REGARD SUR UN MATHÉMATICIEN INDIEN : SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Dominique TOURNÈS

Dans cet atelier, nous allons présenter brièvement un mathématicien indien hors du commun : Srinivasa Ramanujan, puis nous tirerons de son œuvre quelques idées d'activités réalisables en classe de Terminale Scientifique. Ces activités, du domaine de la théorie des nombres, semblent en accord avec les tendances actuelles des programmes, qu'il s'agisse du retour de l'arithmétique dans l'enseignement de spécialité ou, moins spécifiquement, de la place croissante accordée à l'algorithmique.

Une vie romantique

Srinivasa Aiyangar Ramanujan naît le 22 décembre 1887 à Erode, dans le sud de l'Inde. Sa famille, bien qu'appartenant à la caste des brahmanes, est pauvre (son père est comptable chez un drapier). De 7 à 16 ans, Ramanujan fait ses études au Collège de Kumbakonam, une petite ville à 260 km de Madras. Pendant cette période, il apprend les mathématiques en autodidacte, à partir de la lecture de deux livres : un traité de trigonométrie plane de S. Loney, et un ouvrage de G. S. Carr intitulé *A synopsis of elementary results in pure and applied mathematics*. C'est là que la légende du prodige indien commence à prendre forme. On raconte qu'il avait redécouvert par ses propres moyens des formules d'Euler sur les fonctions trigonométriques mais qu'il fut bien déçu de les trouver dans le traité de Loney. On pense aussi que la forme du livre de Carr influa beaucoup sur sa façon ultérieure de faire des mathématiques. En effet, cette compilation contient 6165 théorèmes et formules énoncés quasiment sans démonstration et, tout au long de sa vie, Ramanujan remplira à son tour de nombreux cahiers de formules mystérieuses et profondes sans nous faire part des cheminements de sa pensée.

En 1903, ayant décroché la bourse Subrahmanyam, Ramanujan entre dans la classe de 1ère année des Humanités au Collège universitaire gouvernemental de Kumbakonam. Cependant, de 1904 à 1907, il enregistre une série d'échecs à ses examens universitaires. En 1909, il se marie. L'année suivante, il est remarqué par Ramachandra Rao, un riche mécène passionné de mathématiques, qui lui alloue une pension mensuelle afin de lui permettre de se consacrer à ses recherches. En 1911, Ramanujan publie un premier article scientifique important, qui porte sur les nombres de Bernoulli, mais cette situation d'assistance lui pèse. Pour en sortir, il accepte en 1912 un poste de commis dans un bureau de l'agence portuaire de Madras. C'est en 1913 que va se situer la principale bifurcation de son existence ; en effet, cette année-là, il envoie à trois mathématiciens britanniques une collection de 120 formules dont il est l'auteur. Seul parmi les destinataires, G. H. Hardy décèle l'originalité et la profondeur de certaines de ces formules : « [Ces égalités] me dépassèrent complètement ; je n'avais jamais vu auparavant quelque chose qui s'en approchât, même de loin. Il suffisait d'un coup d'œil pour se rendre compte qu'elles n'avaient pu être écrites que par un mathématicien de tout premier rang. » [Hardy 1985, p. 107].

Hardy se démène pour faire venir Ramanujan en Angleterre en 1914, malgré l'opposition de sa famille. Pendant cinq ans, au Trinity College de Cambridge, la collaboration entre les deux mathématiciens s'avère fructueuse. L'expérience et les connaissances techniques de Hardy se marient bien au génie brut de Ramanujan (Hardy, qui avait établi une échelle des capacités pures en mathématiques, donna à Ramanujan la note 100 alors qu'il ne s'attribuait à lui-même que 25). En 1917, Ramanujan est élu membre de la Royal Society ainsi que de Trinity College (dans les deux cas, il est le premier Indien à obtenir une telle distinction). C'est à peu près au même moment que Ramanujan tombe malade. Les médecins diagnostiquent une tuberculose mais on pense aujourd'hui qu'il souffrait avant tout d'une grave carence en vitamines (Ramanujan, qui était strictement végétarien, avait du mal à se nourrir convenablement dans un pays rationné par la guerre). À partir de là, il va passer l'essentiel du reste de sa vie dans des sanatoriums. Son état de santé se dégrade, au point qu'il souhaite rentrer à Madras, où il meurt le 26 avril 1920, peu après son retour.

