Construction du nombre par John Conway
4. L'écho des kos de go

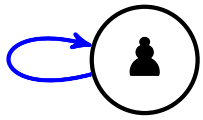
Alain Busser
IREMI 974

18 avril 2022

4.1 Jeux infiniment grands

4.1.1 Les nombres ordinaux

Le jeu ci-dessous contient tous les nombres ordinaux, aussi Conway l'appelle-t-il *on* (comme « **o**rdinal **n**umbers ») :



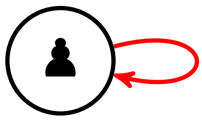
En effet, comme même si on oblige Bleu à avancer un million de fois le pion avant de commencer le jeu, on a exactement le même jeu, cela signifie que *on* est supérieur à un million. En fait *on* est supérieur à tous les ordinaux, même infinis.

On rappelle que dans le jeu *on* ci-dessus, Rouge ne peut pas bouger du tout alors que Bleu peut jouer aussi longtemps qu'il le veut.

Comme *on* est supérieur à tous les nombres, *on* est positif.

4.1.2 L'opposé de on

On obtient l'opposé d'un jeu en intervertissant les rôles de Rouge et Bleu. Le jeu ci-dessous, où Bleu ne peut pas jouer alors que Rouge peut jouer aussi souvent qu'elle veut, est donc l'opposé de *on* :

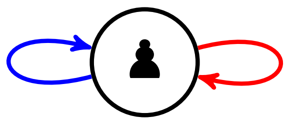


Conway décide d'appeler *off* l'opposé de *on*. Le jeu *off* est donc négatif, et même inférieur à tous les nombres, même infinis.

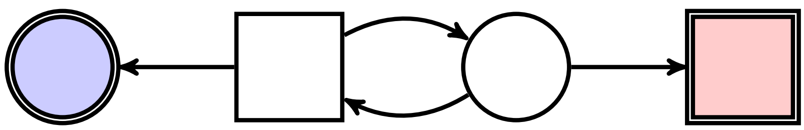
Comme *on* et *off* sont opposés, on peut imaginer que leur somme est égale à zéro (le jeu nul). En fait il n'en est rien :

4.1.3 Un premier ko

Le jeu ci-dessous est $on + off = dud$:



Le nom de *dud* est une abréviation de **d**eathless **u**niversal **d**raw qu'on pourrait traduire en français par « partie nulle universelle et immortelle » soit l'archétype du ko. En version « jeu à deux joueurs » cela donne :

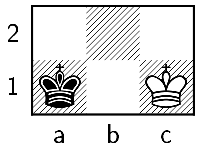


dud a la propriété qu'en lui additionnant n'importe quel jeu, la somme est encore *dud*. Il est infini mais ni positif, ni négatif.

Par exemple $dud + on = dud$:

$dud + dud = dud$:

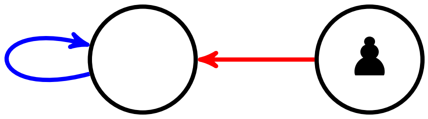
Voici une incarnation de *dud* sur un échiquier :



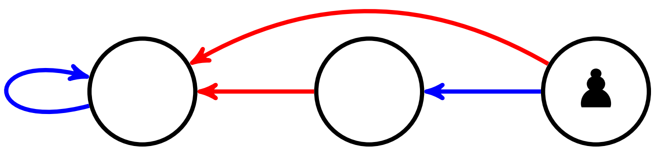
4.1.4 Entiers naturels

Voici les entiers naturels définis à partir de *on*.

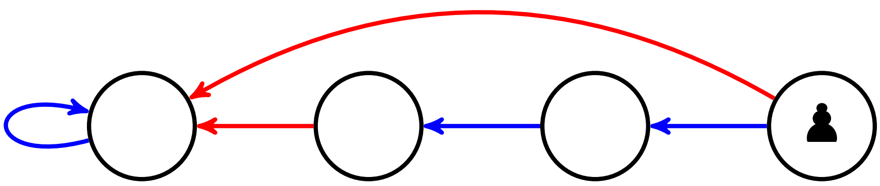
zéro



un



deux

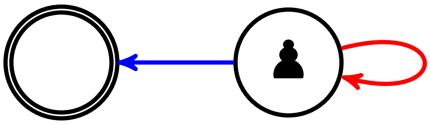


4.2 Jeux infiniment petits

4.2.1 over et under

over

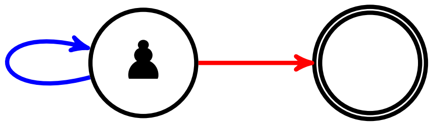
Ce jeu est d'une certaine manière l'inverse multiplicatif de *on* :



Ce jeu est appelé *over* par Conway. Il est positif mais infinitésimal. Il est plus grand que $\uparrow$, que $\uparrow\uparrow$, que $\uparrow\uparrow\uparrow$, que $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ etc.

