Un exercice original = une réflexion didactique

- Culture mathématique
- Réflexions didactiques et pédagogiques
-

Date de mise en ligne : samedi 30 mars 2013

Le département de mathématiques de l'université de Boston propose sous l'appellation PROMYS un stage de 6 semaines à de jeunes lycéens pour les sensibiliser à la recherche en mathématiques.

Afin de sélectionner les candidats, une série d'exercices leur sont proposés. Ces exercices sont présentés comme accessibles à tout élève de lycée, sans connaissance particulière s'il sait organiser sa recherche.

Nous faisons part ici des réflexions didactiques qui nous ont été inspirées par trois exercices originaux extraits de cette série, ainsi que par un exercice tiré de l'histoire des mathématiques.

1. Recherche et éducation en mathématiques

1. Recherche et éducation en mathématiques

Voici l'un de ces exercices qui montre comment les auteurs ont forcé le traitement de la transposition didactique afin de pouvoir distinguer les dispositions de chercheur du niveau de simple bon (voire très bon) élève.

---

1) Soit *n* un entier non nul, montrer que[n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1] ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

2) Trouver tous les nombres entiers *n* non nuls tels que[n^4 + n^3 + n^2 + n + 1] soit le carré d'un entier.

La première question est à la portée d'un bon élève de seconde bien entraîné aux factorisations :

[n^2(n^2 +2n+1)+n^2 +2n+1=(n+1)^2(n^2 +1)]

et il reste à conclure que cela est un carré si et seulement si[n^2 + 1] en est un, ce qui n'est jamais réalisé.

La deuxième question est bien plus insidieuse :

La réaction naturelle est d'exploiter la première, soit en appliquant des procédés de factorisation identiques, soit en cherchant à faire apparaître l'expression sur laquelle on a une information.

Le bon élève a érigé cette démarche en Â« principe Â» : **savoir utiliser les questions précédentes**.

Le chercheur procède de même, mais il doit aussi savoir abandonner les pistes conduisant à des impasses et en essayer d'autres. Cette démarche se heurte à deux obstacles énormes dans le contexte de l'école :

- L'élève est évalué sur la base d'une panoplie de Â« capacités Â» normalisantes.
- Le temps de l'école est découpé.

Pire même, le jeune élève qui aurait des dispositions pour la recherche sera pénalisé s'il n'est pas capable de gérer ces deux paramètres de façon à assurer sa réussite. Il est alors du domaine de l'enseignant de maîtriser ces situations pour que ces élèves (surdoués) ne pâtissent pas des contraintes de l'école.

Cette réflexion conduit à une critique constructive de la Â« pédagogie par objectifs Â».

Revenons donc à cette deuxième question :

Après quelques heures de recherche sur les factorisations diverses et variées, on devrait se résoudre à simuler le calcul à l'aide d'un tableur par exemple. On émettra alors la conjecture que seul $n=3$ donne une solution au problème.

Là encore, une école soucieuse de gérer le temps aurait posé la question : **montrer que $n=3$ est la seule solution au problème**.

La recherche s'en trouve amputée d'autant, mais quel est donc le rôle de l'école ? Que ses détracteurs commencent par se poser clairement la question !

Donc, une fois identifiée une conjecture, nous disposons de nouveaux outils. Le raisonnement par l'absurde, par exemple, devient Â« naturel Â» dans une démarche basée sur la conjecture, alors qu'il reste abstrait dans une démarche scolastique. Attention, cela ne veut pas dire que ce mode de raisonnement n'est pas enseignable, il l'est, mais il figurera dans la panoplie des connaissances de la majorité des élèves dont la réussite n'est pas à remettre en question, à la même place que Marignan 1515.

Terminons maintenant l'exercice :

Si 3 est le seul entier qui répond à la question, on devrait trouver quelque majoration significative des solutions possibles.

On ne tardera pas avec un peu d'astuce à imaginer que $\Big(n^2 + \frac{n}{2} + 1\Big)^2$ est trop grand et que $\Big(n^2 + \frac{n}{2}\Big)^2$ est trop petit. Je pense que l'on devrait rechercher alors des expressions de la forme $\Big(n^2+\frac{n}{2} +a\Big)^2$ avec $0<a<1$ et $n^2+\frac{n}{2}+a$ entier : or, seul $a=\frac{1}{2}$ répond à ces contraintes.