Afin de mieux cerner le personnage de Ramanujan, nous allons terminer cette première partie par deux citations. La première est de Hardy, l'homme qui fut sans doute le plus proche du jeune Indien :

> « Je dois me faire moi-même […] une opinion raisonnée à propos du personnage le plus romanesque de l'histoire récente des mathématiques ; un homme dont la carrière semble accumuler les contradictions et les paradoxes, et qui défie pratiquement tous les critères auxquels on est accoutumé de se référer pour juger les autres ; un homme enfin à propos de qui l'on conviendra, à l'unanimité, qu'il fut à sa manière un très grand mathématicien.
>
> […] La vraie tragédie de Ramanujan, ce n'est pas sa disparition précoce. Il est bien sûr désastreux qu'un si grand homme soit mort si jeune, mais toutes proportions gardées, un mathématicien est souvent "vieux" à partir de trente ans, et sa mort est donc une catastrophe moindre qu'il peut paraître. Abel est mort à 26 ans et, bien qu'il eût sans nul doute apporté une bien plus large contribution aux mathématiques, il aurait difficilement pu être un plus grand savant. Le drame de Ramanujan n'est donc pas qu'il soit mort jeune mais que, durant ces cinq malheureuses années, son génie ait été si mal dirigé, dévié et, jusqu'à un certain point, déformé.
>
> […] J'ai écrit : "Sa perspicacité pour les formules algébriques, la transformation des séries infinies, etc., était ce qu'il y avait de plus fascinant. Sur ce point, je ne connais certainement personne qui lui soit comparable, sauf peut-être Euler et Jacobi. Il travaillait, bien plus que la majorité des mathématiciens modernes, par induction à partir d'exemples numériques ; par exemple, toutes les propriétés de congruence des partitions furent découvertes de la sorte. Mais avec sa mémoire, sa patience, sa puissance de calcul, il aboutissait à un ensemble absolument saisissant : puissance de généralisation, intuition de la forme, capacité à modifier rapidement ses hypothèses ; tout cela faisait de lui, dans son domaine, un chercheur inégalé à ce jour."
>
> Je ne pense toujours pas aujourd'hui que des mots si forts soient exagérés. Il est possible que la grande époque des formules ne soit plus, et que Ramanujan eût dû naître cent ans plus tôt ; mais il fut de loin le plus grand formaliste de son temps. » [Hardy 1985, p. 97, p. 104 et p. 114-115]

Le second texte est de Jonathan et Peter Borwein, deux mathématiciens qui participent activement à la course actuelle aux décimales de π. Ils nous expliquent la richesse et l'intérêt de l'œuvre de Ramanujan :

> « Les ingrédients des recettes récentes pour calculer π font partie des trésors mathématiques qui ont été mis à jour dans les œuvres de Ramanujan. La majeure partie de ces œuvres ne sont pas encore accessibles aux chercheurs : elles sont contenues dans ses "carnets", des écrits ou plutôt des suites de formules écrites avec des notations personnelles ; pour augmenter la frustration des mathématiciens, Ramanujan n'explicite pas les démonstrations de ses théorèmes. La tâche consistant à décrypter et éditer ces carnets est seulement sur le point d'être achevée (68 ans après la mort de Ramanujan !) par Bruce Berndt de l'Université de l'Illinois.
>
> À notre connaissance une édition mathématique aussi difficile n'a jamais été tentée mais l'effort en valait la peine ; les legs de Ramanujan enrichissent les mathématiques pures, et sont appliquées dans divers domaines de la physique mathématique.
>
> […] Les mathématiques n'ont probablement pas encore pleinement tiré parti du génie de Ramanujan ; de nombreuses et merveilleuses formules de ses carnets portant sur des intégrales, des séries infinies ou des fractions continues […] n'ont pas encore été exploitées. Par malheur elles sont répertoriées avec peu d'indications (quand il y en a) sur la technique utilisée par Ramanujan pour les obtenir. Littlewood écrivait : "Si une partie significative de démonstration

