

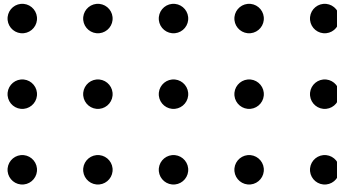
Lucasta

(E. Lucas 1880)

Matériel nécessaire

Du papier et des crayons (ou un tableau et des velleda).

Avant de jouer, on trace sur le papier un nuage de points comme ceci :

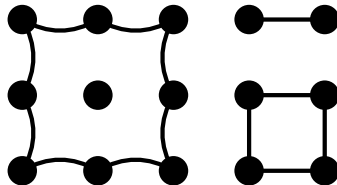


Règle du jeu

Chaque joueur à son tour, relie deux points de son choix, mais

- la ligne tracée ne doit pas croiser une ligne précédemment tracée ni passer par un autre point que ses extrémités,
- deux points donnés ne doivent pas être reliés par plus d'une ligne,
- par un point donné, il ne doit pas passer plus de 2 lignes.

Autrement dit, le jeu consiste à construire un graphe simple (pas d'arêtes multiples) planaire (les arêtes ne se croisent pas) dont les sommets sont donnés au départ, et tel qu'aucun sommet ne soit de degré supérieur à 2. Par exemple, ce jeu est terminé au bout de 13 coups :



Édouard Lucas était professeur de mathématiques en classe prépa. Il a créé plusieurs jeux dont les plus célèbres sont la pipopipette et la tour d'Hanoï.

Lucas appelait ce jeu *le jeu de la jonction des points et des lignes*. Conway qui adorait ce jeu, l'a baptisé **Lucasta** en hommage à Lucas, et l'a amélioré en créant **sprouts**.

Spoiler

Dans sa description du jeu, Lucas écrit :

En résumé, A gagnera quand le nombre de points donnés sera égal à 2 ou à un multiple de 4 moins 1 ; il perdra dans tous les autres cas, si l'on joue correctement.

Cela signifie que le nombre de Grundy de Lucasta à n points est non nul si et seulement si $n \equiv 3 \pmod{4}$ ou $n = 2$.

Pour $n = 2$ le seul coup jouable est de relier les deux seuls points présents, allant de



à



dont le nombre de Grundy est nul. Donc le nombre de Grundy de Lucasta à 2 points est égal à 1.

Le nombre de Grundy de



est nul (plus personne ne peut ajouter de trait) donc le nombre de Grundy de



est égal à 1, donc celui de



est nul, donc celui de Lucasta à 3 points :



est égal à 1.

Le nombre de Grundy de Lucasta à 7 points est aussi égal à 1.

Nim

(Ch. Bouton 1901)

Matériel nécessaire

Des jetons à poser sur la table de jeu, ou des graines à placer dans des godets, ou des allumettes à mettre en rangs, ou des cartes à mettre en rang (dos dessus) ou en piles.



Règle du jeu

Chaque joueur à son tour

- choisit un tas (non vide) de jetons,
- puis retire autant de jetons qu'il souhaite (mais au moins un jeton), de ce tas.

Celui qui prend le dernier jeton gagne le jeu.

Par exemple ci-dessus il y a 10 possibilités.

Charles Bouton, dont le directeur de thèse était Sophus Lie, enseignait les mathématiques à Harvard, et était rédacteur du bulletin de l'AMS.

La première console de jeu était le **Nimtron**, elle jouait à Nim.

Le grand public a découvert le jeu de Nim par un film d'Alain Resnais : l'année dernière à Marienbad.

Spoiler

Le nombre de Grundy du jeu de Nim est la Nim-somme des nombres de Grundy des tas. Par exemple avec



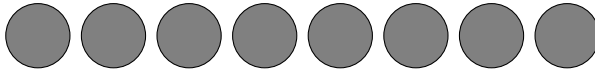
le nombre de Grundy est $2 \oplus 3 \oplus 5 = 1 \oplus 5 = 4$.

Kayles

(E. Dudeney 1908)

Matériel nécessaire

Des pions ou des jetons à aligner sur la table, par exemple



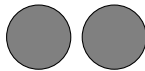
Règle du jeu

Chaque joueur à son tour

- ou bien retire un jeton de la table,
- ou bien retire deux jetons **voisins** de la table.

Celui qui retire le dernier jeton de la table, gagne le jeu.

