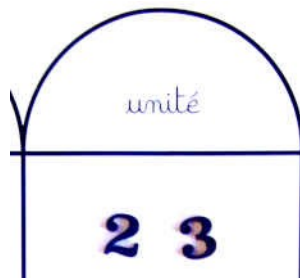


mais, on l'a vu plus haut, la plupart ont mal choisi la colonne dans laquelle placer ces jetons.

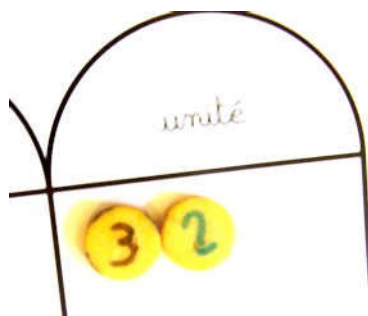
Avec deux chiffres

3+2

4 élèves ont choisi de représenter le nombre cinq sous la forme 3+2, mais avec une tendance à aligner horizontalement les chiffres, ce qui donne à l'adulte l'impression de voir le nombre vingt-trois :



ou le nombre trente-deux :



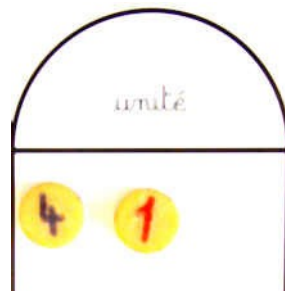
Il a alors été conseillé aux élèves de disposer les chiffres verticalement de préférence :

2

3

4+1

9 élèves (près de la moitié) ont préféré représenter le nombre cinq sous la forme 4+1, soit en ligne :



soit en colonne :

unité

4

1

et parfois avec beaucoup de soin :

4

1

Avec un seul chiffre

Seuls deux élèves ont choisi de n'utiliser qu'un seul chiffre pour représenter le nombre cinq :

unité

5

Le nombre six

Ensuite on a demandé aux élèves de représenter le nombre six sur l'abaque de Gerbert. La question survenant juste après le nombre cinq, il était tentant d'ajouter simplement un jeton 1 à la représentation précédente, ce qui a effectivement été fait plusieurs fois. Mais il y a eu là aussi des erreurs.

Erreurs

Peut-être l'élève en était encore à l'exercice précédent :



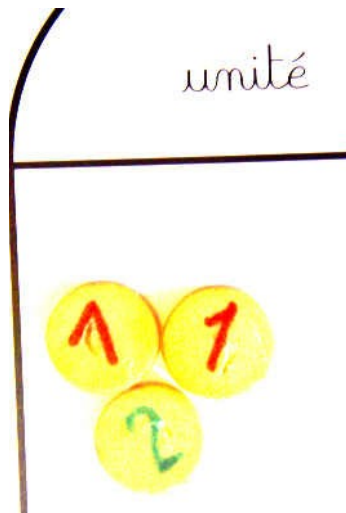
Peut-être l'élève voulait mettre plusieurs représentations du nombre six (mais elle a affirmé avoir terminé) :

unité

6

3

Dire que les chiffres sont des dessins, peut donner l'envie de dessiner avec des chiffres (mais là aussi, l'élève a affirmé avoir terminé et pensait avoir représenté le nombre six) :



Avec plus de 2 chiffres

Des représentations originales sont apparues :



Une élève qui ne semble pas avoir vu les chiffres plus « grands » sur l'autre face (ou qui voulait privilégier le chiffre 1, transformant ainsi l'abaque de Gerbert en abaque romain ; dans ce cas c'est apparemment le chiffre 1 qui lui manquait) :



Avec un seul chiffre

Deux élèves ont fait au plus simple en n'utilisant que le chiffre 6 :



Avec deux chiffres

3+3

La forme 3+3 (déjà vue dans la partie sur l'orientation des chiffres) a été choisie 4 fois :



4+2

La forme 4+2 a été choisie une seule fois :