existait quelque part et s'il sentait intuitivement que la formule était correcte alors il ne cherchait pas plus loin."

Le travail herculéen d'édition des "carnets", commencé il y a 60 ans par les analystes britanniques G. Watson et B. Wilson, est actuellement poursuivi par Bruce Berndt ; ces mathématiciens s'imposent de fournir une démonstration, une source ou une éventuelle correction pour chacun des milliers d'énoncés ou identités affirmés. Une simple ligne des "carnets" peut nécessiter des pages de commentaires. La tâche est d'autant plus difficile que les formules ne sont pas rédigées avec l'écriture mathématiques habituelle.

Les capacités inégalées de Ramanujan pour jongler intuitivement avec des formules complexes lui permirent de semer des graines dans le jardin mathématique, qui sont seulement en train de germer. Beaucoup de mathématiciens sont dans une expectative intéressée : ils attendent de voir lesquelles de ces graines fleuriront dans les années à venir et contribueront à la beauté du jardin. » [J. et P. Borwein 1994, p. 109 et p. 116]

Décomposition d'un entier en somme de deux cubes

Ramanujan considérait les nombres comme des amis personnels. Pour illustrer cette intimité, Hardy relate l'anecdote suivante. Un jour où il lui rendait visite à l'hôpital, Hardy, ne sachant pas trop quoi dire, raconta à Ramanujan qu'il était arrivé avec le taxi nº 1729 et que ce nombre lui paraissait plutôt « ennuyeux ». Ramanujan répondit : « Non, Hardy ! C'est un nombre très intéressant. C'est le plus petit nombre qui s'écrive de deux façons différentes comme somme de deux cubes. »

Par curiosité, rédigeons un programme MATHEMATICA[1] renvoyant les écritures possibles comme somme de deux cubes des entiers inférieurs à 5000 :

```
taxi = { };
Do[Do[If[IntegerQ[(a – x^3)^(1/3)],
    taxi = Join[taxi, {SequenceForm[" ", a, " = ",
    x, "^3 + ", (a – x^3)^(1/3), "^3"]}]],
    {x, 1, IntegerPart[(a/2)^(1/3)]}], {a, 1, 5000}]
taxi
```