Par exemple cette position est gagnante (on gagne en retirant les deux jetons) :



mais pas celle-là (on ne peut retirer qu'un jeton, et l'adversaire gagnera en retirant l'autre jeton) :



Ernest Henry Dudeney était un ludomathématicien de la fin du XIX^e siècle.
Le nom du jeu provient d'une analogie avec le bowling.

Spoiler

La suite des nombres de Grundy de Kayles commence par

1. 1
2. 2
3. 3
4. 1
5. 4
6. 3
7. 2
8. 1
9. 4
10. 2
11. 6
12. 4
13. 1

Richard guy a démontré en 1949 que la suite est périodique à partir du rang 71, la période étant 8, 2, 7, 4, 1, 2, 8, 1, 4, 7, 2, 1 : le plus grand nombre de Grundy possible pour ce jeu est 8.

Le fait qu'aucun des nombres de Grundy de ce jeu n'est nul, signifie que le jeu est gagnant pour celui qui joue en premier.

La suite des nombres de Grundy de Kayles a pour numéro A002186 dans l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers.

le jeu de Nim de Lasker

(E. Lasker 1931)

Matériel nécessaire

Des jetons (ou des cartes à jouer) à empiler sur la table. On se met d'accord avant de jouer, sur le nombre de tas et leurs hauteurs respectives.

Règle du jeu

Chaque joueur à son tour, choisit un tas de jetons, puis

- **ou bien** en retire autant de jetons (au moins 1) qu'il souhaite,
- **ou alors** divise ce tas en deux tas de taille inférieure (comme lorsqu'on coupe un jeu de cartes).



Celui qui retire le dernier jeton a gagné. Par exemple dans la situation ci-dessus, si on choisit le tas de gauche, on peut

- retirer un jeton, ce qui ramène ce tas à un tas de hauteur 1,
- vider complètement le tas, auquel cas il ne reste que deux tas, de hauteurs respectives 3 et 5,
- ou scinder le tas en deux, ainsi :



Emanuel Lasker, mathématicien allemand, est surtout connu pour avoir été champion du monde d'échecs de 1894 à 1921 sans interruption. Il a également créé une variante du jeu de dames appelée **laska**.

Spoiler

Pour une pile de n jetons au départ, le nombre de Grundy du jeu de Nim de Lasker est égal à

- $n - 1$ si n est divisible par 4 (sauf si $n = 0$, auquel cas le nombre de Grundy est 0),
- n si $n \equiv 1 [4]$,
- n si $n \equiv 2 [4]$,
- $n + 1$ si $n \equiv 3 [4]$.

Le nombre de Grundy n'étant jamais nul, il existe une stratégie gagnante pour celui qui joue en premier.

Exemple : le nombre de Grundy de



est 3. En effet les nombres de Grundy des trois tas sont respectivement 2, 4 et 5, or $2 \oplus 4 \oplus 5 = 2 \oplus 1 = 3$.

le jeu de Grundy

(P. Grundy 1939)

Matériel nécessaire

Des jetons (ou des cartes à jouer) à empiler sur la table. On commence avec une pile de n jetons mais il faut prévoir de l'espace pour créer des nouveaux tas de jetons au cours du jeu.

Règle du jeu

Chaque joueur à son tour

- choisit un tas de hauteur au moins 3,
- puis scinde ce tas en deux tas **de hauteurs différentes** (comme lorsqu'on coupe un jeu de cartes).



Par exemple ci-dessus le tas de gauche est injouable et il n'y a que trois possibilités :

- retirer un jeton du tas du milieu et le poser à côté,
- retirer un jeton du tas de droite et le poser à côté,
- retirer deux jetons du tas de droite et les poser à côté, en un tas de hauteur 2.

Patrick Grundy est un mathématicien britannique, qui a utilisé les nombres de Grundy pour démontrer que tout jeu impartial est équivalent à un jeu de Nim à un tas de jetons (la hauteur du tas est le nombre de Grundy du jeu impartial).

Quelques années auparavant, Roland Sprague, inspiré par les travaux de Lasker, avait montré le même résultat, sans donner de construction similaire.

Spoiler

Le nombre de Grundy d'un tas de 1 jeton est nul, puisque ce tas est injouable :



Il en est de même pour un tas de 2 jetons



puisque la seule manière de scinder ce tas est



et dans ce cas les deux tas sont de même hauteur ce que la règle du jeu interdit.

Un tas de hauteur 3



peut être scindé en deux tas de hauteurs inégales :



dont le nombre de Grundy est, d'après ce qui précède, $0 \oplus 0 = 0$; le nombre de Grundy d'un tas de 3 jetons est donc égal à 1 (plus petit entier non nul).

