Combinateurs en flow programming

Alain Busser

9 juin 2022

1 Introduction

Dans le λ-calcul, il n'y a que des fonctions. Un combinateur est une fonction spéciale qui combine des fonctions.

1.1 I

Le plus simple des combinateurs est celui qui ne fait rien : on lui envoie une fonction et il renvoie la même fonction :

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d] \\ f \end{tikzcd}$$

Les autres combinateurs que l'on verra combinent plusieurs (en général, 2) fonctions.

1.2 K et 0

Les plus simples des combinateurs qui combinent deux fonctions sont ceux qui en oublient une des deux et transmettent l'autre telle quelle. Il y en a donc 2.

1.2.1 K

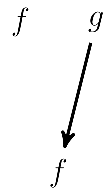
K (qui est la valeur logique *true*) est le combinateur qui oublie la fonction g :

$$\begin{tikzcd} f \arrow[dr] & & g \\ & f & \end{tikzcd}$$

K est la première lettre du mot $\mathfrak{Konstant}$ parce que si on considère g comme une variable, la valeur f renvoyée par le combinateur est indépendante de cette variable (donc constante).

1.2.2 0

Le combinateur 0 (qui correspond à la valeur logique *false*) oublie par contre la première fonction f :

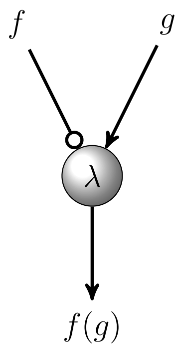


Le combinateur est noté 0 parce que dans les numéraux de Church (voir plus bas) il représente le nombre 0.

2 Application et composition

2.1 Le combinateur λ

Le combinateur le plus important pour la suite (parce qu'il permet de construire les autres combinateurs) est l'application : on lui donne deux fonctions f et g et il applique f à g pour renvoyer $f(g)$:



Dans la suite, on notera par une flèche la fonction que l'on applique et par une flèche la fonction à qui on applique une autre fonction.

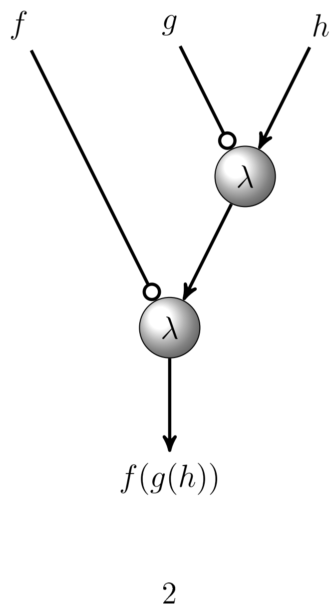
Dans les numéraux de Church, le combinateur λ représente

- Le nombre 1,
- l'exponentiation.

D'où le choix de la lettre grecque λ pour le nommer : cette lettre ressemble à la fois au chapeau utilisé par certaines calculatrices pour désigner l'exponentiation, et au chiffre 1.

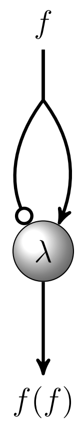
2.2 Composition

Il ne faut pas confondre l'application de f à g vue ci-dessus, avec la composée de f et g qui est $f \circ g$: celle-ci est la fonction qui, à h, associe $f(g(h))$:



2.3 Le combinateur M

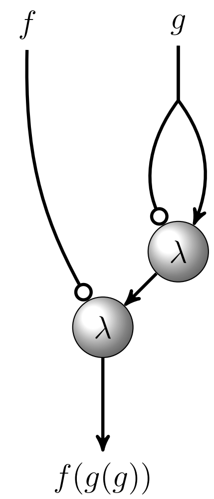
Le combinateur M que Smullyan appelle « mockingbird » s'obtient facilement à l'aide du combinateur d'application :



