

La catégorie Un

Alain Busser

9 décembre 2023



- Voici un bol.
- Un **quoi** ?
- Un **bol**.

Dans le dialogue ci-dessus, le mot « un » n'est pas en caractères gras, parce que ce n'est pas sur lui que porte la question. Il en est autrement dans le dialogue suivant :



- Il y a **un** bol.
- **Combien** de bols ?
- **Un** bol.

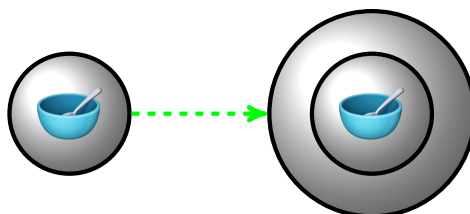
Pour dénombrer les bols, il faut faire abstraction de leur qualité de bols et seulement se concentrer sur leur quantité. Pour cela, on emballe chaque bol dans ce qu'on appelle une *monade* :



Plus précisément, le dessin ci-dessus représente une monade de bol. La monade, c'est la fonction qui transforme un bol en monade de bol :



Et si on essaye d'appliquer cette fonction à une monade de bol, au lieu de l'appliquer à un bol ? En bref, à quoi ressemble une monade de monade de bol ?



En fait c'est juste une monade de bol :



Les monades sont appelées *objets* dans la théorie des catégories. Par exemple *un bol*



est un objet. De même, *un ours*



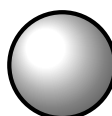
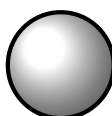
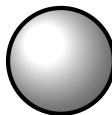
est un objet. Et *un fauteuil*



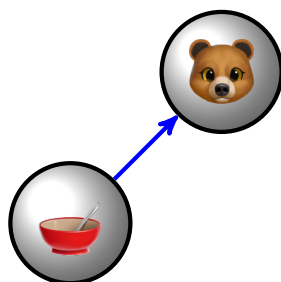
est bien entendu aussi un objet. Les objets ci-dessus font partie de la même *catégorie* comme on peut s'en apercevoir en opacifiant leurs monades, passant de



à



En fait, le bol n'est pas n'importe quel bol : il appartient à Papa, qui est un ours : . Cette appartenance peut être dessinée par une flèche bleue :



Une flèche bleue dessinée entre deux objets d'une même catégorie, s'appelle un *morphisme*. C'est l'existence d'un morphisme entre deux objets qui permet d'affirmer qu'ils sont dans la même catégorie. Par exemple on verra plus tard qu'il n'y a pas de morphisme entre ces deux objets :



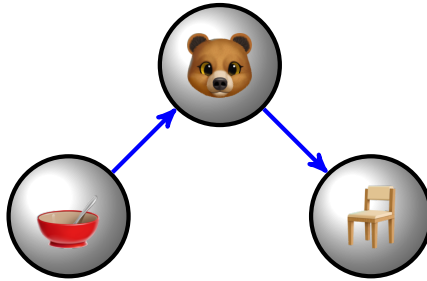
appartenant respectivement à la catégorie Deux (il y a 2 bols) et à la catégorie Un. Le fait que Papa ait **son** bol réservé rien que pour lui, garantit que *un bol* et *un ours* sont dans la même catégorie : la catégorie Un.

Comme tout objet est dans la même catégorie que lui-même, il y a toujours des morphismes allant d'un objet à lui-même :

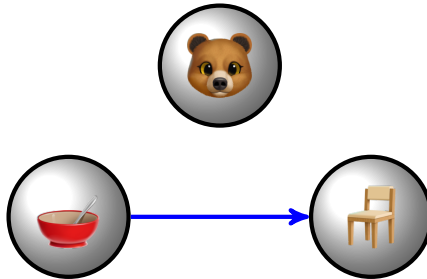


Quelles sont les propriétés des morphismes ?

