

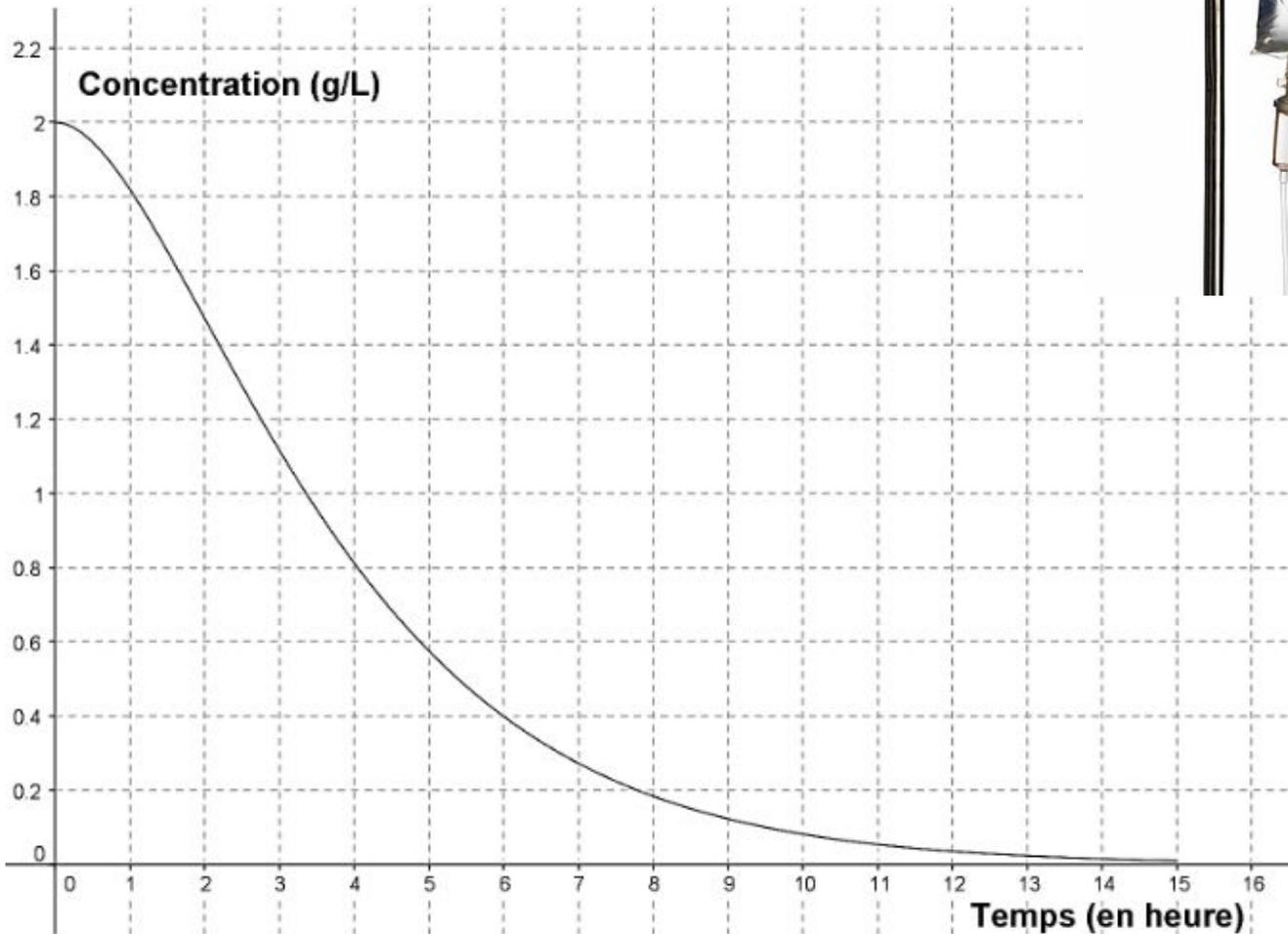
Concentration d'un médicament dans le sang ②

[D'après Bac ES 2014 Métropole]

Prérequis :
TH1 Pb1

THÈME 1
Pb2

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.



PARTIE 1 Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

- 1) la concentration à l'instant initial ;
- 2) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 grammes par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

PARTIE 2 Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par : $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litres, du médicament dans le sang.

- 1) Montrer que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 15]$.
- 2) Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 15]$.
- 3) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,1$.

On va maintenant rechercher un éventuel point d'inflexion de la courbe.

4)a) Aller sur le lien suivant : <https://www.geogebra.org/classic>

Dans la zone de saisie, on calcule $f''(x)$:

| | | | |
|---------------|----------------------------------|--|---|
| ① | + | Saisie... | |
| ② | + | $f(x) := (x + 2) \cdot \exp(-0.5x)$ | ⋮ |
| ENTRER | | | |
| ③ | <input checked="" type="radio"/> | $f(x) = (x + 2) e^{-0.5x}$ | |
| | + | Saisie... | |
| ④ | <input checked="" type="radio"/> | $f(x) = (x + 2) e^{-0.5x}$ | |
| | | Dérivée(Dérivée(f(x))) | ⋮ |
| ENTRER | | | |
| ⑤ | <input checked="" type="radio"/> | $f(x) = (x + 2) e^{-0.5x}$ | |
| | <input checked="" type="radio"/> | $g(x) = \text{Dérivée}(\text{Dérivée}(f(x)))$ | ⋮ |
| | | $\rightarrow \frac{1}{4} (-2 e^{-\frac{1}{2}x} + x e^{-\frac{1}{2}x})$ | |
| | + | Saisie... | |
| ⑥ | <input checked="" type="radio"/> | $f(x) = (x + 2) e^{-0.5x}$ | |
| | <input checked="" type="radio"/> | $g(x) = \text{Dérivée}(\text{Dérivée}(f(x)))$ | ⋮ |
| | | $\rightarrow \frac{1}{4} (-2 e^{-\frac{1}{2}x} + x e^{-\frac{1}{2}x})$ | |
| | + | Factoriser(g(x)) | ⋮ |
| ENTRER | | | |

Que donne le logiciel de calcul formel ?

4)b) Retrouver ce résultat par le calcul.

4)c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

PARTIE 3 Interprétation des résultats

1)a) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

1)b) En s'aidant du programme sous Python créé dans le THÈME 1 Pb1, écrire un programme sous Python répondant à cette question.

2) Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?