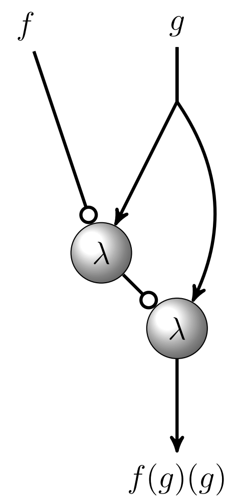
3 Combinateurs décrits par Smullyan

3.1 Combinateurs L, W, B, D et E

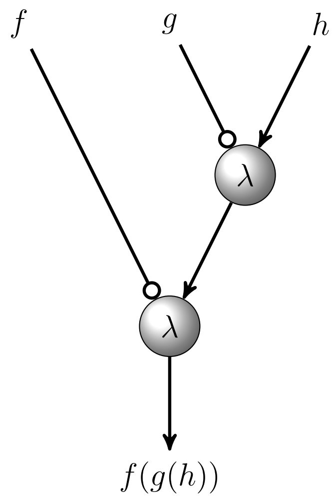
3.1.1 Combinateur L



3.1.2 Combinateur W



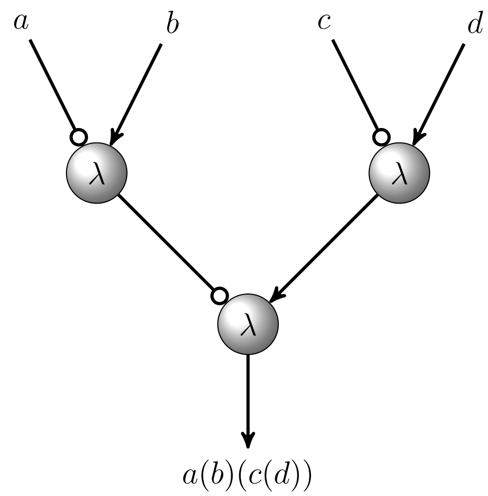
3.1.3 Combinateur B



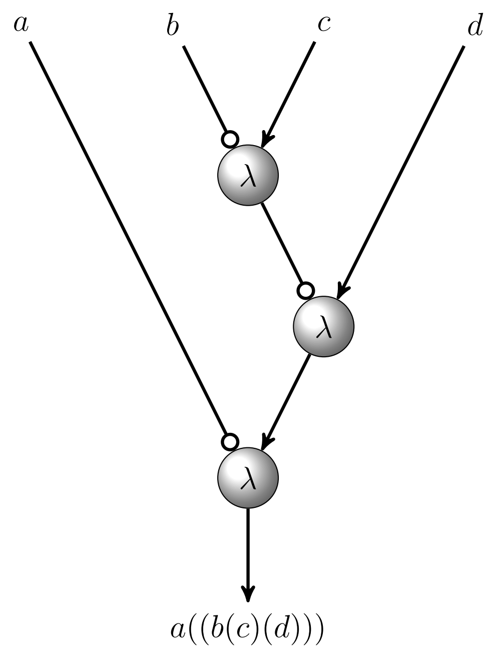
On reconnaît la composition des fonctions $f \circ g$.

3.1.4 Combinateur D

On obtient D en appliquant B à lui-même :

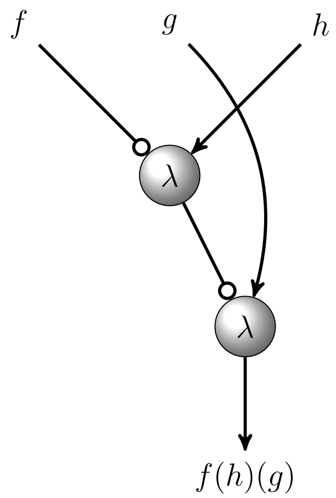


3.1.5 Combinateur E



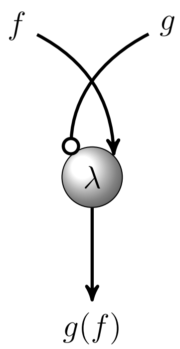
3.2 Les combinateurs de permutation

3.2.1 Le combinateur C



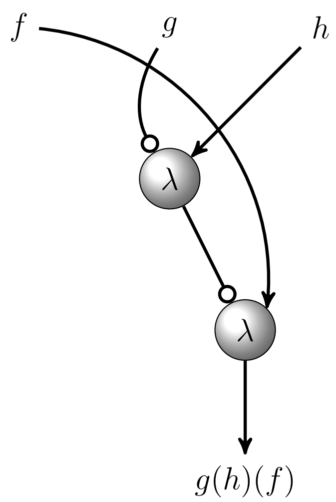
Dans les booléens de Church, le combinateur C représente la négation.