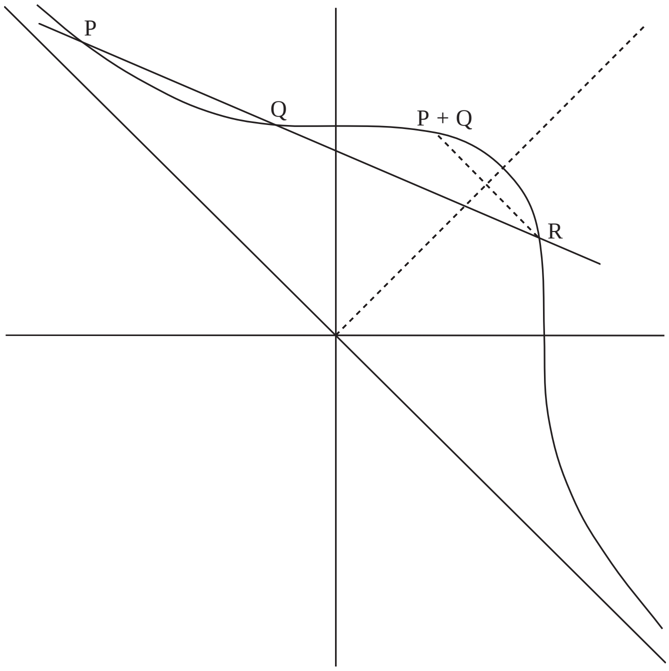
```
2 = 1^3 + 1^3, 9 = 1^3 + 2^3, 16 = 2^3 + 2^3, 28 = 1^3 + 3^3,
35 = 2^3 + 3^3, 54 = 3^3 + 3^3, 65 = 1^3 + 4^3, 72 = 2^3 + 4^3,
91 = 3^3 + 4^3, 126 = 1^3 + 5^3, 128 = 4^3 + 4^3,
133 = 2^3 + 5^3, 152 = 3^3 + 5^3, 189 = 4^3 + 5^3,
217 = 1^3 + 6^3, 224 = 2^3 + 6^3, 243 = 3^3 + 6^3,
250 = 5^3 + 5^3, 280 = 4^3 + 6^3, 341 = 5^3 + 6^3,
344 = 1^3 + 7^3, 351 = 2^3 + 7^3, 370 = 3^3 + 7^3,
407 = 4^3 + 7^3, 432 = 6^3 + 6^3, 468 = 5^3 + 7^3,
513 = 1^3 + 8^3, 520 = 2^3 + 8^3, 539 = 3^3 + 8^3,
559 = 6^3 + 7^3, 576 = 4^3 + 8^3, 637 = 5^3 + 8^3,
686 = 7^3 + 7^3, 728 = 6^3 + 8^3, 730 = 1^3 + 9^3,
737 = 2^3 + 9^3, 756 = 3^3 + 9^3, 793 = 4^3 + 9^3,
```

[1] Pendant l'atelier, les programmes ont été réalisés dans le langage de la TI-92, calculatrice qui était à la disposition des participants.

```
854 = 5^3 + 9^3, 855 = 7^3 + 8^3, 945 = 6^3 + 9^3,
1001 = 1^3 + 10^3, 1008 = 2^3 + 10^3, 1024 = 8^3 + 8^3,
1027 = 3^3 + 10^3, 1064 = 4^3 + 10^3, 1072 = 7^3 + 9^3,
1125 = 5^3 + 10^3, 1216 = 6^3 + 10^3, 1241 = 8^3 + 9^3,
1332 = 1^3 + 11^3, 1339 = 2^3 + 11^3, 1343 = 7^3 + 10^3,
1358 = 3^3 + 11^3, 1395 = 4^3 + 11^3, 1456 = 5^3 + 11^3,
1458 = 9^3 + 9^3, 1512 = 8^3 + 10^3, 1547 = 6^3 + 11^3,
1674 = 7^3 + 11^3, 1729 = 1^3 + 12^3, 1729 = 9^3 + 10^3,
1736 = 2^3 + 12^3, 1755 = 3^3 + 12^3, 1792 = 4^3 + 12^3,
1843 = 8^3 + 11^3, 1853 = 5^3 + 12^3, 1944 = 6^3 + 12^3,
2000 = 10^3 + 10^3, 2060 = 9^3 + 11^3, 2071 = 7^3 + 12^3,
2198 = 1^3 + 13^3, 2205 = 2^3 + 13^3, 2224 = 3^3 + 13^3,
2240 = 8^3 + 12^3, 2261 = 4^3 + 13^3, 2322 = 5^3 + 13^3,
2331 = 10^3 + 11^3, 2413 = 6^3 + 13^3, 2457 = 9^3 + 12^3,
2540 = 7^3 + 13^3, 2662 = 11^3 + 11^3, 2709 = 8^3 + 13^3,
2728 = 10^3 + 12^3, 2745 = 1^3 + 14^3, 2752 = 2^3 + 14^3,
2771 = 3^3 + 14^3, 2808 = 4^3 + 14^3, 2869 = 5^3 + 14^3,
2926 = 9^3 + 13^3, 2960 = 6^3 + 14^3, 3059 = 11^3 + 12^3,
3087 = 7^3 + 14^3, 3197 = 10^3 + 13^3, 3256 = 8^3 + 14^3,
3376 = 1^3 + 15^3, 3383 = 2^3 + 15^3, 3402 = 3^3 + 15^3,
3439 = 4^3 + 15^3, 3456 = 12^3 + 12^3, 3473 = 9^3 + 14^3,
3500 = 5^3 + 15^3, 3528 = 11^3 + 13^3, 3591 = 6^3 + 15^3,
3718 = 7^3 + 15^3, 3744 = 10^3 + 14^3, 3887 = 8^3 + 15^3,
3925 = 12^3 + 13^3, 4075 = 11^3 + 14^3, 4097 = 1^3 + 16^3,
4104 = 2^3 + 16^3, 4104 = 9^3 + 15^3, 4123 = 3^3 + 16^3,
4160 = 4^3 + 16^3, 4221 = 5^3 + 16^3, 4312 = 6^3 + 16^3,
4375 = 10^3 + 15^3, 4394 = 13^3 + 13^3, 4439 = 7^3 + 16^3,
4472 = 12^3 + 14^3, 4608 = 8^3 + 16^3, 4706 = 11^3 + 15^3,
4825 = 9^3 + 16^3, 4914 = 1^3 + 17^3, 4921 = 2^3 + 17^3,
4940 = 3^3 + 17^3, 4941 = 13^3 + 14^3, 4977 = 4^3 + 17^3
```