Alors :

$$\Big(n^2+\frac{n}{2} +\frac{1}{2}\Big)^2=n^4+n^3+\frac{5}{4} n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$$

et donc :

$$1+n+n^2+n^3+n^4=n^4+n^3+\frac{5}{4}n^2+\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$$

ce qui conduit à l'équation $n^2-2n-3=0$, dont la seule racine positive est 3.

On a bien : $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$.

2. De la démonstration en géométrie

2. De la démonstration en géométrie

Léo Gébra, nous dit avoir utilisé son logiciel de géométrie dynamique pour construire la figure suivante :

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/demonstrationgeometrie1.tif]

À partir d'un segment [*AB*], il a tracé la perpendiculaire à ce segment passant par *B* et pris un point *C* sur cette droite. Il a ensuite tracé un segment [*DC*] de même longueur que *AB*, mais non perpendiculaire à la droite (*BC*).

Il a ensuite tracé les médiatrices de [*AD*] et de [*BC*], qui se coupent donc en un point *M*. Il a ainsi pu tracer les deux triangles *ABM* et *DCM* qu'on lui demandait de comparer.

Léo a dit immédiatement que, d'après les propriétés des médiatrices et l'hypothèse faite sur la construction du point *D*, les deux triangles avaient des côtés de même longueur et étaient donc égaux.

Léo se mit alors à penser que si ces triangles étaient égaux, leurs angles correspondants l'étaient aussi forcément, alors

$\widehat{ABM}=\widehat{DCM}$ et $\widehat{MBC}=\widehat{MCB}$,

donc $\widehat{ABM}+\widehat{MBC}=\widehat{DCM}+\widehat{MCB}$,

soit $\widehat{ABC} = \widehat{DCB}$.

Il venait donc de démontrer qu'un angle droit n'était pas droit...

Réflexions :

Lorsque l'on propose cet exercice tel quel à des élèves-enseignants, on rencontre des réactions diverses traduisant une déstabili- sation certaine. Lorsque l'on demande où est l'erreur, immanquablement la majorité déclare que l'erreur est que l'on a démontré que deux angles étaient égaux, alors que par construction ils ne le sont pas !

Il est alors clair que l'on se heurte à l'ambiguité de la question posée dans le cadre d'une véritable rupture du contrat didactique. On aurait pu prévoir cette réaction et, si on désire l'éviter, préciser en début de séquence que l'on va démontrer qu'un angle droit n'est pas droit, donc que l'on va faire un tour de passe-passe et qu'il faudra trouver où le bât blesse. Ce choix est fonction de la réaction que l'on désire observer, il est bien de la responsabilité de l'enseignant (ici le formateur) : les ruptures de contrat ne sont pas des obstacles, mais au contraire les jalons de l'acquisition de connaissance.

Une fois traitée l'ambiguité voulue par la question, éventuellement par des échanges dans le groupe agrémentés d'humour un tantinet moqueur, il vient la tentative de réponse. Nous constatons alors un nouveau phénomène de rupture de contrat caractéristique : la remise en question des acquis. Plusieurs étudiants affirrmeront que deux triangles égaux n'ont pas forcément les angles égaux !
Il est intéressant d'observer ce phénomène, véritable Â« détartrage des connaissances Â», qui ébranle la dentition, mais à l'issue duquel la mâchoire est plus solide.

La remarque citée est la plus Â« criarde Â», mais on en trouvera d'autres comme la remise en question de l'égalité des triangles, ou des angles à la base d'un triangle isocèle, ou des propriétés des médiatrices.

Il aura fallu un certain temps pour que finalement notre public se décide à prendre une feuille de papier et à dessiner Â« proprement Â» la figure. Cette action est caractéristique de la responsabilité de l'enseignant et non de l'élève (encore une manifestation du contrat didactique). Le pédagogue dissertera sur la nécessité qu'un bon apprentissage conduise (ou ne conduise pas) à cette re-sponsabilité à un niveau donné chez l'élève lambda. Je pense, quant à moi, que cette responsabilité est indispensable à l'enseignant, qui doit donc être formé pour l'acquérir.