3.2.2 Le combinateur T



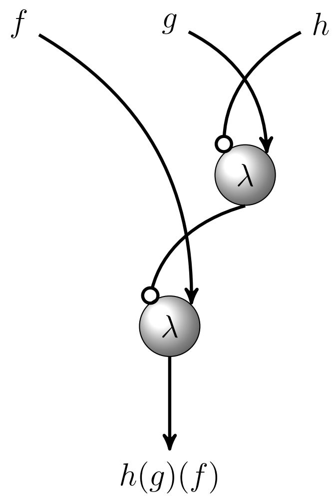
T est l'initiale de *transposition*.

3.2.3 Le combinateur R

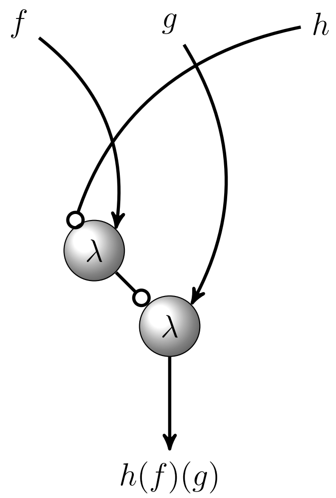


R est la première lettre de *rotation*.

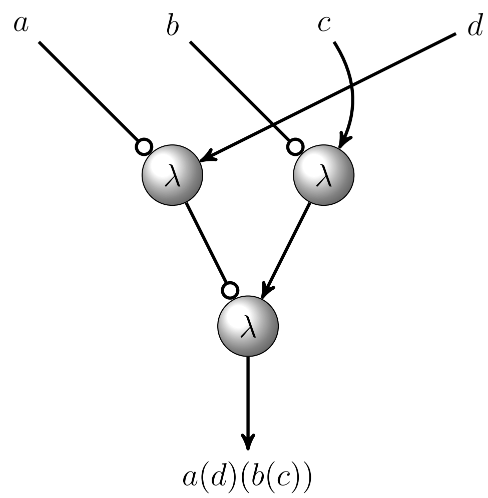
3.2.4 Le combinateur F



3.2.5 Le combinateur V



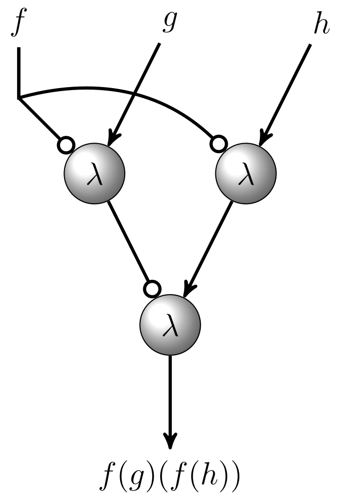
3.2.6 Combinateur G



4 Combinateurs S, K et I

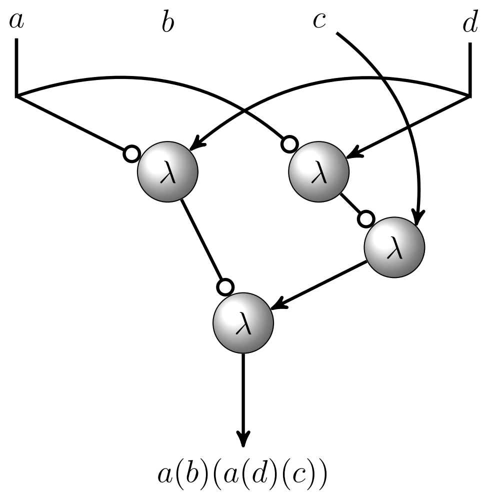
4.0.7 Le combinateur S

S est l'initiale de *substitution*. Avec K et I, c'est l'un des premiers combinateurs cités par Curry.



4.0.8 Le combinateur J

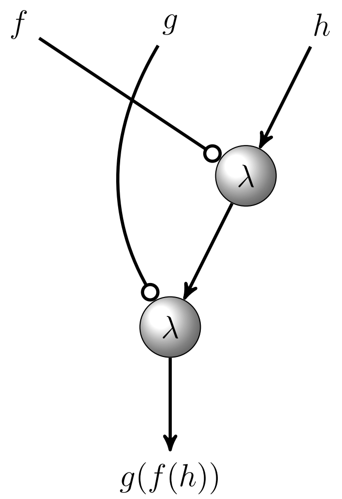
Ce combinateur est de Rosser.



