ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.

BAND 1.

Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire

Par HELGE VON KOCH.

Avec 5 figures dans le texte.

Communiqué le 12 Octobre 1904 par G. MITTAG-LEFFLER et KARL BOHLIN.

Jusqu'à l'époque où WEIERSTRASS inventa une fonction continue ne possédant, pour aucune valeur de la variable, une dérivée déterminée[1], c'était une opinion bien répandue dans le monde scientifique que toute courbe continue possède une tangente déterminée (du moins en exceptant certains points singuliers); et l'on sait que, de temps en temps, plusieurs géomètres éminents ont essayé de consolider cette opinion, fondée sans doute sur la représentation graphique des courbes, par des raisonnements logiques.[2]

Bien que l'exemple dû à WEIERSTRASS ait pour toujours corrigé cette erreur, il me semble que cet exemple ne satisfait pas l'esprit au point de vue géométrique; car la fonction dont il s'agit est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente; on dirait plutôt que l'appa-

---

[1] Voir Journal f. Math., t. 79 (1875).

[2] Parmi ces tentatives nous citerons celles d'AMPÈRE (J. éc. pol. cah. 13), de BERTRAND (Traité de C. diff. et intégr.; t. 1) et de GILBERT (Brux. mém. 8°, t. 23 (1872)). — On trouve des notices historiques et bibliographiques dans l'ouvrage de M. E. PASCAL: Esercisi e note crit. di calcole infinitesimale p. 85—128. Milano 1895. — Voir aussi Encyklopädie der Math. Wiss. II. A. 2, p. 63 et l'ouvrage de M. DINI (traduction LÜROTH-SCHEPP): Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, p. 88 suiv., p. 205—229.

rence est ici en *contradiction* avec la réalité du fait, établi par WEIERSTRASS d'une manière purement analytique.[1]

C'est pourquoi je me suis demandé — et je crois que cette question est d'importance surtout au point de vue de l'enseignement des principes fondamentaux de l'analyse et de la géométrie — si l'on pouvait trouver une courbe sans tangente où l'apparence géométrique fût *en accord* avec le fait dont il s'agit. La courbe que j'ai trouvée et qui fait l'objet de l'étude suivante est définie par une construction géométrique, suffisamment simple, je crois, pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par »l'intuition naïve»,[2] l'impossibilité d'une tangente déterminée.

INTRODUCTION.

Rappel de quelques notions sur les courbes planes.

Nous commençons par rappeler quelques notions dont nous aurons besoins dans la suite.

Un ensemble de points C dans un plan s'appelle un arc de *courbe* si on peut lui faire correspondre un segment rectiligne AB de telle manière qu'à tous les points de AB correspondent des points déterminés constituant l'ensemble C.

Considérons un tel ensemble et désignons par $K(X)$ le point de C qui correspond au point X du segment AB. Soit X' un point quelconque de AB, $K(X')$ le point correspondant de C; on dit que la courbe est *continue* au point $K(X)$ si le point $K(X')$ s'approche indéfiniment du point $K(X)$ quand X' tend vers X d'une manière quelconque; si cette condition est vérifiée pour tout point de l'arc considéré, on appelle celui-ci un arc de *courbe continue*.[3]

[1] Parmi les nombreux exemples analogues qui ont été publiés après celui de WEIERSTRASS, il n'y a aucun, à ma connaissance, auquel ne s'applique la même remarque. Un essai de C. WIENER (J. f. Math., t. 90, p. 221; Cf. WEIERSTRASS, Functionenlehre p. 100) d'élucider géométriquement la courbe définie par la fonction de WEIERSTRASS ne suffit pas, semble-t-il, pour lever la difficulté dont il s'agit.

[2] J'emprunte cette expression à une conférence de M. KLEIN sur le caractère mathématique de l'intuition de l'espace (1893).

[3] Analytiquement, la dernière condition revient à supposer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe exprimables en fonctions continues par rapport à un paramètre.

Considérons un tel arc de courbe continue C. Soient X_1, X_2 deux points du segment AB et désignons par x_1, x_2 leurs distances respectives du point A. On dit que le point $K(X_1)$ de C *précède* ou *succède* le point $K(X_2)$ selon que $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Si l'on prend sur AB trois points X_1, X_2, X_3 on dit que le point $K(X_2)$ de la courbe est *intermédiaire* aux points $K(X_1)$, $K(X_3)$ ou que ce point est situé *entre* les deux autres, si le point X_2 est situé entre les points X_1, X_3. Les points $K(A)$, $K(B)$ de la courbe qui correspondent aux extrémités du segment AB s'appellent les extrémités de l'arc considéré. Si l'on fait parcourir à X le segment AB dans le sens convenu comme positif, on dit que le point correspondant K parcourt l'arc de courbe C dans le sens positif.

Si l'on joint deux points K, K' de la courbe par une droite, celle-ci s'appelle une *sécante* de la courbe et la partie de cette sécante comprise entre K et K' s'appelle une *corde* de la courbe.

Fixons le point K et faisons tendre K' d'une manière quelconque vers K; si la sécante KK' tend alors vers une position limite T bien déterminée, on dit que la courbe a en K une tangente et la droite T s'appelle *la tangente* de C au point K;[1] dans le cas contraire on dit que la courbe n'a pas au point K une tangente déterminée ou, d'une manière plus brève, que la courbe est *sans tangente* en K.

