

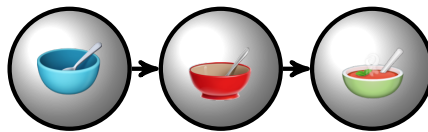
La catégorie Trois

Alain Busser

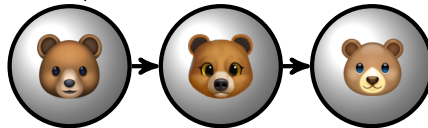
8 mai 2023

Maintenant qu'on dispose des catégories Un et Deux, on peut définir les autres nombres : ce sont les catégories de graphes orientés connexes dont tous les sommets ont des degrés entrant et sortant égaux à 1 sauf 2 d'entre eux : le départ qui a un degré entrant nul et l'arrivée qui a un degré sortant nul. En particulier la catégorie **Trois** est celle des graphes orientés connexes ayant exactement deux arêtes ne joignant pas les deux mêmes sommets. Voici trois objets de cette catégorie :

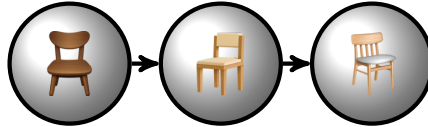
- Trois bols :



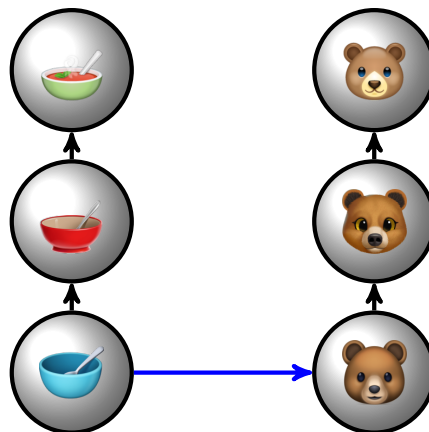
- Trois ours (celui de droite s'appelle Bébé) :



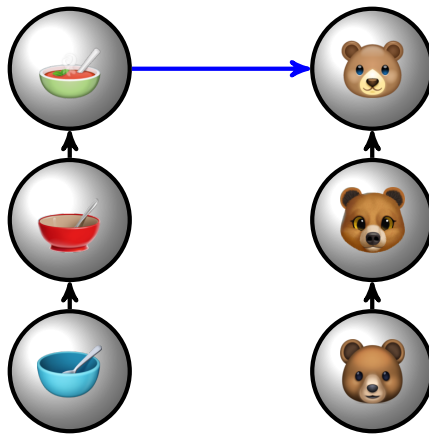
- Trois chaises :



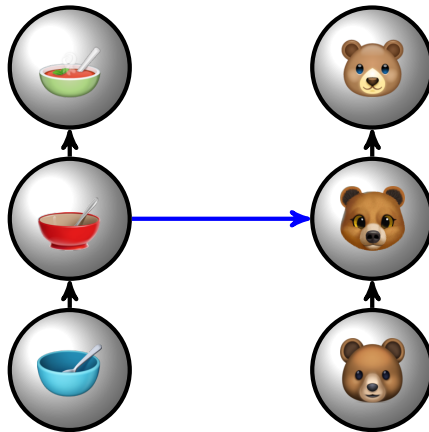
À quoi peut ressembler un morphisme entre l'objet *trois bols* et l'objet *trois ours* ? Déjà, le départ (le bol bleu) doit correspondre au départ (Maman ours) :



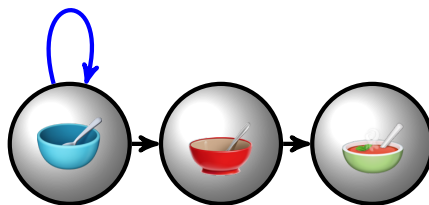
et l'arrivée (le bol vert) doit correspondre à l'arrivée (Bébé ours) :



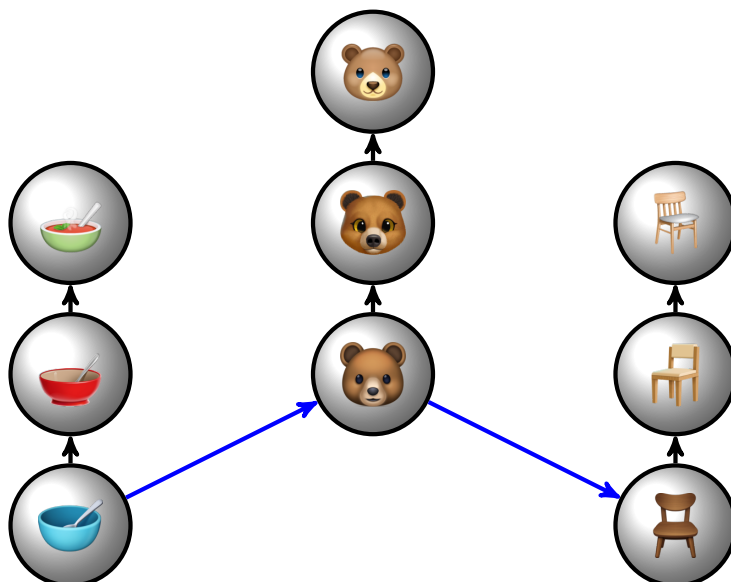
Du coup, le bol rouge ne peut, par élimination, appartenir qu'à Papa ours :