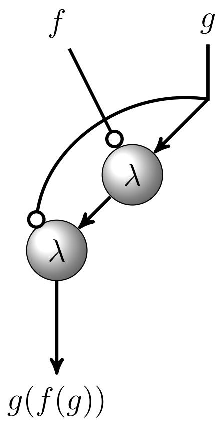
5 Combinateurs de point fixe

5.1 Combinateurs utiles pour Y

5.1.1 Le combinateur Q

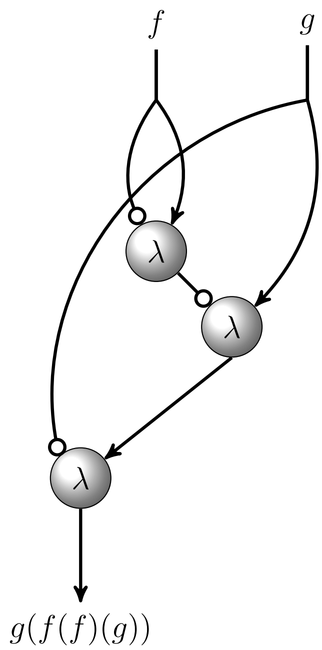


5.1.2 Le combinateur O



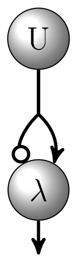
5.1.3 Combinateur U

Ce combinateur est de Turing.