Supposons que la courbe considérée ait au point K une tangente déterminée T. Soient L et M deux points voisins sur la courbe tels que K se trouve *entre* L et M. Alors la sécante LM tend nécessairement vers T comme position limite quand L et M tendent vers K tout en restant sur la courbe à des côtés opposés par rapport à K.[2]

Rappelons enfin la définition de la *longueur* d'un arc de courbe KK'. Intercalons sur cet arc, entre K et K', un certain nombre de points K_1, K_2, . . ., K_n et considérons la ligne

[1] Nous considérons la direction de K vers K' comme la direction positive de la sécante KK' si K' *succède* K sur la courbe, ce qui détermine la direction positive de la tangente T.

[2] Ce théorème simple, que nous n'avons pas rencontré ailleurs, est d'une grande utilité dans la suite. La démonstration est immédiate. En effet, si K est précédé par L et succédé par M, LK et KM coïncident, à la limite, avec la direction positive de T, donc l'angle formé par ces directions tend vers zéro; or, cet angle étant supérieur à l'angle KLM, ce dernier tend aussi vers zéro, ce qui prouve que LM coïncide, à la limite, avec la direction positive de T.

polygonale formée par les cordes KK_1, K_1K_2, . . . K_n K'. Faisons augmenter indéfiniment le nombre de ces points intermédiaires de telle manière que la longueur de chacune de ces cordes tende vers zéro. Si la longueur de la ligne polygonale ainsi définie tend vers une valeur finie et déterminée L, on dit que l'arc de courbe KK' est *rectifiable* et a pour *longueur* L.

Dans le cas contraire on dit que l'arc n'est pas rectifiable. Si la longueur de la ligne polygonale tend vers l'infini, on dit que la longueur de l'arc est infinie.

I.

Définition de la courbe P et de la fonction $f(x)$. — Continuité. — Non-existence de la tangente.

1. Joignons par une droite deux points A et B d'un plan (fig. 1). Partageons le segment AB en trois parties égales

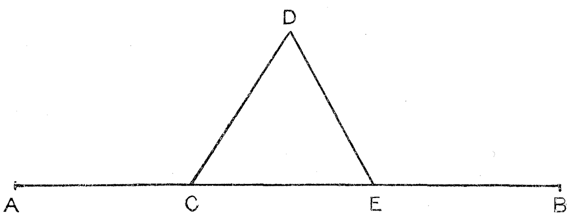

Fig. 1.

AC, CE, EB, et construisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE. Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre

eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Sur chacun de ces derniers segments nous effectuons encore l'opération Ω; nous aurons une ligne brisée $ASTUF$... composée par $4^3 = 64$ segments égaux entre eux AS, ST etc.

Effectuant l'opération Ω sur chacun de ces nouveaux segments et continuant ainsi indéfiniment, nous obtenons une suite indéfinie de lignes polygonales que nous désignerons par

(1) $\quad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$

et qui se composent respectivement de

$$1,\ 4,\ 4^2, \ldots,\ 4^{n-1}, \ldots$$

côtés. P_1 désigne la droite primitive AB, P_2 la ligne $ACDEB$ et ainsi de suite.

Nous allons voir que, quand n croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue P qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée.

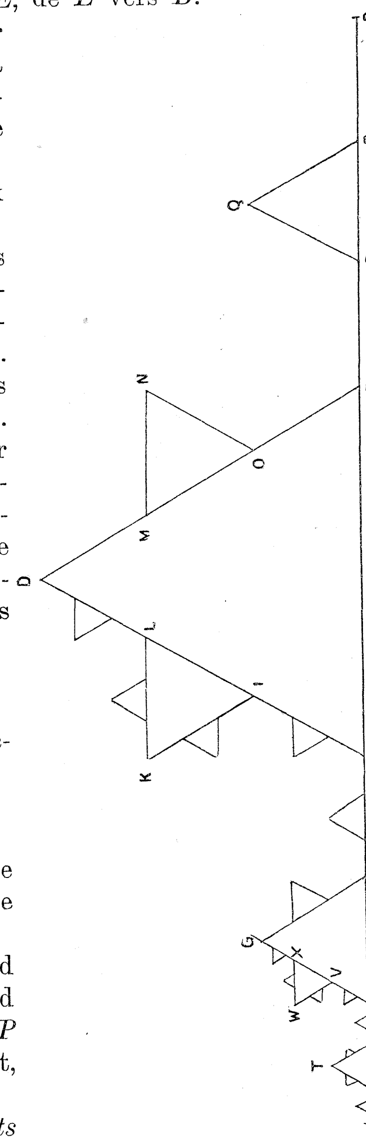

Fig. 2.

3. Nous nommerons *sommets* de P_1 les deux points A et B, *sommets* de P_2 les $4 + 1$ points A, C, D, E, B, *sommets* de P_3 les $4^2 + 1$ points $A, F, G, \ldots, B$ et ainsi de suite. On voit que P_n aura $4^{n-1} + 1$ sommets, que tous les $4^{n-2} + 1$ sommets de

P_{n-1} sont aussi des sommets de P_n et que, par suite, le nombre de sommets nouveaux introduits par le passage de P_{n-1} à P_n est égal à 3.4^{n-2}.

