Découverte des décimaux par l'abaque de Gerbert en CM2

Alain Busser

26 décembre 2024

1 Plan de l'activité

L'idée était de faire mémoriser par le mouvement (canal kinesthésique) les multiplications puis divisions par 10, afin d'ensuite introduire les décimaux comme des quotients d'entiers par 10, 100 etc. Pour cela l'abaque de Gerbert a été choisi parce que d'une part il se prête bien à des activités de calcul par manipulation, d'autre part la plupart des élèves le connaissaient déjà depuis la classe de CM1. L'activité devait se terminer par des multiplications de décimaux par des entiers, voire par des décimaux, si du moins le temps le permettait.
L'activité a commencé par une évocation du contexte historique : à l'époque de Gerbert, les filles n'allaient pas à l'école, et seuls les garçons les plus riches (ou nobles) y allaient. Parmi les anciens élèves de Gerbert, on compte un historien, des évêques, un roi et un empereur ! En classe de CM1/CM2 le cours d'histoire portait précisément sur les carolingiens et les capétiens, ce fut l'occasion d'évoquer le rôle de Gerbert qui, en tant qu'évêque de Reims, a choisi Hugues Capet contre le roi Lothaire IV (dernier des carolingiens). On remarque que pour la majorité des élèves de CM2, les mots *évêque*, *cardinal* et *pape* n'évoquent rien, ce qui semble plutôt rassurant sur la laïcité.
L'expérimentation a été menée dans les deux classes de CM2 de l'école Aristide Briand puis une classe de CM1/CM2 de l'école Jules-Ferry.
Ce fut aussi l'occasion de rappeler que les calculatrices d'autrefois étaient des femmes, réputées meilleurs que les hommes en calcul, et rémunérées pour les calculs effectués.
Les élèves de CM2 ne savent pas distinguer un nombre d'un chiffre. Plusieurs d'entre eux semblent penser que zéro n'est pas un nombre : zéro est le nombre de mangues dans mon panier (lequel ne contient que des abaques de Gerbert et des jetons).

2 Multiplications

2.1 de six cents par vingt

Pour commencer, on a rappelé comment Gerbert effectuait des multiplications sur son abaque. Tout se ramène à des multiplications de nombres à un chiffre comme 600×20 :

			6		
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				2	

Le calcul de 600×20 ne nécessite que deux choses :

- la connaissance du fait numérique $6 \times 2 = 12$
- savoir où placer les chiffres 1 et 2

mais en fait, même en CM2, les tables de multiplication ne sont pas toujours connues. On commence donc par noter (sur l'abaque, dans la zone de travail au milieu) le fait que $6 \times 2 = 12$:

			6		
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
				1	2
				2	

puis on se dit que ce n'est pas 6 qu'on multiplie mais 600, il faut donc décaler les chiffres de 2 colonnes vers la gauche :

			6		
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		1	2		
				2	

puis on se dit que ce n'est pas par 2 mais par 20 qu'on veut multiplier 600, donc il faut encore une fois décaler les deux chiffres d'une colonne vers la gauche :

			6		
centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
	1	2			
				2	

Finalement $600 \times 20 = 12000$. Cette réponse a été moins fréquente que 1200. Typiquement les élèves n'ont pas essayé de bouger les chiffres comme ci-dessus, mais de calculer 600×20 mentalement ou avec l'ardoise, et directement placer les jetons à l'endroit qu'ils croyaient bon (donc avec risque d'erreur).
Les réponses 120 000 et 120 ont également été données, ainsi que 620 (confusion entre addition et multiplication) et 1400 qui montre une méconnaissance de la table de 6 (ou de 2). Un élève a trouvé que 600×20 est égal à la somme de 3 620 et 420, sans réussir à expliquer d'où viennent ces termes.

