Construction du nombre par John Conway
3. Physique de l'infiniment petit

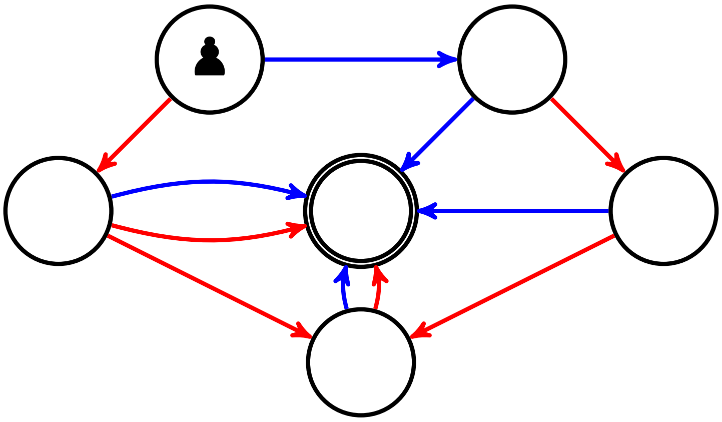
Alain Busser
IREMI 974

18 avril 2022

3.1 Infinitésimalement infinitésimaux

3.1.1 Fractions de $\uparrow$

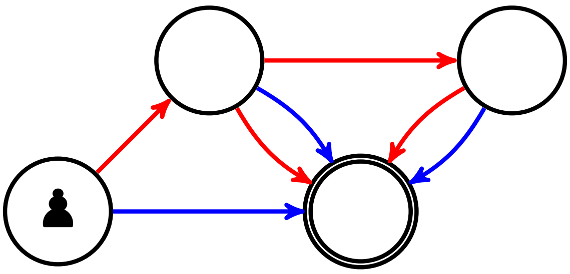
On a vu que $\uparrow$ est à la fois positif et inférieur à toutes les fractions positives : c'est un *infinitésimal*. En fait il est plus petit que $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ qui est lui aussi plus petit que toutes les fractions positives. On connaît donc des infinitésimaux plus grands que $\uparrow$. En voici un qui est positif mais plus petit que $\uparrow$:



Ce jeu est positif (on voit que Bleu a une stratégie gagnante) mais inférieur à $\uparrow$ (en ajoutant $\downarrow$ à ce jeu c'est Rouge qui a une stratégie gagnante). En plus, en additionnant le jeu ci-dessus avec lui-même, on obtient $\uparrow$. il est donc naturel de noter $\frac{1}{2}\times\uparrow$ ou $\frac{\uparrow}{2}$ le jeu ci-dessus.

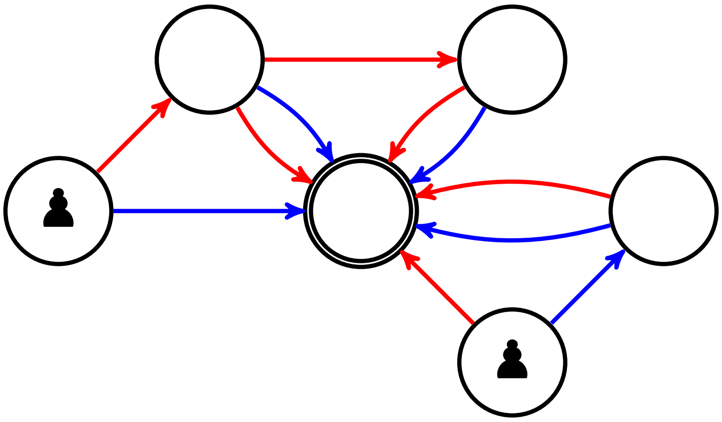
3.1.2 Puissances de $\uparrow$

Et voici un jeu qui est *infiniment* plus petit que $\uparrow$:

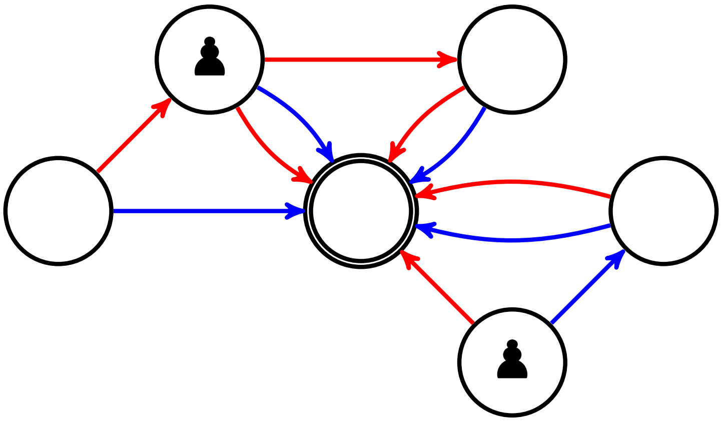


Ce jeu est positif : si Bleu joue, il gagne immédiatement en menant le pion à l'arrivée, si Rouge joue, Bleu gagne au coup d'après. Mais le jeu est plus petit que $\uparrow$. Conway le note donc $\uparrow^2$.