Une fois le dessin proprement fait, on constatera que Léo nous a roulé dans la farine en prétendant avoir utilisé un logiciel d'animation et que sa figure est fausse. Maintenant que la rupture de contrat a été consommée, testons le nouveau contrat. Peut-on démontrer que la figure est fausse ? N'oublions pas que l'on s'est écrié que la figure était fausse en en contruisant une correcte, mais les mathématiques disent que l'art de la démonstration doit s'accomoder d'une figure fausse.

Ici, il est clair que l'on fait de l'algèbre des angles et que l'on a donc besoin d'angles orientés. Or, si deux triangles sont isométriques, les angles correspondants sont égaux ou opposés suivant que l'isométrie qui fait passer d'un triangle à lautre est positive ou négative.

Peut-on trouver l'isométrie en question dans ce problème ? Elle a un point fixe *M*. Le point *A* a pour image *D* et *B* a pour image *C*. En aucun cas ce ne peut être une réflexion, c'est donc forcément une rotation comme le bon dessin (que l'on peut d'ailleurs animer) le montre :

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/demonstrationgeometrie2.tif]

La mécanique algébriste appliquée aux angles montrera alors la supercherie avec nul besoin de recourir à la figure ci dessus.

Isométrie positive :$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CM}).$$

Isométrie négative :$$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}) =-(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}).$$

Par addition :

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CM})-(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}) \neq (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CM})+(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}).$$

Conclusion :

Cet exercice illustre la nécessité d'une formation des enseignants de mathématiques, véritable initiation à la responsabilité pédagogique. Si le travail sur le terrain permet d'appréhender la complexité de ce métier, une réflexion théorique et une introspection à mener à l'université avec des spécialistes de l'enseignement de la discipline est indispensable si l'on veut disposer d'un corps enseignant à la fois responsable et performant.

Un autre aspect du contrat didactique que je laisse au jugement de mes anciens collègues formateurs : comment répondez-vous à la critique formulée par les étudiants : Â« Pourquoi nous ennuyer avec ces exercices alors que nous n'aurons pas à enseigner ces contenus ? Â»

3. Les mathématiques, d'une science expérimentale à une science exacte

3. Les mathématiques, d'une science expérimentale à une science exacte

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/didactique1.tif]

Cet exercice privilégie une approche expérimentale et nous avons aujourd'hui des outils très performants pour tester cette situation. La problématique moderne devient : Â« l'enrichissement de l'approche expérimentale est-elle un frein ou un catalyseur du démonstratif en mathématiques ? Â»

Cette question est posée dans le cadre d'un Â« savoir élève Â» en construction ; le chercheur a depuis longtemps mis les outils modernes au service de sa recherche et en connaît la place exacte. Par contre, on ne peut pas dissocier le problème des exigences qu'exerce cette innovation galopante sur le savoir de l'enseignant.
Les trois types de savoirs sont confrontés dans cet exercice, voyons de quelle façon.

Une phase de simulation de l'exercice conduit à identifier la construction de carrés se complétant les uns les autres comme sur la figure ci-après. Si le grand carré est de côté $2k+1$, il est composé de 4 carrés dont la longueur des côtés est $2k$ et dont les contenus sont identiques pour les carrés 0 et 1, et Â« translatés Â» de $2k$ pour les carrés 2 et 3.

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/didactique2.tif]

- Le chercheur va éprouver le *besoin* de démontrer.
- L'enseignant va se demander quel est l'*intérêt* de démontrer.
- Le bon élève va faire ce qu'on lui demande.

Il faut bien comprendre que l'élève n'a ni le besoin, ni l'intérêt de la démonstration, il est lié à l'activité en priorité par le contrat, qui sera l'organe essentiel de gestion de la déstabilisation des apprentissages.

À ce titre, l'exercice est plaisant, car la construction non chaotique de ce tableau repose essentiellement sur la contrainte de choix du plus petit entier disponible pour en remplir les cases. Comment mathématiser ce concept ? Sans doute par une récurence, doublée d'un raisonnement par l'absurde, autant de types de raisonnements qu'un élève a du mal à s'approprier même dans les cas les plus simples. Reconnaissons que l'enseignant et l'élève seront heureux de contourner la difficulté de la démonstration en raisonnant comme le font les sciences expérimentales : Â« le choix du plus petit nombre disponible induit la règle de construction du tableau Â» comme en sciences : Â« la nature a horreur du vide Â»,
Â« les alvéoles des nids d'abeille sont hexagonales pour contenir le plus en utilisant le moins Â», etc.