5+1

La forme 5+1 (ou l'ajout d'un jeton 1 à la représentation précédente du nombre cinq) a été choisie 7 fois, en ligne :



en colonne :



ou par ajout d'un jeton 1 à la représentation précédente :



avec un alignement vertical soigné :



Le nombre sept

Comme la représentation du nombre six est encore présente sur l'abaque, on pouvait s'attendre à trouver des jetons 1 ajoutés rapidement sur l'abaque. C'est arrivé 4 fois mais il y a aussi cette erreur :



3+4

La représentation 3+4 a été choisie par seulement 2 élèves :

avec les chiffres alignés horizontalement :



ou verticalement :



5+2

5 élèves ont choisi la représentation $5+2$, ils ont tous aligné horizontalement les chiffres, sous la forme 52 :



ou sous la forme 25 :



6+1 ou par ajout d'un jeton 1 à d'autres chiffres

6 élèves ont représenté le nombre sept sous la forme $6+1$,

en plaçant les chiffres horizontalement :



ou verticalement :

unité



ou en ajoutant un jeton 1 à l'existant :



éventuellement avec ajustements :

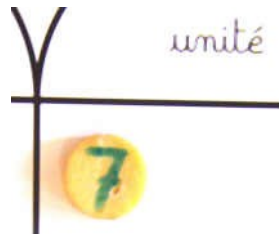


unité



Le chiffre 7

Mais pas moins de 6 élèves ont préféré n'utiliser que le chiffre 7 (dans la colonne des unités) :



Le nombre neuf

Pour inciter les élèves à éviter de juste rajouter un jeton 1, on est passé directement de sept à neuf, et non à huit.

Une erreur

Les trois jetons portent des chiffres pairs alors que 9 est impair :



Combinaisons rares

Personne n'a représenté le nombre neuf par le chiffre 9. Il est possible que la similitude entre les chiffres 6 et 9 soit au moins partiellement en cause (voir la partie sur l'orientation des chiffres²).

La décomposition 6+3 n'a été choisie qu'une seule fois :



La décomposition 7+2 aussi :

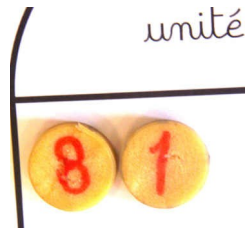


8+1

Cette décomposition a été choisie par 3 élèves, qui ont tous aligné les chiffres horizontalement,

2 Voir aussi (onglet « Gerbert ») [cet article](#) où les chiffres arabes sont tournés de diverses manières.

avec des jetons :



ou des chiffres en bois :



ou à partir d'une décomposition de huit en 7+1 :



5+4

Pas moins de 9 élèves (presque la moitié) ont représenté le nombre neuf avec un jeton 4 et un jeton 5. Souvent c'est avec des chiffres alignés horizontalement :



ou



mais aussi, parfois, avec des jetons alignés verticalement :



ou



Le nombre dix

Personne n'a utilisé la représentation la plus simple qui est l'utilisation d'un jeton 1 dans la colonne des dizaines. On peut y voir un blocage sur le passage aux dizaines, mais sans doute aussi le fait que pour dix, on a besoin d'un « jeton zéro » qui n'existe pas parce que Gerbert n'en avait pas besoin, le chiffre 0 n'étant nécessaire que pour le calcul écrit et pas le calcul par manipulation de jetons.

Une seule erreur

D'ailleurs les réponses erronées l'étaient toutes de la même manière : un blocage sur une représentation du nombre neuf au lieu de dix :



(bien disposé en colonne par contre), ou



ou même avec 3 jetons :



9+1

On a vu plus haut (voir le passage sur l'orientation des chiffres) l'aversion pour le chiffre 6 qu'il faut retourner pour avoir le chiffre 9. La décomposition en 9+1 a tout de même été choisie par 3 élèves, avec les chiffres alignés horizontalement :



ou les jetons alignés verticalement :



8+2

Deux élèves ont choisi le jeton 8 et le jeton 2, en alignant horizontalement les jetons :



ou verticalement les chiffres :