Désignons par S l'ensemble des sommets de toutes les lignes (1). De la construction résulte que si l'on considère un côté quelconque KL d'une ligne quelconque P_α il y aura, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur KL; désignant par IK le côté de P_α qui précède KL il y a par la même raison, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur IK. Les côtés IK et KL formant entre eux un angle IKL égal, selon les cas, à 60° ou à 120°, on peut donc affirmer que la droite joignant deux sommets quelconque K et K' ne peut pas tendre vers une position limite déterminée quand le point K' (tout en restant sommet) tend vers K d'une manière quelconque. (Si $K = A$ ou $K = B$ il faut modifier légèrement le raisonnement qui précède).

Désignons par S' l'ensemble des points limites[1] des points S.

Chaque point de la courbe que nous allons définir sera ou un sommet ou un point limite des sommets; autrement dit, notre courbe sera composée par un ensemble de points P compris tout entier dans l'ensemble S'.[2]

4. Pour définir P, nous allons faire correspondre à chaque point X du segment AB un point déterminé $K(X)$ de P et nous introduirons en même temps une fonction continue $f(x)$ qui jouit un rôle fondamental pour l'étude de la courbe.

Désignons par x la distance de A au point X. Si ce point appartient à S' nous prenons

$$K(X) = X$$

et

$$f(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous menons de X une perpendiculaire XX_1 à AX (dirigée vers le côté positif de AB).

En prolongeant suffisamment cette perpendiculaire, on rencontre nécessairement le contour d'une ou de plusieurs des lignes P_ν. Soit P_α la première ligne rencontrée et X_1 le point de rencontre.

Si X_1 est un point de S' nous prenons

$$K(X) = X_1$$

et nous désignons par $f(x)$ la longueur XX_1.

Si X_1 n'est pas un sommet de P_α, X_1 appartient à un des segments rectilignes qui composent P_α, terminé par deux sommets consécutifs — soit S_1 et S_2 — de P_α. Menons alors, si X_1 n'appartient pas à l'ensemble S', de X_1 une perpendiculaire X_1X_2 à S_1S_2 (dirigée vers le côté positif de S_1S_2). Soit P_β la première des lignes (1) qu'on rencontre — soit en X_2 — en prolongeant suffisamment la perpendiculaire dont il s'agit.

Si X_2 est un point de S' nous ferons

$$K(X) = X_2$$

et nous désignerons par $f(x)$ la somme des longueurs XX_1 et XX_2.

Si X_2 n'est pas un point de S' nous désignons par T_1, T_2 les extrémités du segment de P_β sur lequel se trouve X_2; ces extrémités seront certains sommets consécutifs de P_β. Nous élevons de X_2 une perpendiculaire X_2X_3 sur T_1T_2 vers le côté positif et désignons par X_3 le premier point de rencontre avec une des lignes P_n.

Continuant ainsi de proche en proche deux cas pourront se présenter. Ou bien on rencontrera, après avoir élevé un certain nombre de perpendiculaires:

$$XX_1,\ X_1X_2,\ \ldots,\ X_{k-1}\ X_k$$

dont on désignera respectivement par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ les longueurs, un point X_k appartenant à S', et alors on prendra $K(X) = X_k$ et désignera par $f(x)$ la somme de ces perpendiculaires; ou bien on ne rencontrera jamais un point de S'. Dans le dernier cas, on aura une suite indéfinie de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \ldots \tag{2}$$

dont on désignera les longueurs respectives par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\ldots$ et dont la somme sera, ainsi que nous démontrerons, égal à un nombre fini.

[1] D'après la terminologie de M. G. CANTOR, S' est la première dérivée de S. D'après ce qui a été dit plus haut il résulte que tout point de S appartient à S'. Dire qu'un point K appartient à S' revient donc à dire que c'est ou un sommet ou un point limite des sommets.

[2] Réciproquement tout point de S' appartient à P, c'est-à-dire on a $P = S'$, ce qui résulte facilement des résultats que nous allons établir.

En effet, prenant la distance AB comme unité de longueur, le segment CE est égal à $\frac{1}{3}$ et la perpendiculaire abaissée du point D (fig. 2) sur CE est égal à $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. CDE étant le plus grand triangle de la figure, on a évidemment

$$f_1(x) = XX_1 \leqq \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

pour toute valeur de x de l'intervalle considéré

$$0 \leqq x \leqq 1 \tag{3}$$

Les triangles FGH, IKL etc. construits sur les côtés de $P_2 = ACDEB$ ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{9}$, ceux construits sur les côtés de P_3 ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{27}$ et ainsi de suite on obtient de même

$$\begin{aligned} f_2(x) &= X_1X_2 \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{9}\sqrt{3} \\ f_3(x) &= X_2X_3 \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{27}\sqrt{3} \\ &- - - - - - - \\ f_k(x) &= X_{k-1}X_k \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}\sqrt{3} \\ &- - - - - - - \end{aligned} \tag{4}$$

pour tout l'intervalle (3).