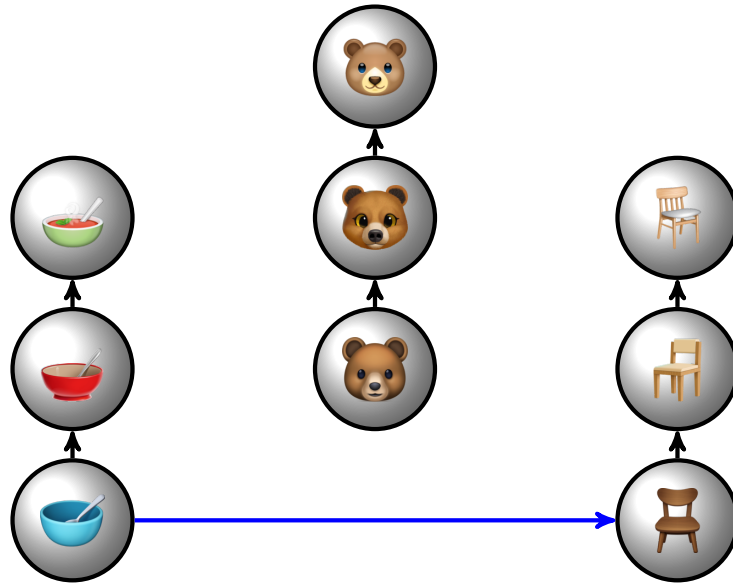
Entre deux objets de la catégorie Trois, il n'y a donc qu'un seul morphisme. Et chaque objet de la catégorie Trois a une seule identité :



Ces flèches bleues sont bien des morphismes : en composant l'une d'entre elles avec (ou par) une identité, on garde la même flèche, et si on compose deux flèches bleues :



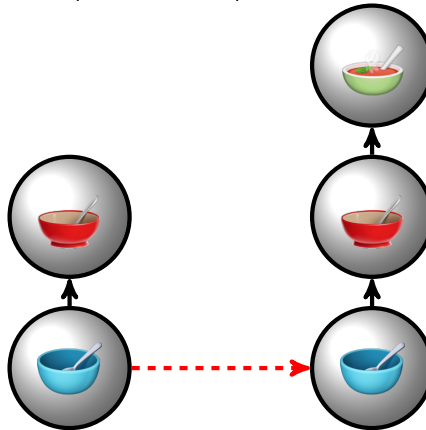
La chaise de face et le bol bleu (départs des objets *trois chaises* et *trois bols*) appartenant tous deux à Maman ours, sont donc associés par cette appartenance commune :



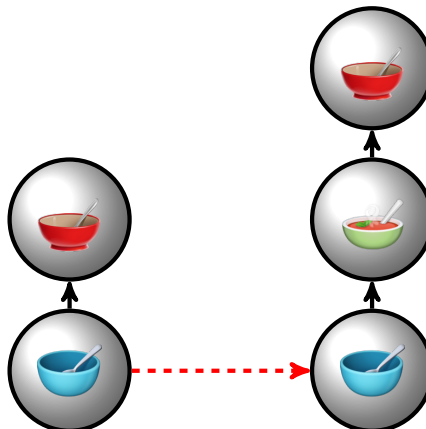
Mais de même le bol vert (arrivée de l'objet *trois bols*) et la chaise à coussin (arrivée de l'objet *trois chaises*) sont associés par leur appartenance commune à Bébé ours, et le bol rouge et la chaise de profil (milieux des objets *trois bols* et *trois chaises*) sont associés par leur appartenance commune à Papa ours. La flèche bleue ci-dessus associant le départ de l'objet *trois bols* avec le départ de l'objet *trois chaises*, le milieu avec le milieu et l'arrivée avec l'arrivée, est bien un morphisme et la composée de deux flèches bleues est une flèche bleue. C'est une condition pour définir des morphismes entre objets d'une même catégorie : Trois est bien une catégorie.

Il y a 2 foncteurs de la catégorie Un vers la catégorie Deux. Et il y en a 3 de la catégorie Deux vers la catégorie Trois :

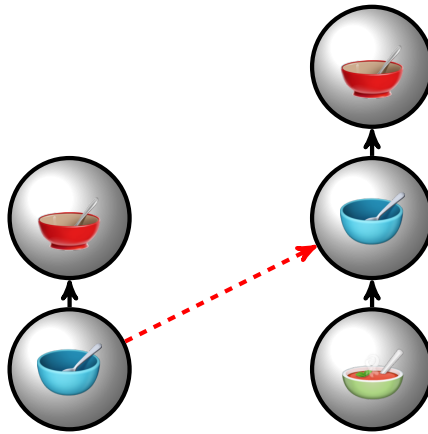
- transformer l'arrivée de l'objet de Deux (le bol rouge) en milieu et y greffer une nouvelle arrivée :



- insérer un milieu (le bol vert) entre le départ et l'arrivée de l'objet de Deux, qui restent alors départ et arrivée de l'objet de Trois :



- Mettre le bol vert comme nouveau départ, en le faisant pointer vers l'ancien départ (idée de John McCarthy avec Lisp) :



Dans la suite, on fera le premier choix, appelé *concaténation*. Il s'agit bien d'un foncteur puisqu'il transporte un morphisme (flèche bleue à gauche) de la catégorie Deux vers un morphisme (flèche bleue à droite) de la catégorie Trois :

