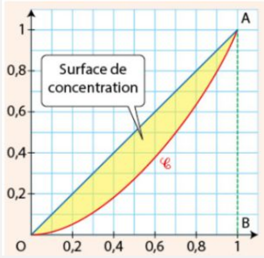
Indice de Gini

Prérequis : Thème 6 Pb1 Courbe de Lorenz

THÈME 6 Pb2

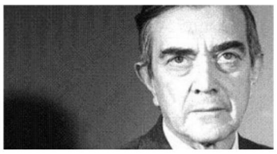
On a tracé une courbe de Lorenz représentant la répartition de richesses ou de revenus d'une population donnée, et on souhaite mesurer le degré d'inégalité de cette répartition.



Pour cela, on va calculer l'**indice de Gini**, que l'on note γ (se lit « gamma »).
On définit γ par :

$$\gamma = \frac{aire\ de\ la\ surface\ de\ concentration}{aire\ du\ triangle\ OAB}$$

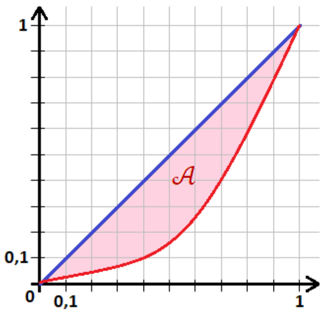
Corrado Gini (1884 – 1965) est un statisticien, démographe, ethnologue et sociologue italien. En 1912, il crée l'indice de Gini, souvent associé à la courbe de Lorenz.



Nous commencerons par des considérations générales sur l'indice de Gini, puis nous étudierons l'évolution d'une répartition grâce à cet indice.

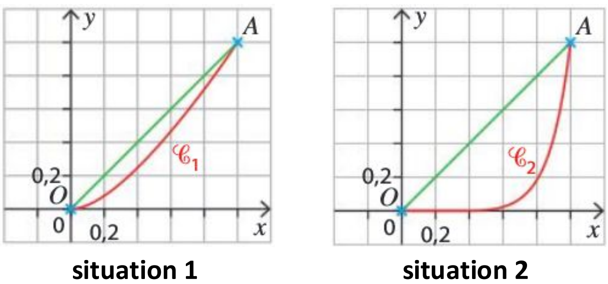
PARTIE 1 Considérations générales sur γ

1) Montrer que $\gamma = 2 \times \mathcal{A}$.



2) À quel intervalle appartient γ ?

3) Dans quelle situation semble-t-il y avoir le plus d'inégalités ?



4) Que vaut γ dans une situation parfaitement égalitaire ? Faire un schéma représentant la situation.

5) Que vaut γ dans une situation parfaitement inégalitaire ? Faire un schéma représentant la situation.

PARTIE 2 Étude de l'évolution d'une répartition

Dans un pays, les richesses étaient réparties de façon trop inégalitaire, on a donc décidé par une série de mesures de réduire ces inégalités.
Les répartitions des richesses avant et après les mesures sont données dans les tableaux suivants, où x_i désigne la part de l'ensemble des habitants, et y_i la part correspondante de l'ensemble de la masse des richesses, $i \in [\![0;4]\!]$.

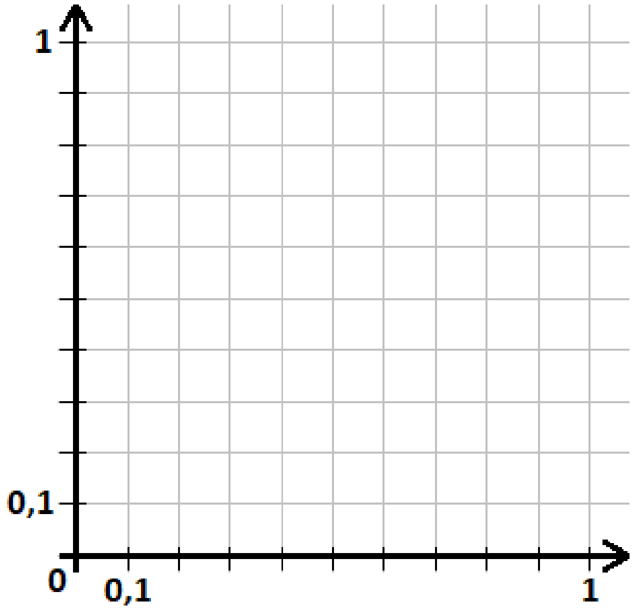
AVANT MESURES

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	0	0,04	0,12	0,3	1

APRÈS MESURES

x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	0	0,1	0,25	0,5	1

1) Dans le repère orthonormé suivant, tracer la droite d'équation $y = x$, puis placer les points de coordonnées $(x_i; y_i)$ en utilisant une couleur différente pour chaque tableau.



On notera $M_i(x_i; y_i)$ les points avant mesures,
et $N_i(x_i; y_i)$ les points après mesures.

2) D'après le graphique, les inégalités semblent-elles avoir été réduites ?

3) On note γ_1 l'indice de Gini correspondant aux valeurs avant mesures, et γ_2 l'indice de Gini correspondant aux valeurs après mesures. On note $\mathcal{P}_1$ l'aire du polygône $M_0M_1M_2M_3M_4B$.
Montrer que $\gamma_1 = 1 - 2 \times \mathcal{P}_1$.

4) Calculer γ_1 et γ_2 et conclure.

5) On peut approcher les nuages des points M_i et N_i respectivement par les fonctions :
$f : x \mapsto 3{,}84x^4 - 5{,}12x^3 + 2{,}48x^2 - 0{,}2x$
et $g : x \mapsto 1{,}07x^4 - 1{,}07x^3 + 0{,}73x^2 + 0{,}27x$, pour $x \in [0; 1]$.
Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$.

6) Calculer γ_1 et γ_2 en utilisant les résultats précédents.