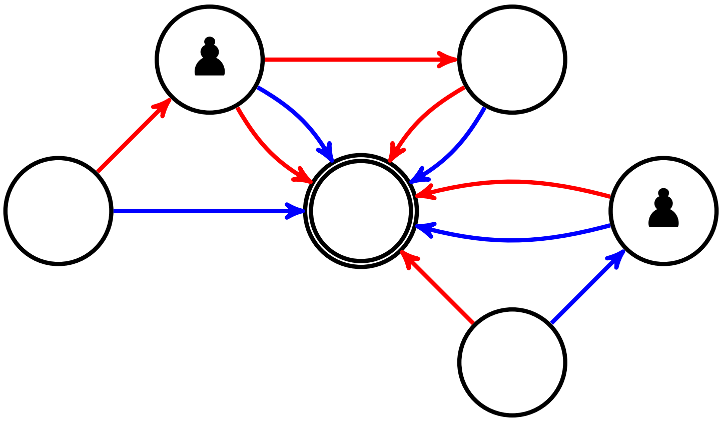
Que $\uparrow^2$ est plus petit que $\uparrow$, signifie qu'en ajoutant à $\uparrow^2$ (qui est positif) le jeu $\downarrow$ (qui est infinitésimal négatif) on obtient un jeu négatif :



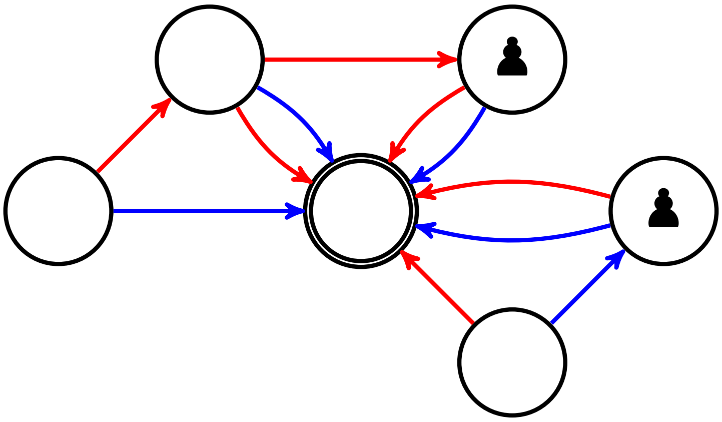
Par exemple si Rouge joue en premier elle a intérêt à jouer



