

Pour optimiser leurs recettes, certaines compagnies aériennes ont recours à la surréservation (ou « surbooking ») : elles vendent plus de billets que de places dans l'avion.

Les premiers arrivés embarquent, et les éventuels passagers en trop sont indemnisés.

Cette pratique vise notamment à compenser le manque à gagner pour la compagnie lorsque certains voyageurs annulent leur réservation à la dernière minute. Mais attention ! Il ne faut pas non plus que la compagnie vende trop de billets, car devoir indemniser un trop grand nombre de passagers nuirait à son image.



Une compagnie aérienne dispose d'un Boeing 777 pour sa liaison régulière Réunion-Paris. Cet avion peut accueillir 470 passagers. Chaque billet coûte 500 €. Pour les clients n'ayant pas pu embarquer faute de place, le dédommagement s'élève à 600 € (Le billet est alors remboursé et les 600 € représentent une indemnité supplémentaire.). On estime qu'une personne ayant acheté un billet se présentera à l'embarquement avec une probabilité de 0,9.

Dans ce problème, nous allons chercher à optimiser le nombre de places en surréservation sans dépasser un risque raisonnable.

Dans tout ce problème, on notera n le nombre de personnes ayant acheté un billet pour un vol donné, et on notera X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement pour ce vol.

On suppose que les comportements des clients sont indépendants les uns des autres.

PARTIE 1 Pourquoi pratiquer la surréservation ?

Dans cette partie, on suppose que la compagnie a vendu $n = 470$ billets exactement, et donc sans surréservation.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2) Calculer la probabilité que l'avion ne soit pas plein.
- 3) Calculer l'espérance de X et interpréter ce nombre dans ce contexte.
- 4) Calculer la recette moyenne du vol.
- 5) Déterminer $P(X \leq 440)$ à l'aide de la calculatrice. Donner une interprétation de ce nombre et en déduire la nécessité pour la compagnie de pratiquer la surréservation.
- 6) Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$ et interpréter le résultat.

PARTIE 2 Un exemple de surréservation

Dans cette partie, on suppose que la compagnie a vendu $n = 490$ billets. Elle a donc vendu 20 billets de plus que le nombre de places dans l'avion.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2) Calculer la recette moyenne du vol.
- 3) Pour quelles valeurs de X la compagnie devra-t-elle refuser des passagers à l'embarquement ?
- 4) Calculer la probabilité que la compagnie doive refuser au moins un client.

PARTIE 3 Optimisation du nombre de places en surréservation

Pour optimiser ses coûts, la compagnie décide de limiter à une certaine valeur p la probabilité de ne pas pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent.

On cherche donc le nombre maximum de billets que l'on peut vendre, sachant qu'on doit avoir $P(X > 470) \leq p$, c'est-à-dire $P(0 \leq X \leq 470) \geq 1 - p$.

Pour cela, on va créer un programme sous Python dans lequel l'utilisateur rentre le seuil de risque p fixé par la compagnie, et qui retourne le nombre maximum de billets qu'elle peut vendre en respectant cette contrainte.

- 1) Écrire en langage Python une fonction $C(n,k)$ qui calcule $\binom{n}{k}$ lorsque l'utilisateur rentre n et k .

On utilisera la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, et la fonction `factorial(...)` de la bibliothèque `math`.

- 2) Pour n fixé, rappeler la formule donnant $P(X = k)$.

- 3) Pour rappel, $P(0 \leq X \leq 470) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 470)$

$$= \sum_{i=0}^{470} P(X = i)$$

Écrire en langage Python le programme suivant en créant une fonction `nombre_max(p)` :

```
On rentre p.
n ← 470
S ← 1
Tant que S ≥ 1 - p :
    S ← 0
    Pour i allant de 0 à 470 :
        S ← S +  $\binom{n}{i} \times 0,9^i \times 0,1^{n-i}$ 
        n ← n + 1
    n ← n - 1
retourner n
```



- 4) En utilisant le programme précédent, déterminer le nombre maximum de billets que peut vendre la compagnie lorsque $p = 0,01$, $p = 0,02$, puis $p = 0,05$.
- 5) Comparer les recettes moyennes de la compagnie lorsqu'elle n'effectue pas de surréservation, et lorsqu'elle pratique la surréservation avec un seuil de risque de 5 %.