1. S'il y a un morphisme entre un bol et un ours d'une part, entre cet ours et une chaise d'autre part :



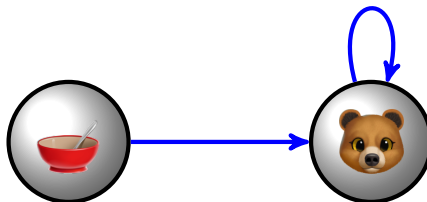
alors il y a aussi un morphisme allant directement du bol à la chaise :



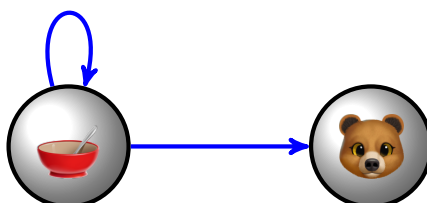
(le bol et la chaise sont liés par le fait qu'ils appartiennent tous les deux à Papa ours)

Ce dernier morphisme est dit *composé* des deux morphismes précédents.

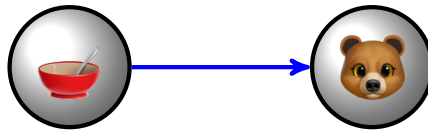
2. En composant un morphisme par une identité



ou une identité par un morphisme



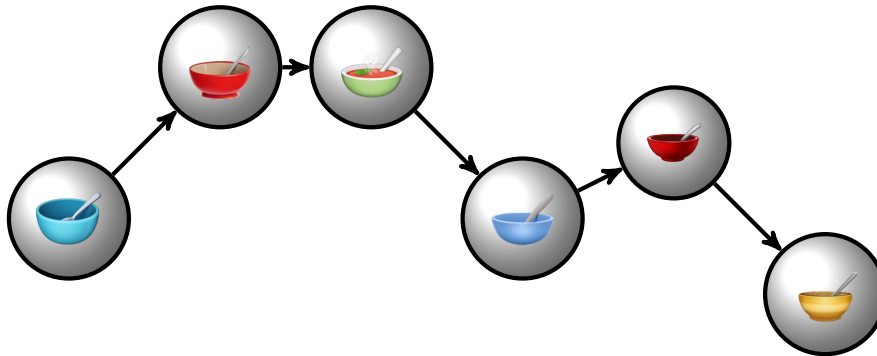
on obtient le morphisme en question :



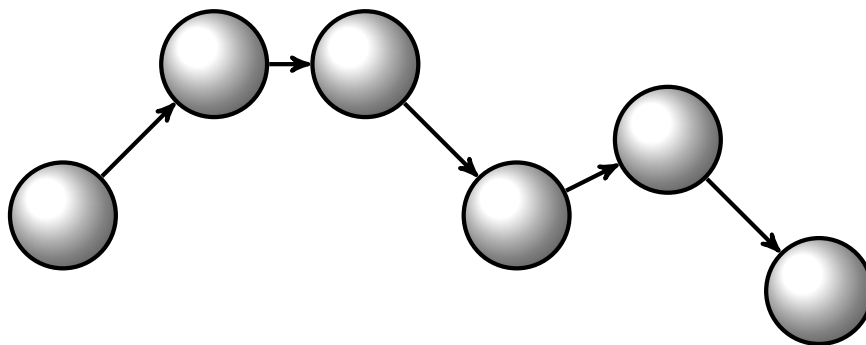
Par la suite, il faudra vérifier ces propriétés sur les flèches qu'on voudra dessiner, pour savoir si ce sont des morphismes, et ainsi préciser qu'on a bien une catégorie : ce ne sont pas les objets qui font d'une catégorie une catégorie, mais les morphismes.

Il est temps de dire ce qu'on entend par le mot « nombre ». On choisit cette définition : **un nombre est un graphe orienté connexe dont tous les sommets ont un degré entrant et un degré sortant valant au maximum 1**. Un tel graphe s'appelle aussi *un chemin*.

Par exemple voici un objet de la catégorie Six :



Tous les sommets sont de degré entrant 1 sauf celui de gauche, tous les sommets sont de degré sortant 1 sauf celui de droite :



On remarque que la définition d'un nombre utilise le nombre 1, supposé construit pour pouvoir construire les autres nombres. On verra plus tard qu'il est possible de définir la catégorie Deux sans utiliser d'autre nombre que 1, mais on peut définir la catégorie Un sans utiliser de nombre : **la catégorie Un est celle des graphes orientés connexes sans arêtes**. Voici un extrait de la catégorie Un avec ses morphismes :