7+3

Deux élèves ont choisi la décomposition en 7+3. Les deux élèves avaient des chiffres, et les deux élèves ont aligné horizontalement ces chiffres, le plus grand à gauche :



ou à droite :

37

6+4

L'aversion pour le chiffre 6 se voit ici aussi : deux élèves ont choisi cette décomposition, en décomposant le nombre six :



ou le nombre quatre :



5+5

Les élèves ont tendance à choisir deux nombres proches l'un de l'autre dans une décomposition additive :

- 7 élèves avaient représenté le nombre cinq sous la forme 3+2 (avec éventuellement plus de 2 jetons)
- 8 élèves avaient représenté le nombre 6 sous la forme 3+3 (avec éventuellement plusieurs jetons)
- 2 élèves seulement avaient représenté le nombre sept sous la forme 3+4 (mais le nombre sept est spécial : 6 élèves l'avaient représenté à l'aide du seul jeton 7)
- 9 élèves avaient représenté le nombre neuf sous la forme 5+4

On peut y voir une recherche d'équilibre ou d'équité (on cherche des jetons de valeurs voisines) et le nombre dix ne fait pas exception puisque 5 élèves ont préféré la représentation 5+5 à toute autre. Il y a eu le cas où les deux chiffres 5 sont côte à côte :

5 5

celui où ils sont (avec beaucoup de soin³) l'un en-dessous de l'autre :

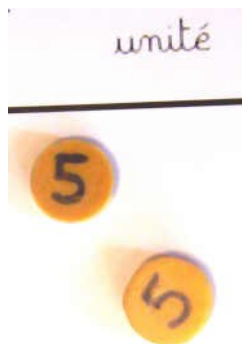
unité

5
5

celui où ce sont des jetons qui sont placés avec application :



ou rapidement :



et même la version où le nombre cinq n'est pas systématiquement représenté par un chiffre unique⁴ :

³ Il s'agit de l'élève qui avait répondu la première à la question sur la différence entre chiffres et nombres.

⁴ L'élève avait affirmé ne pas avoir vu le chiffre au verso et elle croyait donc manquer de jetons. C'est d'ailleurs une bonne idée de ne pas trop donner de jetons, afin de donner des challenges, et de travailler la résolution de problèmes, comme « je dispose des jetons 1,2 et 4. Puis-je représenter le nombre six avec ces jetons ? ».



Le nombre douze

Comme il restait un peu de temps et que les élèves n'avaient pas utilisé la colonne des dizaines pour le nombre dix, un dernier test a été effectué, sur un nombre plus grand que dix : le nombre douze. Et là, comme il n'y avait pas de blocage sur le chiffre zéro, l'écriture sur deux colonnes est arrivée plusieurs fois.

Avec une dizaine

Presque la moitié des élèves ayant produit quelque chose (8 élèves) ont utilisé la numération décimale. Deux d'entre eux ont toutefois placé le chiffre 1 dans la colonne des unités :



(c'est le nombre trois qui est représenté puisque les chiffres sont dans la colonne des unités), et :



Mais six élèves ont représenté correctement le nombre douze en plaçant les chiffres dans les bonnes colonnes :



La plupart de ces élèves manipulaient des chiffres en bois :



mais deux d'entre eux ont représenté le nombre douze avec des jetons à la Gerbert :



y compris en rapprochant les chiffres pour imiter l'écriture décimale :



10+2 sans utiliser la colonne des dizaines

Comme le nombre dix était représenté sur l'abaque juste avant, il suffisait d'y ajouter un jeton 2 pour avoir une autre représentation du nombre douze. Cela a été fait par une disposition en deux lignes dans la colonne des unités :



ou en disposant les jetons verticalement :



parfois avec une erreur (utilisation d'une partie de l'abaque comme brouillon?) :



Et ça a aussi été fait avec les chiffres en bois⁵ :



Et aussi, en utilisant deux jetons 1 plutôt qu'un jeton 2 (passage par $11+1$, ou pénurie de jetons 2?) :



