Algorithme de Briggs

THÈME 4
Pb1

À la fin du 16ème siècle, du fait du développement de l'astronomie et de la navigation, pour simplifier des calculs longs, fastidieux et soumis à des erreurs d'arrondis, les mathématiciens cherchèrent à trouver une méthode permettant de remplacer des produits par des sommes. Cela revenait, en termes actuels, à trouver une fonction f vérifiant, pour tous réels a et b strictement positifs :

$$f(a \times b) = f(a) + f(b)$$

En 1614, l'écossais John Neper publie dans *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* des tables de correspondances entre deux séries de nombres : à un produit dans une colonne correspond une somme dans une autre colonne.

Les logarithmes, qui signifient « nombres de raison » (du grec *logos* et *arithmos*), c'est-à-dire « nombres en progression arithmétique », sont nés. Mais les calculs ne sont pas aisés. En particulier, le logarithme de 1 n'est pas égal à 0.

Après de longs échanges avec lui, l'anglais Henry Briggs améliore le procédé et publie dans Arithmetica logarithmica en 1624 les premières tables de logarithmes, que nous appelons aujourd'hui « logarithmes décimaux ». Il fixe ainsi le logarithme de 1 comme égal à 0 et celui de 10 égal à 1.

[source : Déclic p.120]

« Arithmetica logarithmica » Tables de logarithmes de H. Briggs, 1624.

Remarque : La fonction log est définie sur $]0;+\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Dans ce problème, on construira l'algorithme de Briggs en Python, puis on vérifiera les résultats annoncés par Briggs.

On sait que :

① $\log(1) = 0$

② $\log(10) = 1$

③ $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$

D'autre part, on suppose que la fonction log existe et qu'elle est croissante sur $]0;+\infty[$.

PARTIE 1 Propriétés du logarithme

On suppose que a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

1) En utilisant la relation ③, montrer que :

$$\log(\sqrt{ab}) = \frac{\log(a) + \log(b)}{2}$$

2) Déduire des relations ① et ② que $\log(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$.

Déterminer de même $\log\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right)$.

3) Montrer que $a < \sqrt{ab} < b$.

4) Justifier que pour tout $x \in [a;b]$:

- Si $x \leq \sqrt{ab}$, alors $\log(a) \leq \log(x) \leq \dfrac{\log(a) + \log(b)}{2}$
- Sinon, $\dfrac{\log(a) + \log(b)}{2} \leq \log(x) \leq \log(b)$

PARTIE 2 Élaboration de l'algorithme de Briggs

1) Exemple « à la main »

On cherche par exemple une approximation de $\log(5)$.

On pose $a = 1$ et $b = 10$.

● On a : $a < 5 < b$

$1 < 5 < 10$

Et on a supposé que log est une fonction croissante, donc :

$$\log(1) < \log(5) < \log(10)$$
$$0 < \log(5) < 1$$

On a alors un premier encadrement d'amplitude 1 de $\log(5)$.

● $\sqrt{ab} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$

On a : $\sqrt{ab} < 5 < b$

Donc $\log(\sqrt{ab}) < \log(5) < \log(b)$

Donc $\frac{1}{2}(\log(a) + \log(b)) < \log(5) < \log(b)$

Donc $\frac{1}{2}(\log(1) + \log(10)) < \log(5) < \log(10)$

Donc $0{,}5 < \log(5) < 1$

On a alors un deuxième encadrement d'amplitude 0,5 de $\log(5)$.

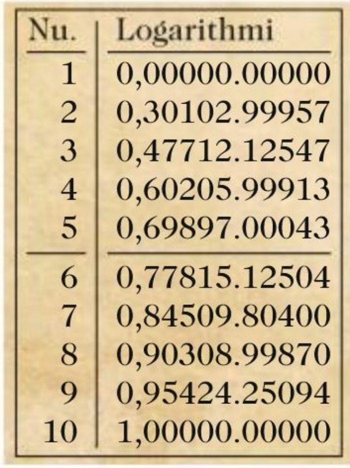
On pose $a = \sqrt{ab} = \sqrt{10}$ et $b = 1$ et on réitère le processus.

Compléter le tableau suivant :

$\sqrt{ab}$	a	b	$\log(a)$	$\log(b)$

2) Compléter l'algorithme suivant en langage pseudo-naturel :

```
fonction logarithme(x)
    a ← 1
    b ← 10
    loga ← 0
    logb ← 1
    tant que x − a < 10^(−5) faire
        si x ≤ √(ab) alors
            b ← ____
            logb ← ____________
        sinon
            a ← ____
            loga ← ____________
        fin si
    fin tant que
    afficher loga
fin fonction
```



Nu.	Logarithmi
1	0,00000.00000
2	0,30102.99957
3	0,47712.12547
4	0,60205.99913
5	0,69897.00043
6	0,77815.12504
7	0,84509.80400
8	0,90308.99870
9	0,95424.25094
10	1,00000.00000

3) Écrire cet algorithme en langage Python.

4) Utiliser ce programme pour compléter le tableau suivant, et comparer ces nombres avec ceux donnés par la calculatrice :

x	log (x) avec l'algorithme de Briggs	log (x) avec la calculatrice	pourcentage d'erreur
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			