Au vu de cette liste, on constate que, ainsi que l'avait remarqué Ramanujan, le plus petit nombre à apparaître deux fois est bien $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Le nombre suivant qui peut s'écrire de deux manières comme somme de deux cubes est $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$.

Rechercher les écritures d'un entier A comme somme de deux cubes, c'est résoudre en nombres entiers l'équation $X^3 + Y^3 = A$. D'un point de vue géométrique, cela revient à chercher les points à coordonnées entières – ou, plus généralement, à coordonnées rationnelles – sur la cubique d'équation $X^3 + Y^3 = A$. Il est possible de définir une structure de groupe sur une telle cubique grâce à la construction suivante : si P = (X, Y) et $Q = (X', Y')$ sont deux points de la cubique, la droite (PQ) recoupe la courbe en un point R, et on appelle P + Q le symétrique de R par rapport à la droite d'équation X = Y (si P = Q, la droite (PQ) est remplacée par la tangente en P à la courbe). Cette loi + définit sur la cubique une structure de groupe commutatif, dont l'élément neutre est le point à l'infini dans la direction de l'asymptote d'équation Y = – X (il faut considérer que l'on travaille dans le plan projectif).



Algébriquement, cette loi de groupe se définit à partir des coordonnées par la formule

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}=\left(\frac{\mathrm{A}(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}')-\mathrm{XX}'(\mathrm{YX}'-\mathrm{XY}')}{\mathrm{XX}'(\mathrm{X}-\mathrm{X}')+\mathrm{YY}'(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}')},\frac{\mathrm{A}(\mathrm{X}-\mathrm{X}')-\mathrm{YY}'(\mathrm{XY}'-\mathrm{YX}')}{\mathrm{XX}'(\mathrm{X}-\mathrm{X}')+\mathrm{YY}'(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}')}\right).$$

Ceci permet de calculer de nouvelles solutions rationnelles à partir de celles qu'on connaît déjà. Par exemple, l'équation $\mathrm{X}^3+\mathrm{Y}^3=7$ admet la solution $\mathrm{P}=(2,-1)$, donc aussi les solutions

$$2\mathrm{P}=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right),\ 3\mathrm{P}=\left(-\frac{17}{38},\frac{73}{38}\right),\ \ldots,\ n\mathrm{P}=\left(\frac{a_n}{d_n},\frac{b_n}{d_n}\right),\ \ldots$$

On peut montrer que les points de la suite nP sont tous distincts[2]. Pour un entier naturel N fixé, considérons alors les points P, 2P, …, NP, et posons $\mathrm{B}=d_1d_2\ldots d_{\mathrm{N}}$ et

[2] Et même que deux de ces points ne sont jamais symétriques par rapport à la première bissectrice, ce qui permet de garantir dans la suite que lorsqu'on parle de solutions distinctes, il s'agit bien de solutions « essentiellement » distinctes (il est naturel de ne pas compter (X, Y) et (Y, X) comme des solutions distinctes).