2.2 de quatre-vingt par sept mille

La connaissance des tables de multiplications est plus sollicitée ici, puisque le produit 8×7 a la réputation d'être le plus difficile à mémoriser. Ainsi, ont été proposées comme réponses :

- 420 000 (parce que $8 \times 7 = 42$)
- 49 000
- 480 000
- 52 000
- 520 000
- 62 000

qui témoignent d'une vraie méconnaissance des tables de multiplication, mais aussi, parmi ceux qui connaissaient 8×7, des erreurs de placement des chiffres, comme 560 ou 5 600. Pourtant si on sait que $8 \times 7 = 56$, on voit rapidement que les jetons 5 et 6 doivent être

- décalés d'une colonne vers la gauche parce que c'est 80 et non 8,
- puis décalés encore de 3 colonnes vers la gauche parce que c'est 7 000 et non 7.

D'ailleurs, comme l'écrivait Gerbert, *si on multiplie des dizaines par des milliers, on a des dizaines de milliers*[1]. Mais à ce stade, la plupart des élèves sont réticents à faire le geste de décaler les jetons. Ils persistent à raisonner en nombre de zéros à ajouter à la fin de 56.

3 Divisions

L'objet n'était pas seulement de faire verbaliser les mouvements des chiffres pour multiplier par 10 ou 100, mais aussi de partir vers l'inverse, avec la division par 10. Deux divisions ont donc été proposées, l'une par 10, l'autre par 100.

3.1 de deux mille trois cents par dix

Cette fois-ci, pas d'opérande à poser avant d'effectuer l'opération, parce que la division par dix n'est pas vraiment une opération, c'est juste un décalage des chiffres. On demandait donc de commencer par poser le nombre 2 300 directement dans l'abaque :

centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		2	3		

puis d'effectuer *in situ* la division par 10 :

centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
			2	3	

Les deux étapes ont posé problème, la première parce que le passage de *deux mille trois cents* à *2 milliers 3 centaines* n'est pas automatique, la seconde en partie à cause de déficit de latéralisation[2], et en partie parce que les élèves voulaient *supprimer un zéro* alors qu'il n'y a pas de jeton 0 dans l'abaque de Gerbert, ce qui rendait l'activité mentale plutôt que manipulatoire. Ceci explique les résultats 23 000 (on a multiplié par 10 au lieu de diviser par 10) et 230 000 plusieurs fois proposées.
Les réponses 600 et 60 s'expliquent peut-être par une peur de la division (même par 10) remplacée par une multiplication (des deux chiffres entre eux).

1. Plus précisément, il disait que si on multiplie des dizaines par des milliers, on devait mettre dans la colonne des dizaines de milliers le chiffre 6 qu'il appelait *doigt*, et dans la colonne précédente l'autre chiffre 5 qu'il appelait *articulation*.
2. La plupart des élèves de grande section ne savent pas distinguer la gauche et la droite, et le phénomène a déjà été constaté durant tout le cycle 3. On le constate par exemple lors du concours algorea où il est demandé à un robot de tourner vers sa gauche, avec un fort taux d'erreurs. La difficulté semble indépendante du fait que l'élève soit en ULIS ou pas, et reste présente au lycée.

3.2 de cinq mille par cent

Là encore, on ne demandait que de placer un jeton 5 dans la colonne des milliers puis de diviser par 100 le nombre ainsi représenté (c'est-à-dire décaler le 5 de deux colonnes vers la droite). En plus de la bonne réponse 50, ont été proposées, plusieurs fois (et souvent par des élèves certains de leur réponse) :

- 50 000
- 500 000
- 500

révélant une faible maîtrise de la division par 100 (certains élèves savent qu'il suffit de barrer deux zéros mais pour diviser 30 par 100, on ne peut pas barrer deux chiffres zéro puisqu'il n'y a qu'un chiffre 0).
Ce fut le moment de verbaliser collectivement les faits suivants :

- pour multiplier par 1000, on décale les chiffres de trois colonnes vers la gauche,
- pour multiplier par 100, on décale les chiffres de deux colonnes vers la gauche,
- pour multiplier par 10, on décale les chiffres d'une colonne vers la gauche,
- pour diviser par 10, on décale les chiffres d'une colonne vers la droite,
- pour diviser par 100, on décale les chiffres de deux colonnes vers la droite.

Avec cela, il devait *a priori* être facile de diviser par 10 n'importe quel nombre entier, y compris 12.