La somme des longueurs (2) ne peut donc pas être supérieure au nombre

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

et est, par suite, convergente. La somme de cette série dont l'existence est ainsi démontrée sera désignée par $f(x)$; en suivant indéfiniment la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$ on approchera donc indéfiniment d'un point déterminé qui, nous le convenons, sera le point $K(X)$ correspondant à X et dont la distance de X, mesurée le long de la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$, sera égale à $f(x)$. On voit immédiatement que $K(X)$ fait partie de l'ensemble S'.

Si nous convenons, dans le cas où la suite des perpendiculaires (2) ne contient que k termes, de mettre

$$f_{k+1}(x) = 0,\ f_{k+2}(x) = 0,\ \dots$$

nous avons donc une fonction $f(x)$ définie, pour toute valeur de x de l'intervalle $0 - 1$, par la formule

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Tous les points $K(X)$ ainsi obtenus constituent, par définition, notre ensemble P. A chaque point X sur AB correspond un point bien déterminé $K(X)$ de P dont la position est définie moyennant la fonction $f(x)$.

Il nous faut commencer par prouver que cet ensemble constitue une *courbe continue*, dans le sens ordinaire de ce mot.

5. De deux points K_1 et K_2 de P correspondant à des valeurs x_1 et x_2 de x nous voyons que K_1 *précède* K_2 si $x_1 < x_2$, que K_1 *succède* K_2 dans le cas contraire.[1] De trois points K_1, K_2, K_3 correspondants aux valeurs x_1, x_2, x_3 où

$$x_1 < x_2 < x_3$$

K_2 est *intermédiaire* aux points K_1, K_3.

Ainsi, par exemple, entre les deux points A et B de notre P nous avons trois points intermédiaires C, D, E appartenant à la ligne P_2, 15 points intermédiaires F, G, H etc. appartenant à P_3 et ainsi de suite.

De même, entre deux sommets consécutifs S_1 et S_2 de la ligne P_α, qui sont, par définition, des points de P, il y a trois points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+1}$), 15 points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+2}$) et ainsi de suite.

Nous avons défini un point quelconque K de P en menant successivement certaines perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ \dots \tag{2}$$

rencontrant respectivement P_α en X_1, P_β en X_2, et ainsi de suite, X_1 étant situé entre deux sommets S_1, S_2 de P_α et de même X_2 entre deux sommets T_1, T_2 de P_β etc. Le point K est donc, d'après notre définition, un point intermédiaire à S_1 et S_2, intermédiaire à T_1 et T_2 et ainsi de suite.

[1] Cf. les définitions adoptées au début (pag. 683).

Dans le cas où la suite (2) se prolonge indéfiniment nous aurons donc une suite infinie de segments

$$S_1S_2,\ T_1T_2,\ \ldots$$

décroissant indéfiniment et embrassant tous le point K qui se trouve ainsi intercalé entre des points dont la distance diminue indéfiniment.

6. Il nous faut prouver que la fonction $f(x)$ qui est une fonction bien déterminée de x dans l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq 1 \tag{3}$$

est aussi *continue* dans cet intervalle. Pour cela nous montrerons d'abord que chacune des fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots$$

est continue dans l'intervalle dont il s'agit et ensuite que la somme de ces fonctions y converge uniformément.

Par définition, $f_1(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_1 (composée par une infinité de segments rectilignes) à la droite AB et cette fonction est donc nécessairement continue. Aux points extrêmes A, B cette fonction s'annule.

$f_2(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_2 (semblable à C_1) à un certain côté S_1S_2 de la ligne polygonale P_α; en considérant $f_2(x)$ comme fonction de l'arc mesuré le long de S_1S_2 on voit que c'est une fonction continue de cet arc et, par conséquent, de la variable x dans l'intervalle correspondant. Or, $f_2(x)$ étant égal à zéro pour les valeurs de x correspondant aux extrémités S_1, S_2 et la même circonstance se présentant pour les côtés voisins de P_α, on voit que $f_2(x)$ est continue dans tout l'intervalle (3).

La même démonstration s'applique aux autres fonctions $f_3(x)$, $f_4(x)$, ...

Toutes les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *sont donc continues dans l'intervalle* (3).

Maintenant, comme ces fonctions satisfont aux inégalités (4) dans cet intervalle, on voit que leur somme $\Sigma f\nu(x)$ y converge uniformément. Donc, d'après un théorème classique, *la fonction* $f(x)$ *représentée par cette série est une fonction continue dans cet intervalle.*

