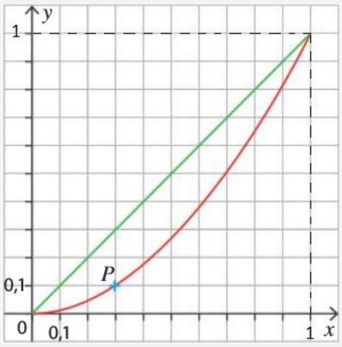
Courbe de Lorenz

THÈME 6
Pb1

Une **courbe de Lorenz** est une représentation graphique qui met en relation la part x des ménages les moins riches, et la proportion y du revenu total qu'ils perçoivent.

Une courbe de Lorenz est souvent modélisée par la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0; 1]$ telle que :

① $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$
② L est croissante et convexe sur $[0; 1]$
③ pour $x \in [0; 1], L(x) \leq x$



Par exemple, sur le graphique ci-contre,
on peut lire que les 30 % des ménages les moins riches ne perçoivent que 10 % de la masse totale des revenus. (point P)

Max Otto Lorenz (1876 – 1979) est un économiste américain. En 1905, il invente le concept de courbe de Lorenz pour décrire et représenter les inégalités de revenus.

Le tableau suivant donne le revenu disponible par ménage, en euro, selon la tranche de revenu en 2015 en métropole :

	A	B	C
1	**tranches (en décile)**	**limite supérieure de tranche (en euro)**	**revenu annuel moyen**
2	inférieur à D1	13630	10030
3	de D1 à D2	17470	15630
4	de D2 à D3	21120	19280
5	de D3 à D4	25390	23210
6	de D4 à D5	30040	27680
7	de D5 à D6	35060	32470
8	de D6 à D7	41290	38080
9	de D7 à D8	49350	45070
10	de D8 à D9	63210	55300
11	supérieur à D9	///	96240

[source : Insee ; DGFiP ; Cnaf ; Cnav ; CCMSA, enquête Revenus fiscaux et sociaux 2015]

Exemple de lecture du tableau :
En 2015, les 10 % de ménages dont le revenu est compris entre 17 470 € (D2) et 21 120 € (D3) ont un revenu annuel disponible moyen de 19 280 €.

Dans ce problème, on va représenter la distribution des revenus disponibles, puis on modélisera par une fonction continue le nuage de points obtenu.

PARTIE 1 Construction d'une courbe de Lorenz

1) Traduire par une phrase les données grisées :

	A	B	C
1	tranches (en décile)	limite supérieure de tranche (en euro)	revenu annuel moyen
2	inférieur à D1	13630	10030
3	de D1 à D2	17470	15630
4	de D2 à D3	21120	19280
5	de D3 à D4	25390	23210
6	de D4 à D5	30040	27680
7	de D5 à D6	35060	32470
8	de D6 à D7	41290	38080
9	de D7 à D8	49350	45070
10	de D8 à D9	63210	55300
11	supérieur à D9	///	96240

2) En 2015, la masse totale des revenus des 29 millions de ménages est 1 052 571 millions d'euros.

On rajoute deux colonnes au tableau précédent :

	A	B	C	D	E
1	tranches (en décile)	limite supérieure de tranche (en euro)	revenu annuel moyen	pourcentage de la masse totale des revenus	cumul du pourcentage de la masse totale des revenus
2	inférieur à D1	13630	10030		
3	de D1 à D2	17470	15630		
4	de D2 à D3	21120	19280		
5	de D3 à D4	25390	23210		
6	de D4 à D5	30040	27680		
7	de D5 à D6	35060	32470		
8	de D6 à D7	41290	38080		
9	de D7 à D8	49350	45070		
10	de D8 à D9	63210	55300		
11	supérieur à D9	///	96240		