$A = 7B^3$. On voit maintenant que l'équation $X^3 + Y^3 = A$ admet au moins N solutions en nombres entiers, à savoir

$$\left(\frac{a_n B}{d_n}, \frac{b_n B}{d_n}\right), 1 \le n \le N.$$

Ainsi, nous avons établi le résultat suivant : **pour tout entier naturel N, il existe un entier A tel que l'équation $X^3 + Y^3 = A$ admette au moins N solutions en nombres entiers**.

De plus, on peut montrer que dans la suite nP, il y a une infinité de points à coordonnées positives, ce qui permet d'aménager le raisonnement précédent pour imposer aux N solutions de l'équation $X^3 + Y^3 = A$ d'être des solutions en nombres entiers **positifs**. En guise d'application, on peut rechercher expérimentalement pour des petites valeurs de N le plus petit entier qui s'écrive de N manières comme somme de deux cubes. Pour N = 2, 3, 4, on trouve respectivement :

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 \ ;$$

$$87\,539\,319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3 \ ;$$

$$\begin{aligned} 26\,059\,452\,841\,000 &= 4170^3 + 29\,620^3 = 12\,900^3 + 28\,810^3 \\ &= 14\,577^3 + 28\,423^3 = 21\,930^3 + 24\,940^3. \end{aligned}$$

Le nombre π

Passons à un second groupe d'activités, cette fois autour du nombre π. Le nombre π est sans doute le plus « naturel » des nombres transcendants, dans la mesure où il apparaît à la fois en tant que longueur d'un cercle de diamètre unité et en tant qu'aire d'un cercle de rayon unité. Il ne faut donc pas s'étonner qu'un tel nombre ait fait l'objet de recherches aussi nombreuses depuis vingt-cinq siècles. D'un point de vue algébrique, on sait depuis Lambert (1771) que π est irrationnel, et depuis Lindemann (1882) qu'il est même transcendant. Le plus surprenant est qu'on ne sache pas grand-chose d'autre ; en particulier, on ignore tout des propriétés du développement décimal de π en dépit des quelque cinquante milliards de décimales qui ont déjà été calculées. Heureusement, les recherches visant à calculer toujours plus de décimales de π gardent leur intérêt propre. Ces recherches s'organisent en trois périodes successives qui correspondent aux trois principales méthodes utilisées.

Au cours de la première période, environ de – 250 à 1600, les calculs reposent sur l'idée initiale d'Archimède de Syracuse (– 287, – 212) consistant à encadrer la longueur d'un cercle de diamètre unité par les longueurs des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Au moyen de polygones à 6.2^n côtés, en s'arrêtant à $n = 4$, Archimède avait obtenu l'encadrement

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}.$$

En termes modernes, sa méthode revient à faire apparaître le nombre π comme limite commune des suites adjacentes définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2\sqrt{3} \\ b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}. \end{cases}$$

Des variantes du même algorithme ont été utilisées jusqu'au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle. Le record est détenu par Ludolph van Ceulen (1540-1610) qui, à l'aide de polygones à 2^{60} côtés, parvint à calculer 34 chiffres de π.