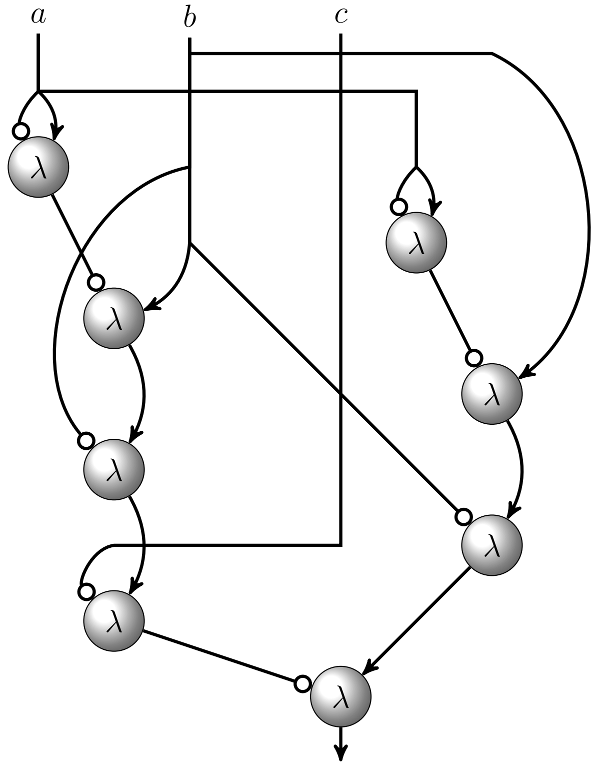


5.2 Combinateur de point fixe (Turing 1937)

5.2.1 Version abrégée

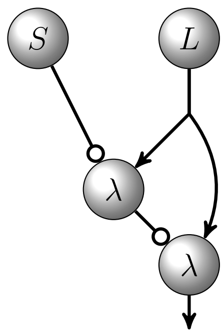


5.2.2 Le combinateur

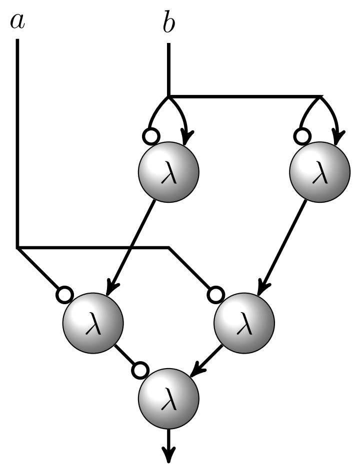


5.3 Combinateur de Curry

5.3.1 Version abrégée



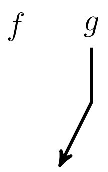
5.3.2 Le combinateur Y



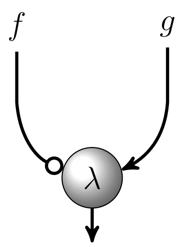
6 Numéraux de Church

6.1 Nombres

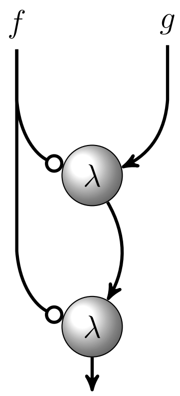
Le nombre 0 a déjà été vu :



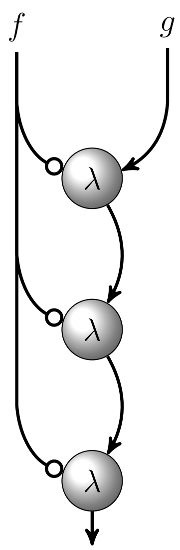
6.1.1 Le nombre 1



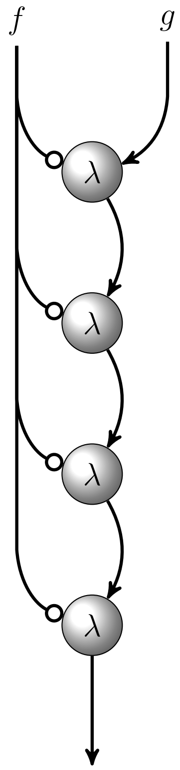
6.1.2 Le nombre 2



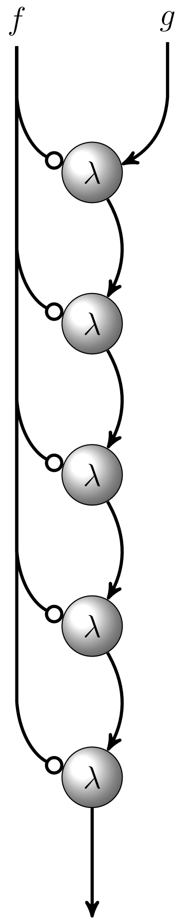
6.1.3 Le nombre 3



6.1.4 Le nombre 4

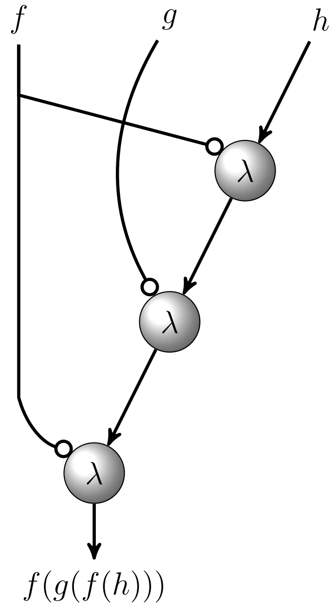


6.1.5 Le nombre 5

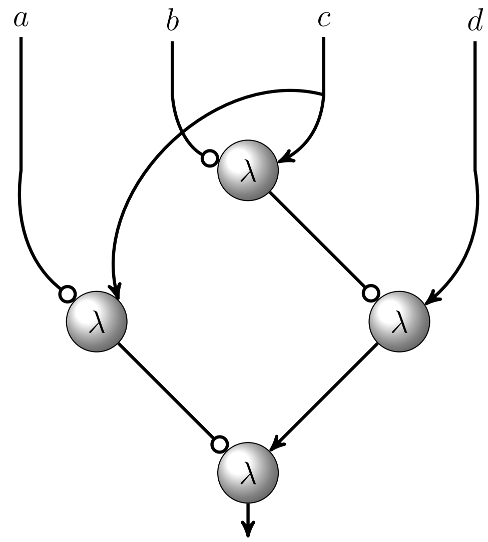


6.2 Opérations

6.2.1 Successeur



6.2.2 Addition



6.2.3 Exponentiation

La soustraction et la multiplication font usage du combinateur Y, donc sont nettement plus complexes que l'addition. Mais l'exponentiation est par contre très simple puisqu'il s'agit du combinateur d'application :