À quelques exceptions près, les élèves de lycée n'ont pas le recul suffisant pour distinguer science exacte et science expérimentale. Nous venons de voir que cela peut être un avantage. Mais ce n'est pas pour autant que l'on abandonne toute idée de démonstration : l'exercice peut très bien être poursuivi. Peut-on contruire un algorithme permettant à partir d'une case donnée (l, c) de retrouver son contenu ? On pourra utiliser le dessin ci-après.

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/didactique3.tif]

Enfin et pour terminer, quel type de raisonnement permet à partir de cet algorithme de montrer qu'il suffit d'écrire l et c en base 2 et de sommer les puissances de 2 correspondant aux digits différents de ces deux nombres :

[-] l = 17, soit en base 2 : 10001
[-] c = 14, soit en base 2 : 01110
[-] le nombre cherché est : 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31.

[-] l = 2013, soit en base 2 : 111110**11**101
[-] c = 1989, soit en base 2 : 111110**00**101
[-] le nombre cherché est : 24 + 23= 24.

Cet exercice alterne phase expérimentale, conjectures et démonstrations sans que dans le temps de l'école, la chronologie mathématique soit respectée. La gestion passe par des choix qui sont de la responsabilité de l'enseignant dont le savoir doit être spécifique. Terriblement évolutif, ce savoir doit être modelable, déformable et aussi très résistant pour rester à une distance méticuleusement calculée des enjeux de la société qu'il représente. Mettons le par exemple à l'épreuve de la situation suivante.

Le savoir de l'enseignant peut-il faire l'objet d'un enseignement ?

[http://irem.univ-reunion.fr/IMG/tif/didactique4.tif]

Un élève de seconde, excellent observateur, m'a proposé la solution suivante :

Pour écrire ABRACA, je multiplie par 2 le nombre de cas à chaque étape, soit 25 = 32 cas.

À partir de là, je multiplie toujours par 2 à chaque étape, mais je supprime aussi un chemin à droite et un chemin à gauche, soit :

((((32×2   2)× 2   2)×2   2)×2   2) = 582.

1. Que pensez-vous du problème ?
2. Que pensez-vous de la solution ?
3. Que pensez-vous de l'élève ?
4. Comment animer une séquence d'enseignement sur cet exercice en tenant compte de la solution proposée ?

Pour répondre à ces quatre questions, un recul didactique est indispensable, sinon on se livrera à une n-ième et banale discussion de coin de bar pédago-rigide.

Conclusion :

Nous avons effectué un petit parcours initiatique à travers les méandres du savoir enseigné en mathématiques en le mettant à l'épreuve du Â« démontrable Â» en cours d'acquisition chez un élève de lycèe.

Nous constatons que s'il est possible de se fixer des objectifs ambitieux, il faut savoir rejeter ce qui est vain, chimérique et en dernière analyse néfaste.
Nos parents ont eu leur Â« pont-aux-ânes Â», nous avons notre Â« réciproque du théorème de Pythagore Â». Ces choix demandent avant tout une définition claire et précise de la fonction de l'école : définition que certains réduisent à lire, écrire et compter comme s'ils réduisaient la vie à manger, boire et respirer.

À travers l'approche didactique, doit se construire une véritable stratégie pédagogique. La cheville ouvrière de l'édifice est l'enseignant. Son savoir demande une performance toujours plus grande, il doit s'adapter au monde moderne et aussi lui rendre des comptes ; ce n'est qu'alors qu'il obtiendra la reconnaissance de son expertise. Pour assumer une telle responsabilité, l'enseignant doit recevoir une formation spécifique. Ce serait une erreur très grave que d'en négliger la composante théorique que nous désignons par le terme de Â« didactique Â».

4. Didactiquement vôtre

4. Didactiquement vôtre

Voyez comme les professeurs de seconde actuels font des efforts pour rendre les mathématiques attrayantes sans y parvenir bien sûr, victimes de la transposition didactique.

Le texte ci dessous met bien en évidence ce phénomène à travers l'anachronisme entre le texte lui même, le titre (exercice 1...) et le questionnaire à la fin. Seul un contrat didactique bien ancré fera dépasser la situation scolaire et permettra au bon élève de gouter l'originalité de ce travail.