7. Désignons maintenant par $K(x)$ le point de P correspondant à la valeur x de l'intervalle $0 \ldots 1$. Pour voir que P est un arc de courbe continue au point K, il nous faut montrer que

$$\lim K(x') = K(x)$$

pour

$$\lim x' = x$$

c'est-à-dire que la distance entre les points $K(x')$ et $K(x)$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Prenons d'abord le cas où $K(x)$ est un point appartenant à une des lignes P_ν ou, ce qui revient au même, que ce point soit défini par un nombre fini de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ \ldots,\ X_{k-1}X_k$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_{\alpha_1},\ P_{\alpha_2},\ \ldots,\ P_{\alpha_k}$$

aux points X_1, X_2, ..., X_k des côtés respectifs

$$S_1S_1',\ S_2S_2',\ \ldots,\ S_kS_k', \tag{5}$$

le point X_i étant situé sur P_{α_i} entre les sommets S_i et S_i'. Soient

$$X'X_1',\ X_1'X_2',\ \ldots$$

la suite (finie ou infinie) de perpendiculaires définissant le point $K(x')$, x' étant une valeur voisine de x. Il résulte de la construction adoptée que si l'on choisit $|x' - x|$ suffisamment petit on peut faire en sorte que les points

$$X_1',\ X_2'\ \ldots,\ X_k'$$

appartiennent respectivement aux côtés (5) et que la distance entre X_k' et X_k soit inférieure à une quantité δ donnée à l'avance.

Or, on passe du point X_k' au point $K(x')$ par une suite de perpendiculaires

$$X_k'X_{k+1}',\ X_{k+1}'X_{k+2}',\ \ldots$$

de longueurs respectives

$$f_{k+1}(x'),\ f_{k+2}(x'),\ \ldots$$

Comme

$$f_{k+1}(x) = 0,\ f_{k+2}(x) = 0,\ \ldots$$

on a, à cause de la continuité de la somme $\Sigma f_\nu(x)$,

$$\lim_{x'=x} (f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ \ldots\ ) = 0$$

La distance absolue entre les points X'_k et $K(x')$ ne pouvant être supérieure à la longueur de la ligne brisée

$$X'_k X'_{k+1} X'_{k+2} \ldots$$

c'est-à-dire à

$$f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ \ldots$$

on voit donc que cette distance tend vers zéro avec $|x' - x|$. Comme il en est de même de la distance entre X'_k et $X_k = K(x)$, il est donc prouvé que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Considérons en second lieu le cas où le point donné $K(x)$ est défini par un nombre illimité de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes

$$P_{\alpha_1},\ P_{\alpha_2},\ \ldots$$

aux points

$$X_1,\ X_2,\ \ldots$$

des côtés

$$S_1S'_1,\ S_2S'_2,\ \ldots$$

et conservons d'ailleurs les notations du cas précédent.

Soit ε une quantité donnée; choisissons k suffisamment grand pour que la somme

$$f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \ \ldots$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, pour tout l'intervalle (3). On voit alors que la distance des points X_k et $K(x)$ et de même que la distance entre X'_k et $K(x')$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Choisissons enfin $|x' - x|$ suffisamment petit pour que la distance entre X_k et X'_k soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, ce qui est toujours possible d'après ce

qui précède. Il est alors évident que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ est moindre que ε ou, en d'autres termes, que cette distance peut être rendue aussi petite qu'on le veut en faisant $|x' - x|$ suffisamment petit.

Donc l'ensemble P constitue un arc de courbe continue en chaque point.

8. Dans ce qui va suivre, nous conservons la lettre P pour désigner la courbe ainsi définie.

Théorème. La courbe P n'admet en aucun point une tangente déterminée.

Considérons d'abord un point K de la courbe qui est en même temps un sommet d'une ligne polygonale P_α.

Dans chaque voisinage de K il y a une infinité de sommets K' et, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 686), nous savons que la droite joignant K à un point K' ne peut tendre vers une limite déterminée lorsque K' s'approche de K d'une manière quelconque. Or, les points K et K' étant des points de la courbe, la droite KK' est une sécante de P qui tendrait vers une position déterminée si la tangente en K existait. Donc la courbe ne peut pas avoir en K une tangente déterminée.

Considérons, en second lieu, le cas où le point K est situé sur une ligne polygonale P_α mais *n'est pas* un sommet. K est alors nécessairement un point limite des sommets et reste, par conséquent, commun à toutes les lignes

$$P_\alpha,\ P_{\alpha+1},\ \ldots$$

On peut donc supposer l'indice α choisi aussi grand que l'on veut. Cela remarqué, soit LM le côté de P_α sur lequel se trouve K (fig. 3) et $LNRTM$ la ligne brisée obtenue en

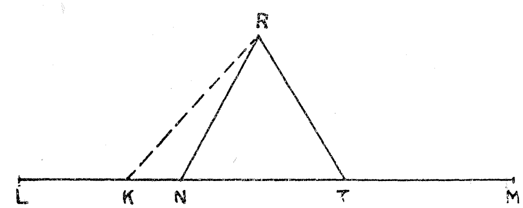

Fig. 3.

effectuant l'opération Ω sur LM. Les sommets N, R, T sont donc des points de la courbe P et l'on a

$$LN = NR = RT = TM.$$

Mais de là résulte que l'angle RKN est compris entre 30° et 60°.

Or, K est situé sur la courbe P *entre* les points L et N (ou *entre* les points T et M); donc,[1] si la courbe avait en K une tangente déterminée, la sécante KR tendrait (pour $\alpha = \infty$) vers la même limite que LN (ou TM) ce qui est impossible, l'angle formé par ces droites appartenant à l'intervalle 30° ... 60°.