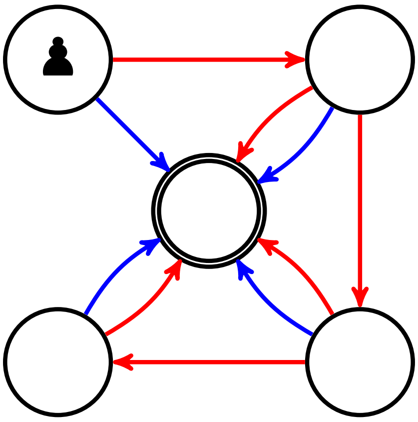
ce après quoi Bleu ne peut faire que



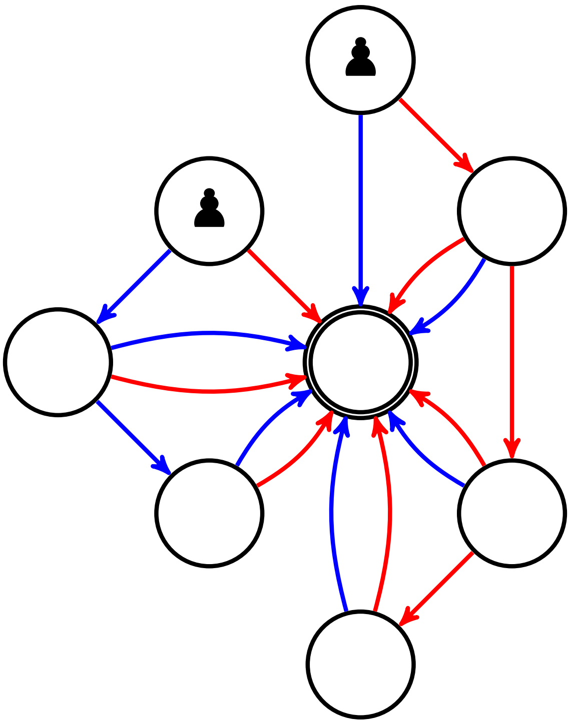
et Rouge peut encore gagner en faisant



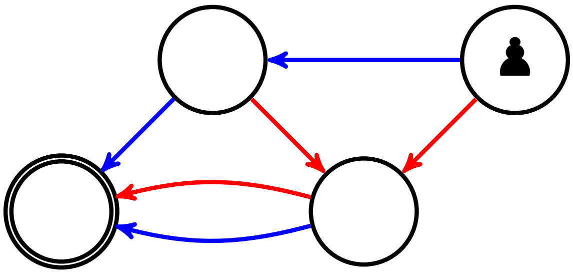
Le jeu $\uparrow^2$ est donc extrêmement petit (infiniment petit par rapport à $\uparrow$ qui est lui-même infiniment petit). Mais l'histoire ne s'arrête pas là : voici un jeu positif qui est infiniment plus petit que $\uparrow^2$:



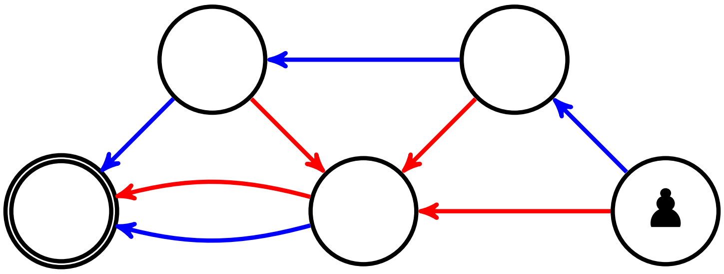
Conway note $\uparrow^3$ ce jeu. Pour vérifier que $\uparrow^3$ est plus petit que $\uparrow^2$, on peut vérifier que $\uparrow^3 + \downarrow^2$ est négatif (à l'avantage de Rouge). Voici cette somme :



L'addition permet, à partir de jeux infinitésimaux, de construire d'autres jeux infinitésimaux. Par exemple, comme $\uparrow^2$ est positif, $\uparrow + \uparrow^2$ est plus grand que $\uparrow$ (donc positif) tout en étant infinitésimal. Par exemple il est plus petit que $\uparrow\uparrow$. On note $\uparrow^{[2]}$ ce jeu :



L'histoire continue : $\uparrow + \uparrow^2 + \uparrow^3$, noté $\uparrow^{[3]}$, est plus grand que $\uparrow^{[2]}$ et plus petit que $\uparrow\uparrow$:

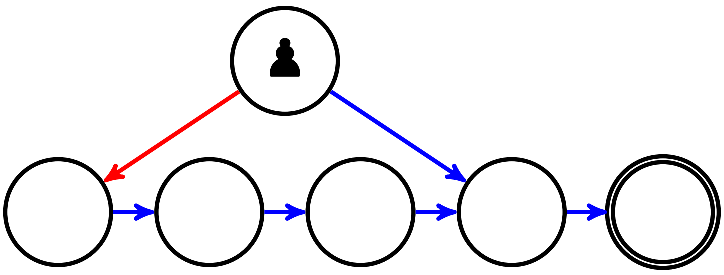


Conway a découvert, dans des vrais jeux, des infinitésimaux positifs mais plus petits que $\uparrow$, $\uparrow^2$, $\uparrow^3$, $\uparrow^4$ etc. Pour les construire, il utilise de nouveaux jeux qui ne sont pas des nombres : les interrupteurs.