La suite des nombres de Grundy du jeu de Grundy a pour numéro A002188 sur l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers.

Conway a conjecturé à la fin des années 1970 que cette suite est prépériodique. C'est toujours une conjecture malgré le calcul de 10 000 000 termes de la suite.

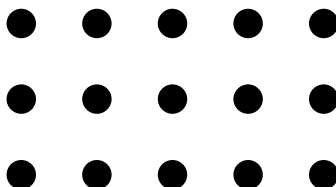
Cram

(G. Mott-Smith 1950)

Matériel nécessaire

Une grille (par exemple un échiquier) et des dominos (rectangles deux fois plus longs que larges) dont la largeur est légèrement inférieure à celle de chaque case de la grille. Des allumettes peuvent également faire l'affaire du moment qu'une allumette couvre deux cases contigües de la grille.

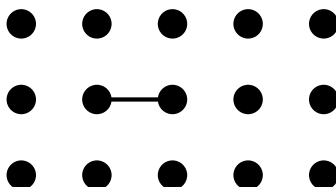
On peut aussi jouer avec des crayons sur du papier préparé avec un nuage de points, comme ici :



On peut aussi jouer sur une planche percée de trous disposés selon une grille et les joueurs branchent des fiches électriques (non connectées !) sur des paires de trous libres.

Règle du jeu

Chaque joueur à son tour pose un domino sur deux cases libres de la grille ou branche une fiche dans deux trous libres de la grille ou trace un trait rectiligne de longueur unité entre deux sommets libres du graphe :



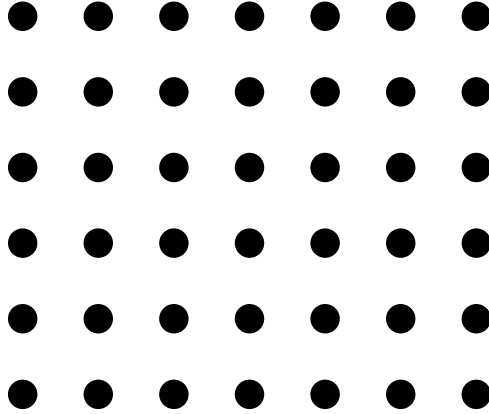
Le premier qui ne peut plus jouer (parce que les cases libres sont isolées) a perdu le jeu.

C'est Martin Gardner qui a trouvé le nom **Cram** pour ce jeu, dans un article publié en 1974.

Geoffrey Mott-Smith était un espion (cryptanalyste) britannique pendant la seconde guerre mondiale, et spécialiste de jeux dont le bridge.

Spoiler

Le plus grand nombre de Grundy connu sur un plateau de Cram est 5, obtenu pour ce plateau :



Julien Lemoine a créé un logiciel appelé g1op pour étudier le jeu Sprouts et c'est avec ce logiciel qu'il a calculé ce record.

La plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de Grundy de Cram $n \times n$ est non nul, est 7. Le nombre de Grundy de Cram 7×7 est 1.

Je ne connais pas le nombre de Grundy de Cram 8×8 (32 dominos sur un échiquier).

La suite des nombres de Grundy pour Cram $n \times 1$ semble être pré périodique avec une période de 34 (Schneider 2009).

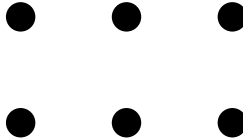
On conjecture que le nombre de Grundy de Cram $n \times 3$ est 0 ou 1.

Sprouts

(J.H. Conway, M. Paterson 1967)

Matériel nécessaire

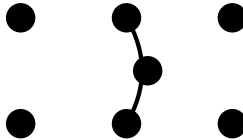
Une feuille de papier et un crayon par joueur (ou un tableau et un velleda par joueur). Avant de jouer on dessine un nuage de points au tableau, par exemple :



Règle du jeu

Chaque joueur à son tour relie deux points (ou un point à lui-même) par un trait de telle manière que deux traits ne se croisent jamais et qu'au maximum trois traits passent par un point donné.

Une fois le trait tracé, on y ajoute un point. Par exemple :



Autrement dit, le jeu Sprouts consiste à construire un graphe planaire tel qu'aucun sommet n'a de degré supérieur à 3, à partir d'un certain nombre de sommets fixés à l'avance, en ajoutant un sommet sur chaque arête nouvellement construite.

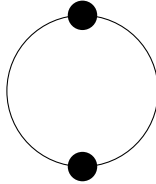
Le premier qui ne peut plus tracer un trait sans violer une des contraintes ci-dessus, perd le jeu.