La seconde période commence tout naturellement avec l'invention du calcul infinitésimal. En 1671, Gregory trouve la série

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Il est clair que cette série converge d'autant mieux que x est plus petit. En 1706, Machin calcule 100 décimales de π à partir de la formule qui porte désormais son nom :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Des variantes de la formule de Machin ont été utilisées jusque vers les années 1970. On ne peut manquer de citer William Shanks qui, en 1853, obtint 527 décimales exactes par un calcul à la main ! Plus tard, c'est l'apparition des ordinateurs qui relança la course : en 1949, Metropolis, Reitwieser et von Neumann calculèrent 2037 décimales sur l'ENIAC ; en 1961, Dan Shanks et Wrench atteignirent 100 000 chiffres avec un IBM 7090 ; en 1973, le cap du million de décimales fut dépassé par Guilloud et Bouyer sur un CDC 7600.

Enfin, dans la dernière période, qui a commencé il y a seulement une quinzaine d'années, les calculateurs de π font appel à des algorithmes entièrement nouveaux issus de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions modulaires. Ces algorithmes sont étroitement liés à certains travaux de Ramanujan qui, pour la première fois, mirent en évidence un lien entre la théorie de la transformation des intégrales elliptiques et l'approximation rapide de π. En 1985, W. Gosper obtint 17 millions de décimales et, en 1986, D. H. Bailey atteignit les 29 millions. Depuis, une compétition féroce oppose surtout le japonais Y. Kanada, de l'université de Tokyo, aux frères D. et G. Chudnovsky, deux ukrainiens installés aux États-Unis. À notre connaissance, le dernier record appartient à Kanada : en 1997, il a calculé 51 539 607 552 décimales de π ! Pour illustrer ces calculs gigantesques, qui font appel aux ordinateurs les plus puissants, nous allons explorer trois des algorithmes utilisés.

La formule suivante fut découverte par Ramanujan en 1910 et publiée en 1914 :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}.$$

Cette formule, qui n'a été démontrée qu'en 1987, est pourtant celle qui avait été utilisée par Gosper pour son calcul de 1985 (à l'époque, le résultat de Gosper, qui se révéla en accord avec les calculs de π réalisés antérieurement, pouvait être considéré comme une confirmation expérimentale de la validité de la formule de Ramanujan). Le programme MATHEMATICA ci-dessous montre que l'on obtient soixante décimales exactes de π en arrêtant la somme de la série au huitième terme (les chiffres exacts sont en gras) :

```
Do[Print[N[9801/(Sqrt[8]*Sum[((4*k)!*(26390*k + 1103))/
   (k!^4*396^(4*k)), {k, 0, n}]), 60]], {n, 0, 7}]
```

3.141592*73001330566031399618902521551859958160711003355965654*
3.141592653589793*87799890582630601309421664502932284887917396*
3.14159265358979323846264*906570275889815667748046233478116840*
3.1415926535897932384626433832795*5527315997421042037991121670*
3.141592653589793238462643383279502884197*66381813303062397617*
3.14159265358979323846264338327950288419716939937*984683274351*
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582*102093*
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494

La méthode précédente reste une méthode à convergence géométrique (chaque étape fournit environ huit chiffres exacts de plus). La première formule à convergence rapide a été publiée indépendamment par E. Salamin et R. Brent en 1976, et peut être rattachée aux travaux de Gauss sur la moyenne arithmético-géométrique[3] :

$$y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\quad a_0=\frac{1}{2}\,;$$
$$y_{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-y_n^2}}{1+\sqrt{1-y_n^2}}\,;\quad a_{n+1}=(1+y_{n+1})^2a_n-2^{n+1}y_{n+1}.$$

La convergence est d'ordre deux. Le programme ci-dessous montre que le nombre de chiffres exacts double environ à chaque étape et que les soixante chiffres exacts sont atteints à la sixième itération :

```
a = 1/2; y = 1/Sqrt[2];
Do[y = (1 - Sqrt[1 - y^2])/(Sqrt[1 - y^2] + 1);
   a = (y + 1)^2*a - 2^k*y; Print[N[1/a, 60]], {k, 1, 6}]
```