Approximations successives

La représentation du nombre douze sous la forme $9+3$ a aussi été trouvée, mais assez lentement pour avoir un aperçu des étapes de la construction :



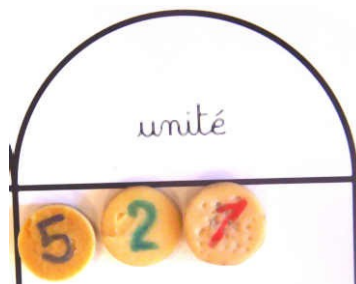
$9+2=11$ donc le choix des jetons n'est pas adéquat. Mais il suffit, pour avoir une bonne réponse,

- de rajouter un jeton 1 pour aboutir à $9+2+1$,
- de remplacer le jeton 2 par un jeton 3 :

⁵ On reconnaît l'élève appliquée et motivée qui connaissait presque la définition du mot « chiffre »,



Ainsi, le résultat suivant, qui ressemble à une erreur :



pourrait être une étape intermédiaire vers quelque chose comme :



Conclusion

Le fait que les jetons peuvent être tournés comme on le veut, permet d'apercevoir les difficultés endurées par une partie des élèves sur la reconnaissance des lettres : on peut imaginer qu'elles sont les mêmes que pour la reconnaissance des chiffres, et on voit que c'est la forme des glyphes qui est reconnue, pas leur emplacement ni leur orientation. Cela induit une difficulté concernant les chiffres 6 et 9 qui ne diffèrent que par leur orientation et une attirance vers le chiffre 8 qui se reconnaît vite.

Les élèves qui orientent bien les chiffres sont souvent des élèves qui les disposent en colonne.

Personne n'a utilisé le seul chiffre 9 pour représenter le nombre neuf, ni le seul chiffre 1 pour représenter le nombre dix. Plusieurs élèves sont déjà dépendants du chiffre 0.

Le programme de mathématiques de cycle 2 qui sera mis en place à la rentrée 2025 raconte (à propos du calcul mental) cette histoire :

En septembre 2023, près de 2,4 millions d'élèves ont été évalués à l'entrée au CM1 dans le cadre du dispositif Repères CM1. Cette évaluation a révélé des écarts de réussite très importants entre les filles et les garçons, au désavantage des filles, pour ce qui concerne la fluence en calcul mental. Ce constat peut être expliqué par un manque de confiance des filles en elles-mêmes et un état de stress lorsqu'il s'agit de répondre sur un temps très court.

Il semble que dans cette classe de CP c'était plutôt la situation inverse :

- 2 garçons montrant des *connaissances* sur la numération, en particulier sur le chiffre 0 (mais que l'un des deux confond avec le nombre 0),

- au moins 5 filles montrant un intérêt pour l'activité, et faisant preuve d'inventivité, de dextérité, de recherche (plusieurs décompositions additives d'un même nombre)⁶ et d'endurance (une heure d'attention soutenue).

La situation en début de CP ne semble donc pas celle qu'on constate en début de CM1. Il est possible que les filles soient plus lentes ou plus stressées en calcul mental mais plus performantes en calcul par manipulation, peut-être parce que le calcul par manipulation ne nécessite pas de verbalisation. Il est possible que l'activité avec l'abaque de Gerbert soit plus vécue comme ludique, que celle en calcul mental. Une étude élargie sur ce phénomène serait probablement intéressante.

Il a été proposé de continuer l'activité par l'élaboration, collectivement et à l'échelle des deux prochains trimestres, d'un cahier des nombres, où chaque élève, lors de la découverte d'un nouveau fait numérique (décomposition additive d'un nombre par exemple), le consignerait dans le cahier.

Un élève, pour dire au revoir, a prononcé la phrase « vous êtes trop gentil » ce qu'en tant que prof de maths en lycée, on n'a pas trop l'habitude d'entendre...

Alain Busser

IREMI 974

⁶ L'une d'elles fonctionne visiblement par des constants et rapides allers-retours entre manipulation et abstraction, sans réussir à verbaliser.