Michael Paterson est un pionnier de l'infographie connu pour un automate cellulaire appelé *Paterson's worm*.

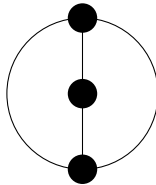
John Horton Conway est à l'origine du mot **impartial** pour désigner les jeux de type Nim. Il a créé de nombreux jeux impartiaux dont plusieurs basés sur des graphes, comme *green hackenbush*.

Spoiler

En 2010, Julien Lemoine et Simon Viennot déterminent l'identité du gagnant à Sprouts sur n points en fonction de n . Par exemple si $n = 1$ celui qui joue en premier perd le jeu : le seul mouvement possible au début du jeu est de joindre le point à lui-même, obtenant



Le nombre de Grundy de cette position est égal à 1 puisque la seule suite possible est



de nombre de Grundy nul. Par conséquent le nombre de Grundy de Sprouts à un sommet est nul.

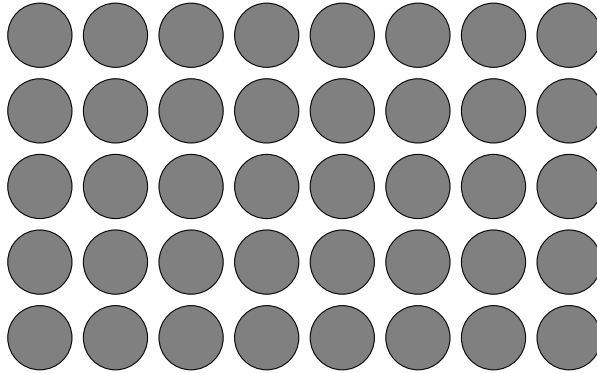
Lemoine et Viennot conjecturent que le nombre de Grundy de Sprouts à n points est égal à 1 si et seulement si $n \equiv 3 [6]$ ou $n \equiv 4 [6]$ ou $n \equiv 5 [6]$ et à 0 dans les autres cas : on ne connaît à ce jour aucune valeur de n pour laquelle le nombre de Grundy de Sprouts à n points dépasse 1.

Chomp

(F. Schuh 1952, D. Gale 1974)

Matériel nécessaire

Le jeu de Chomp se joue avec des jetons (ou des cartes) disposés en rectangle, ainsi :



Règle du jeu

Chaque joueur à son tour, choisit un jeton, puis l'enlève de la table, ainsi que tous les jetons qui sont à sa droite ou en-dessous de lui.

Celui qui enlève le jeton en haut à gauche, perd le jeu.

Variante et généralisation

Ce jeu est un cas particulier du jeu des diviseurs de Fred Schuh : on écrit sur des cartes les diviseurs d'un nombre (ci-dessus, 10 368) et à chaque tour de jeu, on choisit une carte, que l'on enlève ainsi que tous ses diviseurs. Celui qui enlève 10 368 a perdu le jeu.

Voici la position initiale du jeu des diviseurs de 30 :

1	2	3	5	6	10	15	30
---	---	---	---	---	----	----	----

et chaque fois qu'on enlève une carte, on enlève aussi ses diviseurs.

David Gale a aussi inventé le jeu **bridg-it** et réinventé le jeu **Hex** (en collaboration avec John Nash et Claude Shannon).

C'est surtout pour l'algorithme à la base de parcoursup que David Gale est connu.

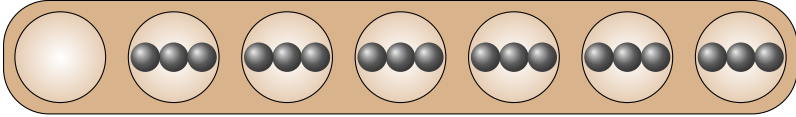
Spoiler

Pour $n < 30$, le jeu des diviseurs de n a pour nombre de Grundy, le nombre de diviseurs propres de n . Mais le jeu des diviseurs de 30 (ou chomp tridimensionnel dans un cube) a 3 pour nombre de Grundy, alors que 30 a 6 diviseurs propres.

Multitchouka (V. Gautheron 1976)

Matériel nécessaire

Un plateau d'awalé plus un réservoir de graines (case spéciale appelée rouma), ou un alignement de godets comme ici (la rouma est la case initialement vide) :



Il faut également des graines, à placer dans les cases autres que la rouma au début du jeu.