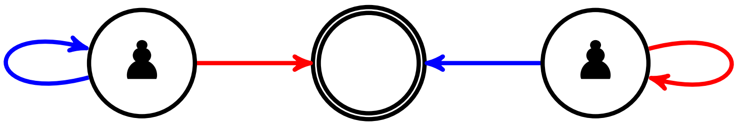
under

Le jeu *under* est l'opposé de *over* :



Le jeu *under* est négatif (c'est Rouge qui gagne) mais infinitésimal. Il est plus petit que $\downarrow$, $\downarrow\downarrow$ etc.

Que *over* et *under* sont opposés ne signifie pas que leur somme est nulle (ce qui voudrait dire que dans $over + under$ le premier qui joue perd le jeu). En effet si Rouge et Bleu jouent au mieux à $over + under$:



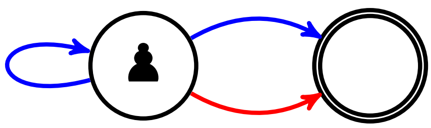
On voit bien qu'au des deux joueurs n'a intérêt à mener un des pions à l'arrivée car alors l'autre joueur gagnerait en faisant pareil. Donc les joueurs font indéfiniment passer un pion sur une boucle. Pour autant $over + under$ n'est pas égal à *dud* non plus. Par contre la somme de *over* et d'un infinitésimal positif (ou d'un nimber) est *over*.

4.2.2 upon

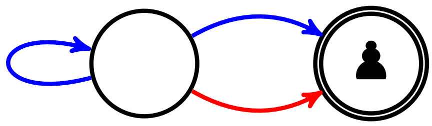
On rappelle que $\uparrow$, même s'il est plus grand que beaucoup de nombres positifs infinitésimaux, est un infinitésimal. Par conséquent, $\uparrow^2$ est infiniment plus petit que $\uparrow$, $\uparrow^3$ est encore plus petit etc. Que dire alors de $\uparrow^{on}$?

upon*

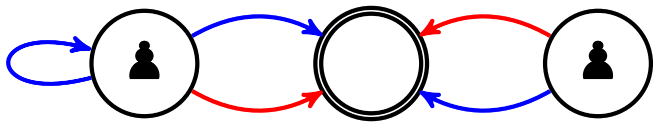
Ce jeu est la somme de l'étoile et d'un jeu baptisé *upon* :



Si c'est à Bleu de jouer, il gagne, et si c'est à Rouge de jouer, elle gagne, en menant le pion à l'arrivée :



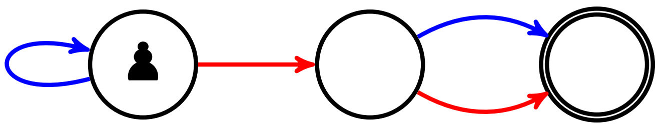
Ce jeu ressemble donc beaucoup à l'étoile, mais ce n'est pas l'étoile. En effet $* + * = 0$ mais la somme du jeu ci-dessus et de l'étoile :



n'est pas zéro : si c'est à Rouge de jouer, elle perd en amenant un des pions à l'arrivée (Bleu amène l'autre pion à l'arrivée juste après, pour gagner). Mais si c'est à Bleu de jouer, il joue le pion de gauche en lui faisant parcourir une boucle, et gagne. Ce jeu est donc positif, c'est celui que Conway appelle *upon*.

upon

Voici le jeu *upon* :



Son nom vient du fait que
- $upon > \upharpoonleft$
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2$
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2 + \upharpoonleft^3$
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2 + \upharpoonleft^3 + \upharpoonleft^4$
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2 + \upharpoonleft^3 + \upharpoonleft^4 + \upharpoonleft^5$
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2 + \upharpoonleft^3 + \upharpoonleft^4 + \upharpoonleft^5 + \upharpoonleft^6$
- etc
- $upon > \upharpoonleft + \upharpoonleft^2 + \upharpoonleft^3 + \upharpoonleft^4 + \upharpoonleft^5 + \upharpoonleft^6 + ... + \upharpoonleft^{on}$

Mais pourtant la limite n'est pas atteinte puisque $upon < \upharpoonleft\upharpoonleft$.