J'utilise ce type d'exemple pour prouver qu'un tel enseignement est plus élitiste qu'on ne le croit, au grand dam des jeunes enseignants qui font preuve de tant d'imagination. Je les rassure cependant en leur disant qu'en faisant ces recherches ils prennent, eux, du plaisir et que c'est important ; quant aux résultats, s'ils ne sont pas au rendez-vous, la didactique l'explique et ce faisant évite le découragement des maîtres.

Exercice 1 : Mise en équation poétique

Bhaskara (1114-1185) est l'un des plus fameux mathématiciens et astrologues indiens du 12e siècle. Il étudia les propriétés du zéro et expliqua, le premier, que le quotient d'un nombre non nul par zéro est infini.

Cependant sa renommée provient essentiellement de son recueil de problèmes mathématiques intitulé *Lilavati*. Lilavati, c'est-à-dire Â« Beauté Â», est le nom de la fille de Bhaskara, destiné au célibat d'après l'horoscope établi par son père à sa naissance. Malgré tout, le mathématicien-astrologue ne désespérait pas de marier sa fille et, l'âge venu, il attendit avec les futures époux, devant la clepsydre, le moment le plus propice à l'union, d'après les astres. Mais une perle déatchée du vêtement nuptial de Lilavati obstrua l'orifice d'écoulement de l'horloge et l'heure favorable fut de beaucoup dépassée lorsqu'on s'en aperçut. Consterné, Bhaskara dit à sa fille pour la consoler : Â« Je vais composer un livre qui portera ton nom et passera à la postérité. Une bonne renommée équivaut à une seconde vie et est source d'éternité. Â»

Voici, ci-dessous, la traduction d'un charmant problème de *Lilavati* :

D'un essai d'abeilles, un cinquième sont venues vers une fleur de lotus, un tiers vers une fleur de bananier.

Une quantité égale à trois fois la différence entre les deux nombres précédents d'abeilles, ô belle aux yeux de gazelle, a volé vers un arbre codaga.

Une abeille enfin, se balançant, erre çà et là dans les airs, attirée en même temps par le délicieux parfum du jasmin et du pandanus.

Dis-moi, ô ma charmante, quel est le nombre d'abeilles de l'essaim ?

I - Qu'est-ce qu'une clepsydre ?

II - Résoudre le problème de *Lilavati* en respectant les cinq étapes :

1. Choix de l'inconnue
2. Mise en équation (écrire l'énoncé dans une colonne et le traduire algébriquement en face)
3. Résolution de l'équation
4. Vérification
5. Conclusion (réponses)

III - Écrire un poème correspondant à l'équation :

$x = x/6 + x/8 + 2(x/6 + x/8) + 2$.

(Source de l'exercice : http://www.ilemaths.net/forum-sujet...)

Et maintenant que vous avez bien saisi mon propos, jugez-vous cet exercice difficile ?

L'équation proposée est plus complexe qu'il n'y paraît, et ce en raison des contraintes non exprimées par l'énoncé. Le professeur l'a-t-il fait exprès ? Ou bien est-il simplement négligent ? Voilà une caractéristique d'un savoir spécifique : le savoir de l'enseignant !

Une équation n'a de sens que si l'on précise le domaine sur lequel on l'étudie, ici non seulement x doit être entier, mais aussi $x/3$, $x/5$ et $3(x/3 - x/5)$. On rejette donc l'option $3(x/5 - x/3)$, qui serait un nombre négatif. L'entier x doit être un multiple de 15 et si on l'écrit $15k$, on devrait être conduit à une équation plus simple (où l'inconnue est k et le résultat demandé $15k$).

Essayer 15 sans écrire d'équation et voir que c'est la solution cherchée n'est d'ailleurs pas ridicule... sauf que la question II n'oriente pas l'élève dans cette direction.

L'enseignant, dans sa grande responsabilité, peut négliger cette problématique et poursuivre des objectifs moins ambitieux. Ce faisant, il génère à nouveau de la transposition didactique.

On pourrait en rester là s'il n'y avait pas la question III ! En effet, la dernière question donne un résultat entier 16, mais qui n'est pas divisible par 6, ce qui oriente le poème cherché vers un autre thème que celui proposé... Intéressant, non ?