Si on joue sur un plateau à deux rangées comme awalé, on sème dans le sens trigonométrique, en passant par le réservoir, appelé rouma. Si on joue sur un plateau à une seule rangée, on décide que la rouma est la case tout à gauche (initialement vide) et on sème de droite à gauche, en revenant tout à droite si on dépasse (vers la gauche) la rouma.

Règle du jeu

Chaque joueur à son tour, choisit une case non vide autre que la rouma, puis sème une par une toutes les graines qu'elle contient, dans le sens décrit ci-dessus. La suite dépend de la case où est tombée la dernière graine de ce semis élémentaire :

- si cette graine tombe dans la rouma, le joueur rejoue : il choisit une case non vide autre que la rouma etc.
- si la graine tombe dans une case non vide autre que la rouma, le joueur rejoue depuis cette case : il prend les graines que contient cette case, puis les sème dans le même sens,
- si la dernière graine tombe dans une case vide autre que la rouma, le tour de jeu s'arrête et c'est à l'adversaire de jouer.

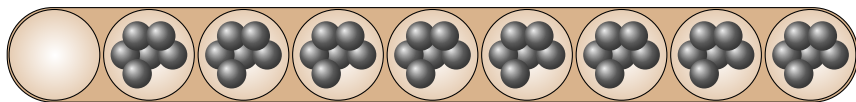
Celui qui dépose la dernière graine dans la rouma, gagne ce jeu.

Véronique Gautheron est une mathématicienne française, ayant effectué des recherches en Analyse Non Standard.

C'est dans Wari et Solo, les jeux de calcul africains, coécrit avec André Deledicq et Assia Popova, qu'elle décrit ce jeu.

Spoiler

Le nombre de Grundy de l'exemple est égal à 0. On ne connaît pas de configuration initiale de Multitchouka dont le nombre de Grundy soit égal à 9 ou 10, mais ce jeu



a un nombre de Grundy égal à 11.

Twins (H.Lenstra 1978)

Matériel nécessaire

Des jetons bicolores type Reversi, ou des pièces de monnaie, posées en ligne sur la table de jeu, initialement toutes sur pile, par exemple :



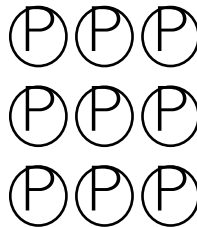
Règle du jeu

Chaque joueur à son tour, retourne exactement deux pièces, mais celle de droite doit passer de pile à face.

Le premier qui ne peut plus jouer (par exemple parce que toutes les pièces sont sur face) a perdu le jeu.

Turning corners

En disposant les jetons en rectangle :



chaque joueur à son tour retourne 4 jetons formant eux-mêmes les sommets d'un sous-rectangle mais celui qui est en bas à droite doit obligatoirement passer de pile à face.

Hendrik Lenstra est connu pour un algorithme de factorisation des entiers par les courbes elliptiques, l'algorithme LLL sur les réseaux et la conjecture ABC (en théorie des nombres).

Le jeu **twins** lui a été inspiré par Conway, lui-même inspiré par la construction des ordinaux par Von Neumann.

Spoiler

Le nombre de Grundy de *twins* est la Nim-somme des abscisses des pièces qui sont sur pile. Par exemple le nombre de Grundy de



(dont les $\textcircled{P}$ sont aux abscisses 0, 2, 3 et 5)

est $0 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 5 = 2 \oplus 6 = 4$.

Les nombres de Grundy de *turning corners* forment la table de Pythagore d'une opération appelée par Conway nim-multiplication. Cette opération, qui est distributive par rapport à la nim-addition, donne aux nombres de Grundy une structure de corps de caractéristique 2.

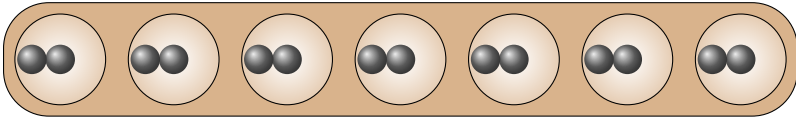
Lenstra et Conway ont montré que tout jeu impartial peut être modélisé par un jeu où on retourne des jetons.

La suite des nombres de Grundy des jeux de *twins* à n pièces porte le numéro A003815 sur l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers.

Sowing impartial (J.H. Conway 1996)

Matériel nécessaire

Ce jeu se joue sur un plateau à une rangée de cases, par exemple un alignement de godets, et des graines placées initialement dans les cases, d'une manière convenue avant le début de la partie, par exemple :



Règle du jeu

Chaque joueur à son tour

- choisit une case non vide (contenant au moins une graine) du plateau,
- choisit un sens de semis (de gauche à droite, ou de droite à gauche),
- vide la case choisie de toutes ses graines,
- puis sème les graines, une par une, dans le sens choisi.