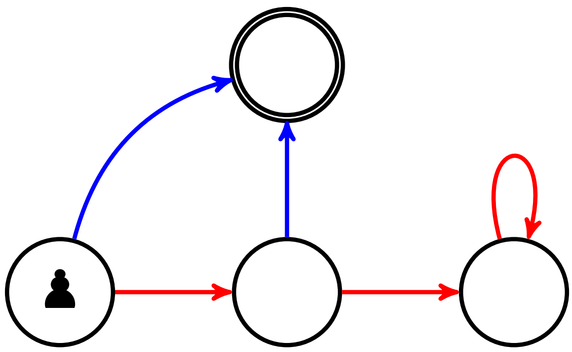
4.3 Tiny et miny

Jusqu'ici, on avait réservé le nom de *tiny* au jeu que Conway notait $+_1$ et on a vu qu'il y avait d'autres jeux très petits (d'autres *tiny*). En fait plus n est grand, et plus $+_n$ est petit. Le jeu que Conway nommait *tiny* (sans indice) est en fait $+_{on}$. Comme *on* est plus grand que tous les autres ordinaux, *tiny* est
- strictement positif
- strictement inférieur à tous les jeux strictement positifs.

C'est la plus petite valeur (positive) possible.

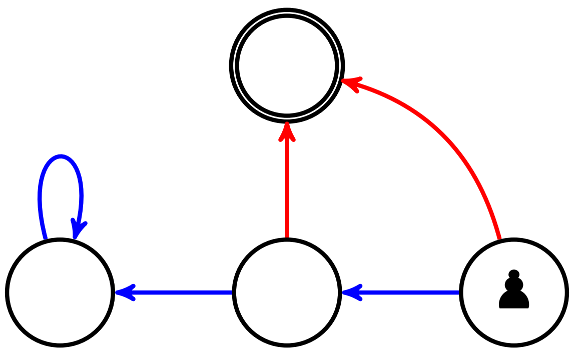
4.3.1 tiny

Voici ce jeu extraordinaire :



4.3.2 miny

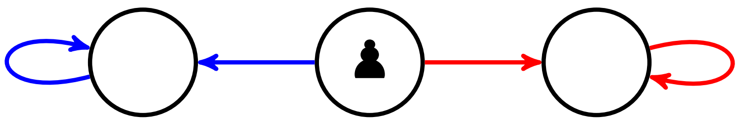
Bien entendu, l'opposé de *tiny*, appelé *miny*, est de façon analogue le plus grand des jeux négatifs :



4.3.3 hot, ono et oof

Conway ne s'arrête pas là. Il y a des jeux infiniment grands appelés respectivement *hot*, *ono* et *oof*.

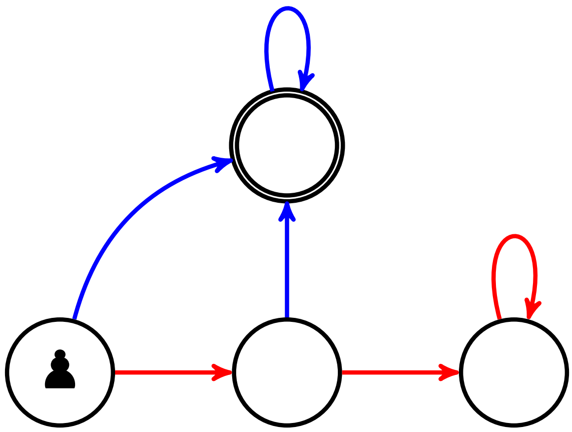
hot



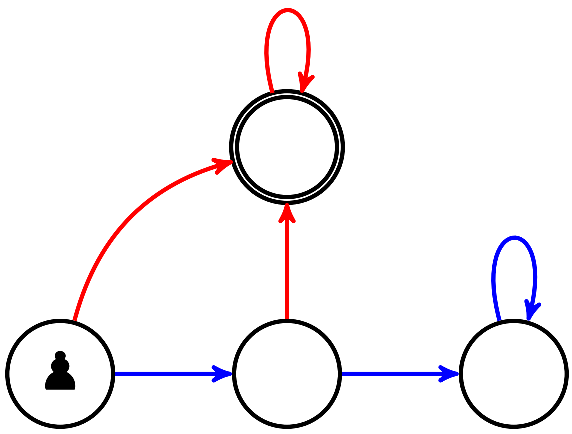
Le jeu *hot* peut être considéré comme la moitié de *dud* puisque $hot + hot = dud$.

hi et lo

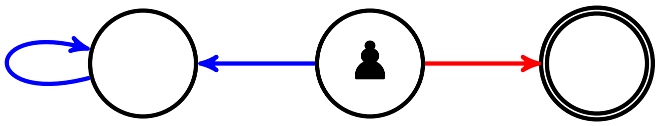
Conway introduit aussi ces jeux :
Le jeu *hi* :



Le jeu *lo* est l'opposé de *hi* :



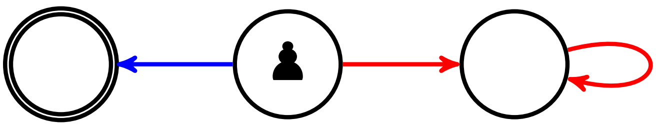
ono



Le jeu *ono* peut être considéré comme la moitié de *on* puisque $ono + ono = on$.