3 Cet algorithme de Gauss-Brent-Salamin était le thème d'une épreuve écrite du CAPES externe de mathématiques en 1995.

2.91421356237309504880168872420969807856967187537694807317668
3.14*057925052216824831133126897582331177344023751294833564349*
3.1415926*4621354228214934443198269577431443722334560279455954*
3.141592653589793238*27951277480186397438122550483544693578733*
3.14159265358979323846264338327950288419711*4678283648921556662*
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494

Après l'algorithme de Gauss-Brent-Salamin, d'autres méthodes à convergence rapide d'ordre 3, 4, etc., ont été construites par J. et P. Borwein à partir des travaux de Ramanujan sur les identités modulaires. Voici un algorithme d'ordre 4 :

$$y_0 = \sqrt{2} - 1 ; \quad a_0 = 6 - 4\sqrt{2} ;$$
$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}} ; \quad a_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 a_n - 2^{2n+3} y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2).$$

Cette fois, on constate que le nombre de chiffres exacts quadruple environ à chaque étape et que les soixante chiffres exacts sont atteints dès la troisième itération :

```
a = 6 - 4*Sqrt[2]; y = Sqrt[2] - 1;
Do[y = (1 - (1 - y^4)^(1/4))/((1 - y^4)^(1/4) + 1);
   a = (y + 1)^4*a - 2^(2*k + 1)*y*(y^2 + y + 1);
   Print[N[1/a, 60]], {k, 1, 3}]
```

3.1415926*4621354228214934443198269577431443722334560279455954*
3.14159265358979323846264338327950288419711*4678283648921556662*
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494

Certains se demanderont quelle est l'utilité d'une course aussi folle aux décimales de π. On peut répondre, d'une part, que la quête de π a entraîné la découverte de nombreux résultats mathématiques parfois inattendus et, d'autre part, que les algorithmes mis au point servent aujourd'hui à tester les capacités de calcul et la fiabilité des nouveaux ordinateurs.

Conclusion

Dans ce que nous venons de présenter, il y a, à notre sens, des points de départ fructueux pour lancer des élèves de Terminale sur des problèmes riches faisant appel à l'initiative et mêlant des activités arithmétiques, algébriques, géométriques et algorithmiques. Le fait que beaucoup de questions ne puissent recevoir que des réponses partielles et le fait qu'on ne puisse qu'évoquer les théories savantes sous-jacentes ne constituent en rien des obstacles à une pratique mathématique authentique. Bien au contraire, c'est à l'aide d'activités semi-ouvertes de ce type qu'il devient possible d'offrir aux élèves de Terminale une véritable formation scientifique complétant utilement les exercices traditionnels de « bachotage ».

BIBLIOGRAPHIE

BERNDT (B. C.) et BHARGAVA (S.), Ramanujan – For lowbrows, *Amer. Math. Monthly*, 100 (1993), p. 644-656.

BORWEIN (J. M.) et BORWEIN (P. B.), Srinivasa Ramanujan, *Pour La Science*, dossier hors-série “Les mathématiciens” (1994), p. 108-116.

DELAHAYE (J.-P.), *Le fascinant nombre* π, Paris : Belin (Bibliothèque *Pour La Science*), 1997.

HARDY (G. H.), *L’apologie d’un mathématicien*, suivi de *Ramanujan, un mathématicien indien* et de *Bertrand Russel et le Collège de la Trinité*, trad. française de D. Jullien et S. Yoccoz, Paris : Belin (coll. Un savant, une époque), 1985.

RANKIN (R. A.), Ramanujan’s manuscripts and notebooks, *Bull. London Math. Soc.*, 14 (1982), p. 81-97.

RANKIN (R. A.), Ramanujan as a patient, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 93 (1984), p. 79-100.

RANKIN (R. A.), Ramanujan’s manuscripts and notebooks II, *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989), p. 351-365.

SILVERMAN (J. H.), Taxicabs and sums of two cubes, *Amer. Math. Monthly*, 100 (1993), p. 331-340.