La seule contrainte est que **la dernière graine du semis doit tomber dans une case non vide** du plateau.

Le premier qui ne peut plus jouer en respectant la règle ci-dessus, a perdu le jeu.

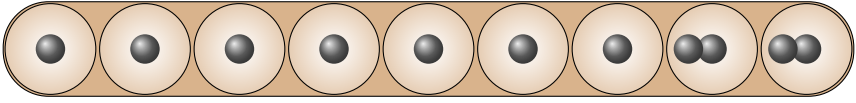
Variante

La version qui perd gagne semble intéressante.

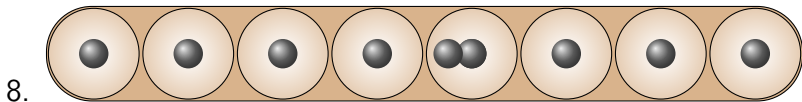
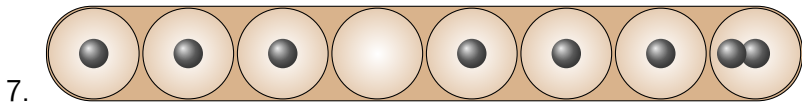
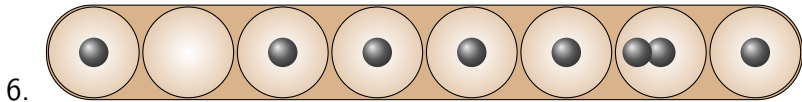
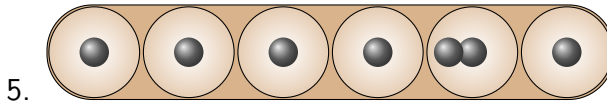
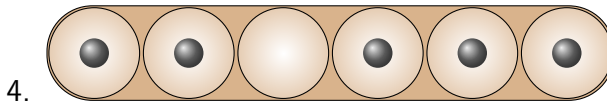
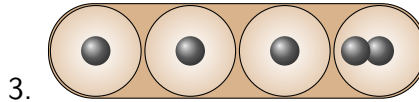
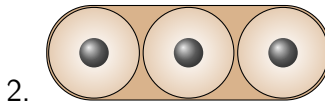
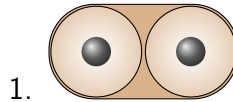
Conway a créé ce jeu pour un atelier, co-animé avec Richard Guy, dans un séminaire annuel consacré aux jeux combinatoires, pour montrer que les jeux de semailles sont aussi intéressants à étudier.

Spoiler

Le plus grand nombre de Grundy actuellement connu pour un jeu de Sowing impartial est 9, calculé par Jeff Erickson pour ce plateau :



Voici, selon Erickson, les plus simples (en nombre total de graines) des jeux de Sowing impartial ayant un nombre de Grundy donné (un plateau ne comportant qu'une graine a un nombre de Grundy nul) :



Juniper Green (R. Porteus 1997)

Matériel nécessaire

Le jeu se joue avec des cartes portant des nombres entiers successifs :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

On peut aussi jouer en barrant des nombres inscrits dans un tableau mais il faut se rappeler quel est le dernier nombre barré.

Règle du jeu

- Le premier joueur retire du jeu, une carte portant un nombre pair de son choix.
- Ensuite, à chaque tour de jeu, on retire du jeu une carte portant un multiple ou un diviseur du nombre précédemment joué.

Le premier qui ne peut plus jouer a perdu le jeu.

Richard Porteus a inventé ce jeu lorsqu'il était enseignant à l'école de Juniper Green. C'est par Ian Stewart, successeur de Martin Gardner dans *Science*, que le jeu est connu depuis 1997.

Spoiler

Dans un article de 2022, Julien Lemoine détermine toutes les valeurs de n pour lesquelles le Juniper Green à n cartes a un nombre de Grundy égal à 0.

Le plus petit n pour lequel le nombre de Grundy de Juniper Green à n cartes dépasse 1, est 17 : le nombre de Grundy de Juniper Green à 17 cartes est 2. Il en est de même pour le Juniper Green à 18 cartes.

On ne sait pas à l'heure actuelle s'il existe des valeurs de n pour lesquelles le nombre de Grundy de Juniper Green à n cartes est supérieur à 2.