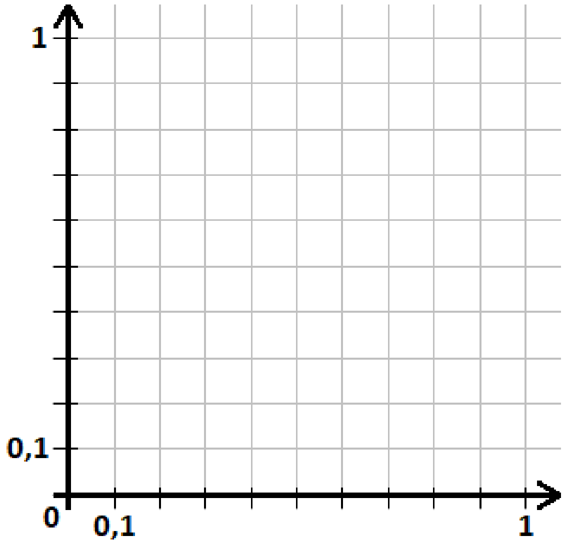
Quelle formule doit-on taper puis étendre dans la cellule D2 ?

Quelle formule doit-on taper dans la cellule E2 ? Quelle formule doit-on taper puis étendre dans la cellule E3 ?

3) Compléter le tableau suivant :

part x des ménages les moins riches	proportion y du revenu total qu'ils perçoivent
0	
0,1	
0,2	
0,3	
0,4	
0,5	
0,6	
0,7	
0,8	
0,9	
1	

4) Dans le repère orthonormé suivant, placer les points de coordonnées $(x;y)$:

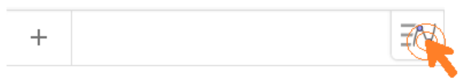


On suppose que la répartition des revenus entre deux déciles est régulière.
Relier les points par des segments.
La courbe obtenue est appelée **courbe de Lorenz**, et représente la distribution des revenus disponibles.

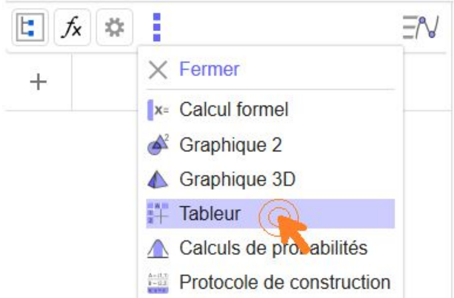
5) Tracer la droite d'équation $y = x$.
Dans ce contexte, quelle interprétation peut-on faire de cette droite, et de l'éloignement de la courbe de Lorenz par rapport à cette droite ?

PARTIE 2 Modélisation par la courbe représentative d'une fonction

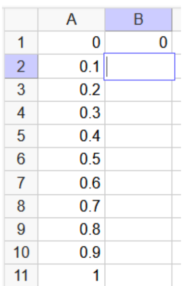
1) Aller sur le lien suivant : https://www.geogebra.org/classic

① 

② 

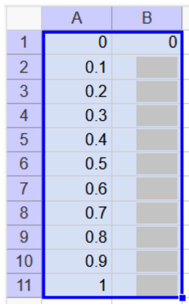
③ 

④ Rentrer les données PARTIE 1 question 3) dans le tableur :

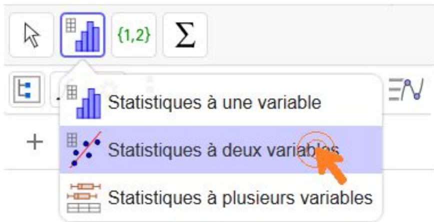


	A	B
1	0	0
2	0.1	
3	0.2	
4	0.3	
5	0.4	
6	0.5	
7	0.6	
8	0.7	
9	0.8	
10	0.9	
11	1	

⑤ Sélectionner les données :



	A	B
1	0	0
2	0.1	
3	0.2	
4	0.3	
5	0.4	
6	0.5	
7	0.6	
8	0.7	
9	0.8	
10	0.9	
11	1	

⑥ 

⑦ Dans « modèle d'ajustement », choisir « polynôme ».
On note f la fonction polynômiale trouvée.

2) Montrer que f vérifie bien les conditions ①, ② et ③ données en introduction.