Considérons, comme dernier cas, un point K de P qui n'est situé sur aucune des lignes P_α. Dans ce cas, K est défini par une suite illimitée de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_\alpha,\ P_\beta,\ P_\gamma$$

aux points X_1, X_2, X_3, ... des côtés

$$S_1S_2,\ T_1T_2,\ U_1U_2,\ \ldots \tag{6}$$

D'après ce qui précède K est un point de la courbe P situé *entre* les points S_1 et S_2, *entre* les points T_1 et T_2, *entre* les points U_1 et U_2 et ainsi de suite. La suite des points

$$S_1,\ T_1,\ U_1,\ \ldots$$

s'approchent de K indéfiniment du même côté, c'est-à-dire ces points *précèdent* tous le point K; et c'est du côté opposé que s'approchent les points

$$S_2,\ T_2,\ U_2,\ \ldots$$

Donc, si la courbe avait en K une tangente déterminée, les sécantes (6) auraient cette tangente comme limite commune. Or, cela est impossible, l'angle formé par deux sécantes consécutives étant, selon les cas, égal à 60° ou 120°.

Le théorème est donc démontré pour tout point de la courbe.

[1] Voir l'introduction, p. 683.

II.

Questions de rectification et de quadrature. — Représentation paramétrique.

9. Désignons par L_i la longueur de la ligne polygonale P_i. Le segment AB (fig. 2) étant pris pour unité de longueur on a $L_1 = AB = 1$. Par l'opération Ω, P_1 se change en P_2, cette dernière ligne ayant visiblement la longueur $\frac{4}{3}$. En passant de P_2 à P_3 la longueur se trouve encore une fois multipliée par $\frac{4}{3}$ et ainsi de suite. On a donc, d'une manière générale

$$L_\nu = \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$$

d'où

$$\lim_{\nu=\infty} L_\nu = \infty.$$

Il en résulte que la longueur de l'arc de courbe P compris entre A et B est infinie. De la même manière on peut démontrer qu'il en est de même de l'arc compris entre deux sommets quelconques, d'où se déduit sans difficulté que *la longueur de l'arc compris entre deux points quelconques de la courbe est infinie.*

Il est aussi facile d'évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'une de ses cordes. Prenons par exemple la corde AB. L'aire comprise entre $AB = P_1$ et P_2 est égale à l'aire d'un triangle équilateral de base $= \frac{1}{3}$, c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{36}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\frac{4}{9};$$

l'aire comprise entre P_2 et P_3 est égal à la somme de 4 triangles (voir fig. 2) équilatérales de base égale à $\frac{1}{9}$; cette aire est donc égale à

$$4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Pour avoir l'aire Δ_ν comprise entre P_ν et $P_{\nu+1}$ rappelons que P_ν est une ligne polygonale de $4^{\nu-1}$ côtés dont chacun est égale à $\frac{1}{3^{\nu-1}}$; pour passer de P_ν à $P_{\nu+1}$ on construit sur chaque côté un petit triangle équilatéral de base $\frac{1}{3^\nu}$. On a donc

$$\Delta_\nu = 4^{\nu-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{2\nu}} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{16} \sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^\nu$$

L'aire cherchée Δ étant égale à la somme des aires Δ_1, Δ_2, ... on trouve donc

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu = \frac{1}{16} \sqrt{3} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^\nu$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \frac{1}{20} \sqrt{3}.$$

10. Indiquons maintenant comment peuvent s'exprimer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe P en fonctions uniformes par rapport à un paramètre.

Comme axe des u nous prenons la droite AB (fig. 2), comme axe des v une droite passant par A et perpendiculaire à AB (comptée positivement du bas en haut). Soient x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A, $K(x)$ le point correspondant de la courbe (défini, comme il a été expliqué précédemment, par une certaine suite de perpendiculaires XX_1, X_1X_2, ...), $u = u(x)$ et $v = v(x)$ les coordonnées rectangulaires de ce point K.

Nous avons posé plus haut

$$XX_1 = f_1(x),\ X_1X_2 = f_2(x),\ \ldots$$

et

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

La droite XX_1 étant perpendiculaire à l'axe des u, sa projection sur cet axe est nulle. Quant à X_1X_2, cette droite forme avec l'axe des u un angle qui, selon les cas, est égal à 30° ou 150°. Désignons par $\{f_2(x)\}$ la projection de X_1X_2 sur l'axe des u. Désignons, d'une manière analogue, par

$$\{f_3(x)\},\ \{f_4(x)\},\ \ldots$$

les projections de X_2X_3, X_3X_4, ... sur l'axe des u.

Enfin, désignons par

$$\{\{f_1(x)\}\},\ \{\{f_2(x)\}\},\ \{\{f_3(x)\}\},\ \ldots$$

les projections de XX_1, X_1X_2, X_2X_3, ... sur l'axe des v. (On a évidemment $\{\{f_1(x)\}\} = f_1(x)$).