4.3.4 oof

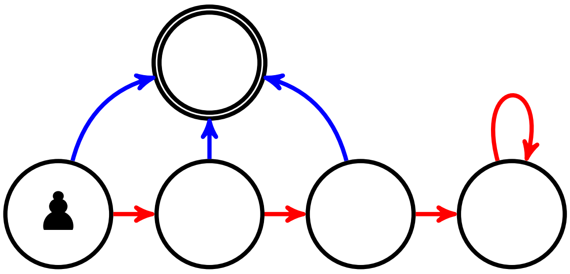
Le jeu *oof* (la moitié de *off*) est l'opposé de *ono* :



4.4 Cartes

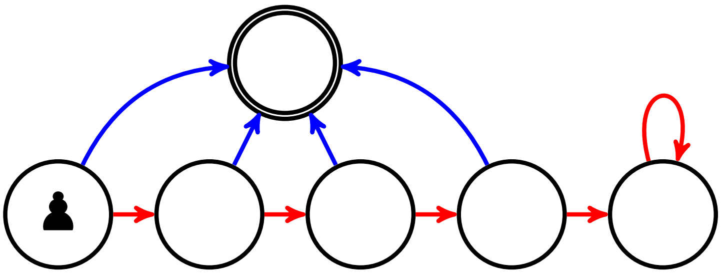
La suite démarrée par les jeux *off*, *oof* et *tiny* continue par cette suite de cartes :

1. As (*ace* en anglais) :



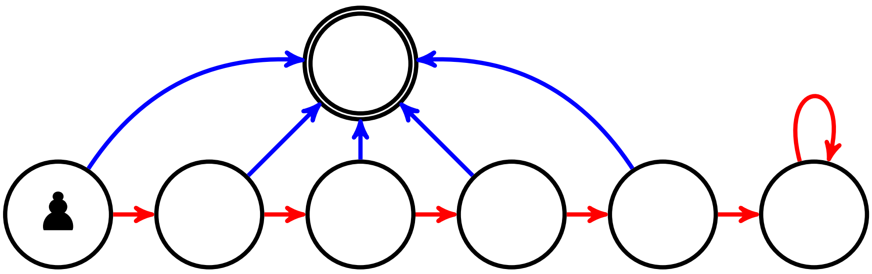
Le poids atomique de ce jeu est 1.

2. Deux (*deuce* en anglais) :



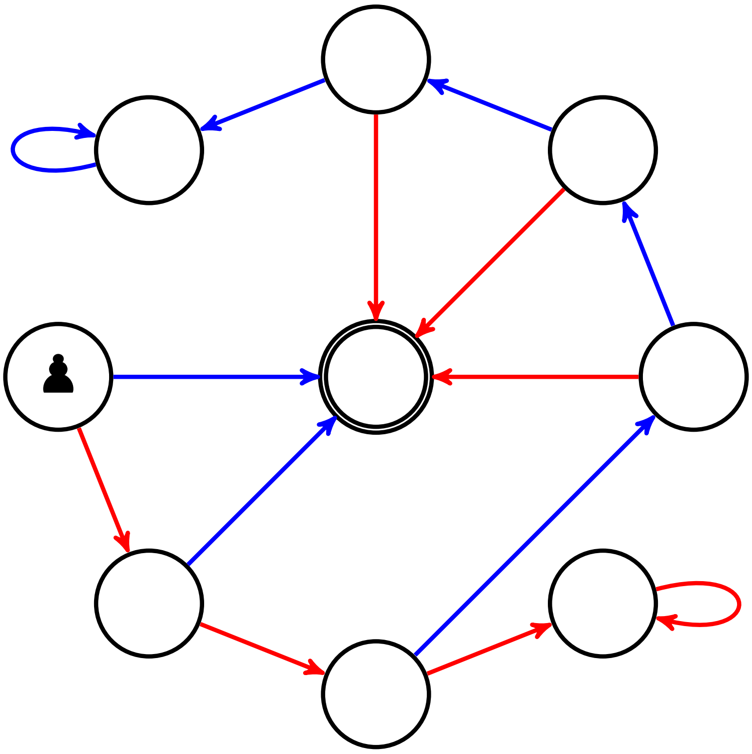
Le poids atomique de ce jeu est 2. D'ailleurs $ace + ace = deuce$.

3. Trois (*trey* en anglais) :



Le poids atomique de ce jeu est 3. D'ailleurs $deuce + ace = trey$.

L'étude de ces jeux de poids atomique entier fait intervenir un autre jeu, que Conway baptise *joker* :



Ce jeu est strictement positif et strictement inférieur à *ace*.