3.3 de douze par dix

C'est ici qu'ont été pris en défaut ceux qui refusaient de bouger les jetons, et qui se sont trouvés face à une tâche complexe.

En effet le jeton 2 sort de l'abaque et se trouve plus à droite que la colonne des unités. Une élève a trouvé un morceau de chiffre cassé, ressemblant à une virgule, et l'a placé sur la ligne du bord droit, comme séparateur décimal. Plusieurs élèves ont effectué une division euclidienne et proposé 1 comme quotient (mais ne savaient pas où mettre le reste). Plusieurs élèves ont proposé 2 comme résultat (pourquoi ?). Une réponse erronée assez fréquente a été 120 (toujours ce problème de latéralisation, on multiplie par 10 au lieu de diviser par 10).
Le corrigé a été l'occasion de montrer à quel point la manipulation simplifie le calcul : on pose l'index de la main droite sur le 1 et le majeur de la main droite sur le 2, puis on décale la main droite vers la droite, et il ne reste plus qu'à interpréter le résultat obtenu comme 1,2.
La réponse 1 200 est plus surprenante, mais elle témoigne peut-être du besoin de laisser une place dans l'abaque pour des dixièmes, centièmes etc. Aussi le 1200 visible ici :

centaines de milliers	dizaines de milliers	milliers	centaines	dizaines	unités
		1	2		

était-il peut-être à interpréter comme :

centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
		1	2		

D'ailleurs, pour la suite, on a retourné les abaques pour une version épurée des textes *centaines de milliers* etc, où il a été convenu que le trait central sert de séparateur décimal.
C'est aussi l'occasion de montrer les limites du *pour multiplier par 100 on ajoute deux zéros* : en ajoutant deux zéros à 1,2 on obtient 1,200 qui n'est pas le centuple de 1,2.

4 Décimaux

4.1 quarante sept centièmes

4.1.1 poser le nombre 0,47

On demandait ensuite de poser le nombre 0,47 sur cette nouvelle version de l'abaque de Gerbert :

centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
			4	7	

On pouvait directement mettre 4 dixièmes et 7 centièmes, mais aussi utiliser ce qui a été vu précédemment, en posant 47 puis en le divisant par 100 (double décalage des chiffres vers la droite).
Les jetons ont souvent été placés trop à droite, comme

- 0,000 047
- 0,000 000 47
- 0,001 47 (avec ajout d'un chiffre 1)

mais aussi le nombre 47 a été proposé, sans le décalage ultérieur (le calcul était considéré comme terminé). Dans une des classes de CM2, plusieurs garçons ont copié sur leur voisine, tant ils se sentaient bloqués par cette activité.

4.1.2 puis le multiplier par 1 000

Le but était de montrer que les techniques de multiplication par 10, 100 ou 1 000, déjà vues pour les entiers, fonctionnent aussi pour les décimaux. L'attendu était que les chiffres 4 7 soient décalés de trois colonnes vers la gauche :

centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
4	7				

Une réflexion sur les ordres de grandeur est celle-ci : 0,47 c'est un peu moins de la moitié, donc $0,47 \times 1000$ c'est un peu moins de la moitié de 1 000 donc ça se chiffre en centaines. Malgré cela, les réponses suivantes ont été données :

- 4,7
- 0,047
- 0,000 47
- 470 000
- 47
- 47 000
- 4 700

4.2 multiplier 0,6 par 400

Cette fois-ci, on pose les opérandes avant d'effectuer la multiplication :

			6		
centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
4					

Ensuite on pose le produit 6×4 :

			6		
centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
	2	4			
4					

Ensuite on se dit que ce n'est pas 6 que l'on multiplie mais 0,6 donc décalage d'une colonne vers la droite :

			6		
centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
		2	4		
4					

Puis on se dit que ce n'est pas par 4 quel l'on multiplie mais par 400, donc décalage de deux colonnes vers la gauche :

			6		
centaines	dizaines	unités	dizièmes	centièmes	millièmes
2	4				
4					

Ce qui donne $0,6 \times 400 = 240$. Beaucoup d'autres réponses ont été trouvées :

- 60
- 2 400
- 24
- 10
- 0,002 4

- 220
- 600
- 2,4
- 24 000
- 0,24
- 0,024

où on constate qu'il n'y a pas que des erreurs de placement de la virgule (le 10 s'explique probablement par une échappatoire consistant à effectuer une addition, moins difficile, au lieu de la multiplication demandée ; le 220 résulte d'une méconnaissance de la table de multiplication $6 \times 4 = 22$).