Il résulte de ces définitions que $\{f_i(x)\}$ et $\{\{f_i(x)\}\}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle 0 ... 1 et que les modules de ces fonctions sont au plus égaux à $f_i(x)$. Comme $u(x) - x$ et $v(x)$ sont respectivement les projections sur l'axe des u et l'axe des v de la ligne brisée

$$XX_1X_2X_3 \ldots$$

(les extrémités de cette ligne étant les points X et K), nous pouvons donc écrire

$$u = x + \{f_2(x)\} + \{f_3(x)\} + \ldots$$

$$v = f_1(x) + \{\{f_2(x)\}\} + \{\{f_3(x)\}\} + \ldots \tag{7}$$

Comme la série $\Sigma f_\nu(x)$ converge uniformément dans tout l'intervalle 0...1, il en est de même, et à plus forte raison, des séries nouvelles ainsi définies qui représentent les coordonnées u, v d'un point de notre courbe. Ces séries représentent donc des fonctions *continues* dans l'intervalle dont il s'agit.

Par les formules (7) nous avons donc les coordonnées u, v exprimées en fonctions uniformes et continues d'un paramètre x tout le long de la courbe.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment une simple transformation permet de passer de la courbe P à une courbe P' où l'on peut choisir l'abscisse u elle-même comme paramètre et exprimer l'ordonnée v en fonction uniforme et continue par rapport à u tout le long de la courbe.

III.

Transformation de P en une courbe P' où l'ordonnée est une fonction uniforme de l'abscisse.

11. Considérons dans le plan des coordonnées (x, y) un segment rectiligne AB formant un angle quelconque avec l'axe des x (fig. 5). Partageons AB en trois parties égales

AC, CE, EB et construisons sur CE comme base un triangle CDE dont la *médiane* MD (M étant le point divisant la base CE en deux parties égales CM et ME) est parallèle à l'axe des y, dirigée vers les y positifs et égale à

$$\frac{CE}{2}\sqrt{3}.$$

On sait alors que cette médiane est égale à la médiane d'un triangle *équilatéral* construit sur la même base CE.

Nous appellerons Ω' l'opération par laquelle on passe ainsi d'un segment rectiligne AB à la ligne brisée $ACDEB$.

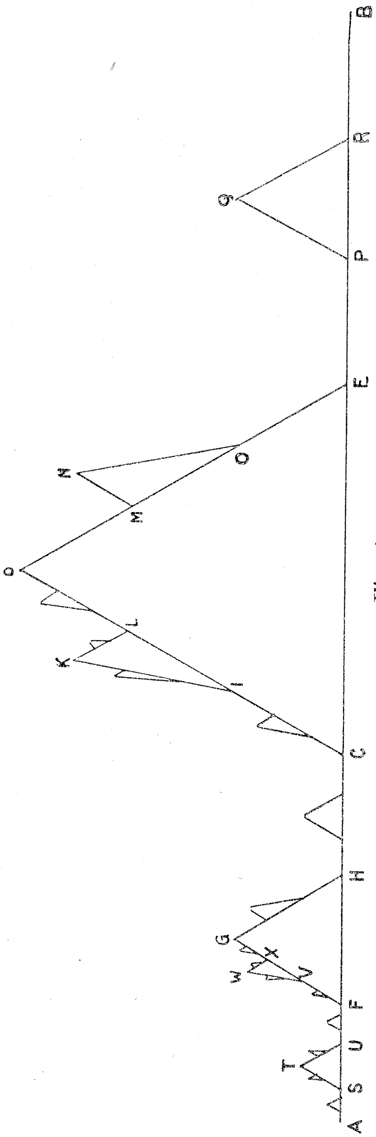

Fig. 4.

12. Prenons maintenant sur l'axe des x un segment AB, A étant l'origine et la distance AB étant choisie pour unité de longueur (fig. 4). Effectuons sur le segment notre opération Ω' (ce qui revient à effectuer l'opération Ω définie au n° 1). AB se trouve ainsi remplacé par une ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 côtés et que nous désignerons par P'_2. Effectuant sur chacun de ces côtés la même opération Ω' on passe à une ligne polygonale P'_3 composée par 4^2 côtés, sur lesquels on effectue la même opération et ainsi de suite indéfiniment. Désignant, pour plus de symétrie, AB par P'_1 on a ainsi défini une suite illimitée de lignes polygonales

$$P'_1,\ P'_2,\ P'_3,\ \ldots$$

Je dis que ces lignes tendent indéfiniment vers une courbe continue P' dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$y = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue de x dans l'intervalle $0 \ldots 1$.

13. Désignons par S l'ensemble des sommets (c'est-à-dire les points où deux côtés d'une ligne P'_ν se rencontrent) et par S' l'ensemble des points limites de S. (On voit que chaque point de S appartient à S').

Soit x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A. Si X est un point de S' nous prenons

$$y = \varphi(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous élevons en X une perpendiculaire sur AB dirigée vers les y positifs. Cette perpendiculaire rencontre successivement certaines des lignes P'_ν, soit

$$P'_\alpha,\ P'_\beta,\ P'_\gamma,\ \ldots$$

aux points respectifs

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots$$

Posons

$$XX_1 = \varphi_1(x),\ X_1X_2 = \varphi_2(x),\ X_2X_3 = \varphi_3(x),\ \ldots$$

et convenons de mettre, si X_k est un point de S',

$$\varphi_{k+1}(x) = 0,\ \varphi_{k+2}(x) = 0,\ \ldots$$

Par un raisonnement tout analogue à celui employé plus haut (n° 6) nous voyons alors que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \ldots 1$ et que leur somme $\varphi(x)$ y converge uniformément. Donc si nous posons

$$y = \varphi(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{8}$$

y est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle.

