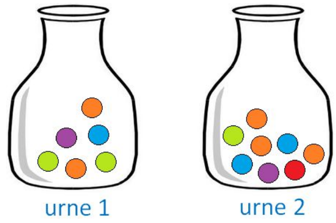
De quelle urne vient la boule ?

THÈME 7
Pb1

Deux urnes contiennent des boules de différentes couleurs. On choisit une urne au hasard, puis on tire une boule dans cette urne.
Avant de regarder la couleur de la boule, la probabilité d'avoir choisi la première urne est égale à 0,5.
Après avoir regardé la couleur de la boule, la probabilité d'avoir choisi la première urne est-elle toujours égale à 0,5 ? La formule de Bayes permet de calculer cette probabilité.



Thomas Bayes (1702 – 1760) est un mathématicien anglais et pasteur de l'Église presbytérienne. Il est connu pour sa formule, appelée **formule de Bayes** :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

L'**inférence bayésienne** est une méthode de calcul de probabilités de causes à partir des probabilités de leurs effets. La formule de Bayes, aussi appelée « formule de probabilité des causes », permet ce calcul.

On considère deux urnes qui contiennent toutes les deux des boules rouges et bleues indiscernables au toucher.
L'urne 1 contient 1 boule rouge et 7 boules bleues.
L'urne 2 contient 40 boules rouges et 10 boules bleues.

PARTIE 1 Où l'on pose le problème

1) Une personne qui a les yeux bandés choisit une urne au hasard, puis tire une boule au hasard dans cette urne.
Peut-on dire de quelle urne vient la boule ?

2) On note $\boldsymbol{U_1}$: « La boule vient de l'urne 1. »
et $\boldsymbol{U_2}$: « La boule vient de l'urne 2. ».
Que valent $P(U_1)$ et $P(U_2)$?

La personne enlève son bandeau et constate que la boule est rouge.
On cherche à connaître la probabilité que cette boule provienne de l'urne 1.
On note $\boldsymbol{R}$: « La boule tirée est rouge. ».

PARTIE 2 Où l'on propose une solution grâce à Python

On va tenter de répondre au problème posé en simulant un grand nombre de fois l'expérience avec Python.
Nous allons pour cela utiliser la fonction **randint(a , b)** qui renvoie un nombre entier aléatoire compris entre a et b inclus. Cette fonction fait partie du module **random**.

<u>On numérote les boules de l'urne 1 :</u>
la boule rouge porte le numéro 1, et les boules bleues les numéros de 2 à 8.
<u>On numérote aussi les boules de l'urne 2 :</u>
les boules rouges portent les numéros de 1 à 40, et les boules bleues les numéros de 41 à 50.

1) Dans le cas où la personne choisit l'urne 1, on définit la fonction suivante :

```python
from random import *
def U1():
    numero_boule=randint(1,8)
    if numero_boule==1:
        return 'rouge'
    else:
        return 'bleu'
```

Expliquer les étapes du programme.

2) Dans le cas où la personne choisit l'urne 2, on définit de même une fonction **U2()**.
Compléter le programme suivant :

```python
def U2():
    numero_boule=randint( , )
    if numero_boule    :
        return 
    else:
        return 'bleu'
```

3) Pour des valeurs de n assez grandes, tester le programme suivant qui simule n répétitions de l'expérience, et qui renvoie le nombre total de boules rouges tirées (NR), le nombre de boules rouges tirées issues de l'urne 1 (NR_urne1), et le nombre de boules rouges tirées issues de l'urne 2 (NR_urne2).

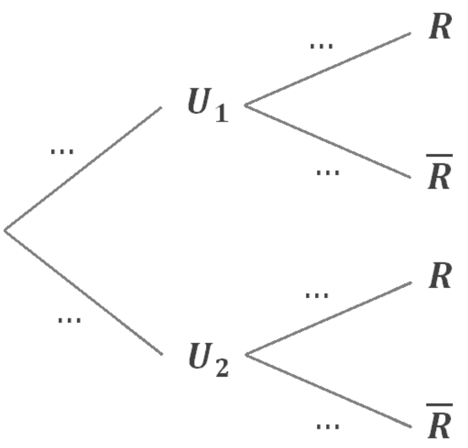
```python
def simulation(n):
    NR=0
    NR_urne1=0
    NR_urne2=0
    for k in range(n):
        if randint(1,2)==1:
            if U1()=='rouge':
                NR=NR+1
                NR_urne1=NR_urne1+1
        else:
            if U2()=='rouge':
                NR=NR+1
                NR_urne2=NR_urne2+1
    return NR,NR_urne1,NR_urne2
```

4) En déduire une conjecture au problème posé.

PARTIE 3 Où l'on fait une étude théorique du problème

1) Quelle est la probabilité que la boule soit rouge, sachant qu'elle provient de l'urne 1 ?

2) Compléter l'arbre pondéré :



3) Calculer la probabilité que la boule provienne de l'urne 1 et soit rouge.

4) Montrer que $P(R) = 0{,}4625$.

5) Expliquer pourquoi $P_R(U_1) = \frac{P(U_1) \times P_{U_1}(R)}{P(R)}$.

6) Calculer $P_R(U_1)$. (Arrondir à 0,0001 près.)

7) Quel influence a eu l'effet d'avoir retiré le bandeau sur la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne 1 ?

8) Calculer $P_R(U_2)$ et interpréter cette probabilité.

9) Compléter l'arbre pondéré :