4.3 diviser 24 000 par 10 000

Une seule classe a eu le temps de faire ce calcul, on y a trouvé la réponse 240. Le raisonnement suivant peut expliquer ce résultat : diviser par 10 000, c'est barrer 4 zéros. Or dans l'écriture de 24 000 il n'y a que 3 zéros, on ne peut pas en barrer 4. Donc on n'en barre que 2 et on trouve 240 qu'il ne reste plus qu'à poser sur l'abaque...

4.4 multiplier 0,05 par 2 000

Question piège : il y a un chiffre zéro supplémentaire, du fait de la multiplication $5 \times 2 = 10$. On doit donc

- poser un 1 dans la colonne des dizaines,
- puis le décaler de 2 crans vers la droite (à cause de 0,05) ce qui le place dans la colonne des dixièmes,
- enfin le décaler de 3 crans vers la gauche (à cause de 2 000) ce qui le place dans la colonne des centaines.

En résumé, $0,05 \times 2000 = 100$. La réponse a été trouvée, mais également

- 10
- 0,1
- 10 000

ce qui montre une faible maîtrise des ordres de grandeur.

4.5 multiplier 0,6 par 0,4

Cette multiplication n'a été effectuée qu'en CM1/CM2, faute de temps dans les autres classes. Elle surprend par l'ordre de grandeur du résultat, qui est à la fois plus petit que 0,6 et que 0,4.
La réponse 1 a été proposée (addition au lieu de multiplication) ainsi que 0,002 4 et 240 mais la réponse la plus fréquente a été 2,4 (pour rappel la réponse correcte est 0,24).

5 Conclusion

Des problèmes se sont posés durant l'activité. Par exemple, il n'y avait que 11 abaques disponibles et les élèves ont donc dû se mettre en binôme, et de ce fait, un seul élève manipule ce qui est dommageable pour l'autre élève. Par ailleurs, les jetons n'étaient pas bien mélangés et il y a eu des besoins non immédiatement satisfaits (jetons manquants jusqu'à une seconde distribution).
Dans un binôme, les rythmes sont souvent différents, mais aussi d'un binôme à un autre, et les écarts de niveaux se creusent au cours de l'activité parce que les plus lents sont aussi ceux qui ont le plus besoin de manipuler, et aussi les plus dissipés. L'activité en classe entière est donc moins efficace qu'en petit groupe, et il serait intéressant de l'expérimenter en APC ou en classe ULIS de petit effectif.
En résumé :

- Pour introduire les décimaux, l'abaque de Gerbert est un outil intéressant (parce qu'il se base sur la manipulation, en associant la division par dix à un geste facile à mémoriser),
- mais ça marche mieux avec des élèves ayant déjà une connaissance de l'outil (d'où l'intérêt d'un atelier pluriannuel commençant en CP cette année, en espérant avoir à la rentrée 2029 des élèves qui aient pratiqué l'abaque de Gerbert durant toute leur scolarité en élémentaire, afin de voir si leur connaissance des décimaux diffère de celle du groupe témoin),
- la plupart des élèves de CM2 résistent très fort à la demande de manipulation (passer de *j'ai compris que pour diviser par 10 on décale les chiffres d'une colonne vers la droite* au mouvement effectif des chiffres), à croire que les jetons sont enduits d'une substance extrêmement toxique. Cette attitude, qui va à l'encontre du triptyque *manipuler-verbaliser-abstraire* de la méthode dite de Singapour, est un frein à l'apprentissage : peut-on apprendre le golf sans jamais prendre un club en main, sans jamais taper dans une balle ?