Nous voilà donc en possession d'une courbe P' où l'ordonnée s'exprime en fonction uniforme et continue (8) par rapport à l'abscisse dans tout l'intervalle considéré.

14. Je dis que *la fonction $\varphi(x)$ n'admet, pour aucune valeur de x, une dérivée finie et déterminée.*[1]

[1] Nous laissons indécidé, dans ce qui suit, s'il peut y avoir des valeurs x où la dérivée est déterminée mais *infinie*.

Si K est un point de P' qui appartient en même temps à l'une des lignes P'_ν, la démonstration est tout analogue à celle employée plus haut pour la courbe P.

Considérons donc le cas contraire où le point K est la limite d'une suite indéfinie de points X, X_1, X_2, ..., sa distance y à l'axe des x étant égale à la série infinie

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

Supposons que la perpendiculaire XK rencontre successivement les lignes polygonales

$$P'_{\alpha_1},\ P'_{\alpha_2},\ \ldots$$

aux points

$$X_1,\ X_2,\ \ldots$$

situés respectivement sur les côtés

$$S_1S'_1,\ S_2S'_2,\ \ldots$$

de ces lignes. Tous les triangles construits successivement dans notre figure ayant leurs médianes parallèles à l'axe des y nous pouvons (voir fig. 5) distinguer le côté CD d'un tel triangle situé à gauche de la médiane du côté DE situé à droite. Pour abréger le raisonnement qui suit, nous appellerons les côtés tels que CD *côtés à gauche* et les côtés tels que DE *côtés à droite.*

Cela convenu, remarquons tout d'abord que dans un triangle CDE de notre figure (fig. 5) construit sur un côté à

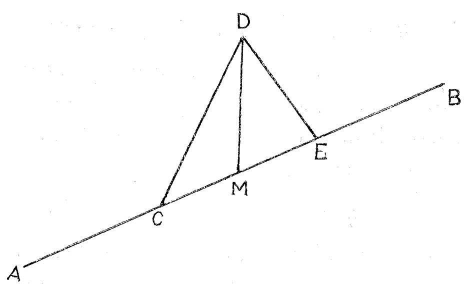

Fig. 5.

gauche AB, CD est un côté à *gauche* formant avec AB un angle DCB *moindre* que 60° et que DE est un côté à *droite* formant avec AB un angle DEC *plus grand* que 60°.

Le cas opposé se présenterait si AB était un côté à droite. Donc, si dans la figure construite on considère deux côtés

successifs (c'est-à-dire ayant un point commun) dont l'un est à gauche et l'autre à droite, ces deux côtés forment un angle qui reste, de quelque manière qu'on se déplace sur la figure, supérieur à 60°.

15. Distinguons maintenant entre les trois cas suivants.

1) Si grand que l'on choisisse l'indice k, il y a dans la suite

(9) $$S_kS'_k,\ S_{k+1}S'_{k+1},\ \ldots$$

une infinité de côtés à gauche et une infinité de côtés à droite. De ce que nous venons de dire de l'angle formé par deux côtés successifs résulte alors que les droites (9) ne peuvent pas tendre vers une position limite déterminée; par suite, le point K de la courbe étant situé *entre* les deux points S_ν et S'_ν quelque grand que soit ν, il ne peut y avoir au point K une tangente déterminée.

2) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à gauche.

Dans ce cas il est facile de voir que la droite $S_\nu S'_\nu$ coïncide à la limite (pour $\nu = \infty$) avec une droite parallèle à l'axe des y. En effet soit AB, CD deux côtés à gauche consécutifs (voir fig. 5) et soit DE le côté à droite correspondant (d'après la construction adoptée on a alors $CM = ME$ et la médiane MD est parallèle à l'axe des y). Désignons par β l'angle DMB formé par le côté AB et la verticale et par β' l'angle formé par CD et la verticale. DM étant plus grand que CM en vertu de la construction, l'angle β' ou CDM est plus petit que l'angle DCM d'où l'on obtient

$$\beta' < \frac{1}{2}\beta$$

Considérant un côté à gauche consécutif à CD et désignant par β'' l'angle qu'il forme avec la verticale on a, par la même raison

$$\beta'' < \frac{1}{2}\beta'$$

et ainsi de suite. Par là on voit donc que les angles

$$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots$$

diminuent indéfiniment et tendent vers zéro.

Or, le point K étant intermédiaire à S_ν et S'_ν nous savons que, s'il y avait une tangente T déterminée au point K, la sécante $S_\nu S'_\nu$ tendrait indéfiniment vers T comme position limite. Donc T serait nécessairement parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(x)$ au point considéré serait infinie.

3) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à droite.

Comme dans le cas précédent, on arrive à la conclusion que si $\varphi(x)$ avait une dérivée déterminée pour la valeur considérée de x, cette dérivée serait infinie.

Le théorème énoncé est donc vrai dans tous les cas.

Tryckt den 24 november 1904.

Stockholm 1904. Kungl. Boktryckeriet.