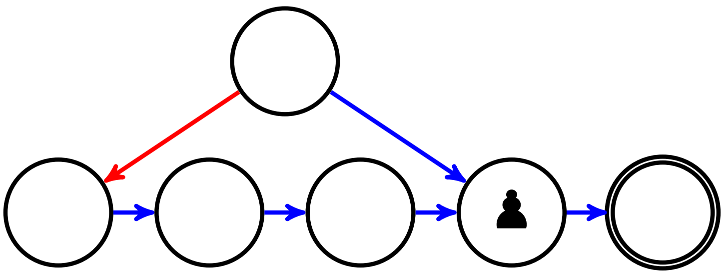
3.2 Les interrupteurs de Conway

3.2.1 Interrupteurs

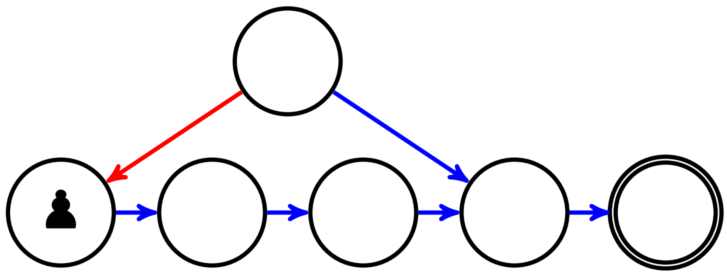
On rappelle que ce jeu est un nombre (égal à 2) :



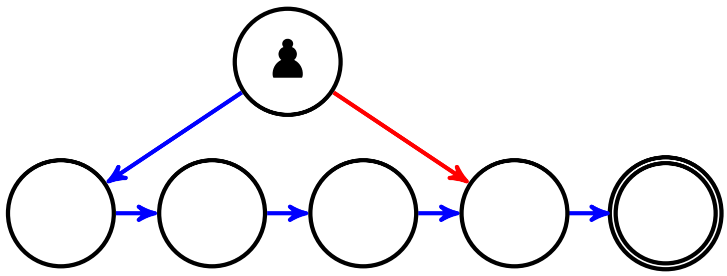
En effet, si Bleu joue, il arrive au nombre 1 :



Alors que si Rouge joue, elle arrive au nombre 4 :



Le nombre 2 est le nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 1 et plus petit que 4. La raison essentielle pour laquelle le jeu ci-dessus est un nombre, c'est donc que 1 est plus petit que 4. Si les deux joueurs arrivent au même nombre, on a vu que le jeu est la somme de ce nombre et de l'étoile. Mais si le nombre auquel arrive Bleu est plus grand que celui auquel arrive Rouge, comme ici :



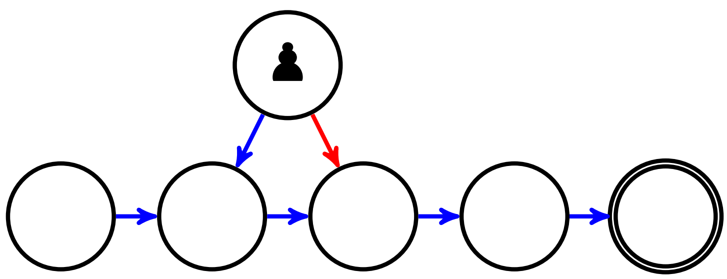
alors le jeu n'est pas un nombre : c'est un *interrupteur*. L'interrupteur ci-dessus est

- plus petit que tous les nombres dépassant 4,
- plus grand que tous les nombres inférieurs à 1,
- et impossible à comparer avec les nombres compris entre 1 et 4.

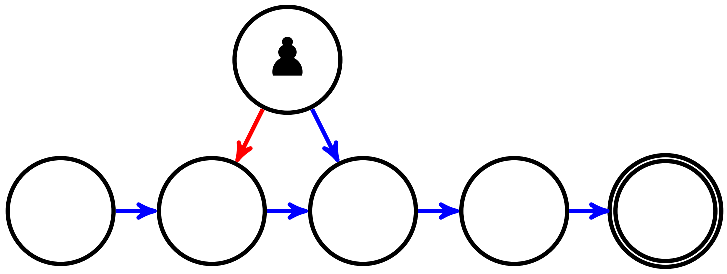
Pour réduire l'incertitude sur la grandeur de ce jeu, Conway introduit la notion de température. Pour connaître la température du jeu ci-dessus, on le refroidit jusqu'à ce qu'il gèle (qu'il devienne un nombre, appelé *moyenne de l'interrupteur*) et on regarde de combien on a refroidi l'interrupteur.

3.2.2 Refroidissement

En refroidissant l'interrupteur ci-dessus de 1 degré, on a ce nouvel interrupteur :



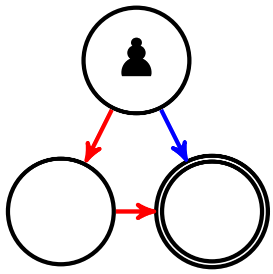
Et si on le refroidit encore de 1 degré, on a un nombre :



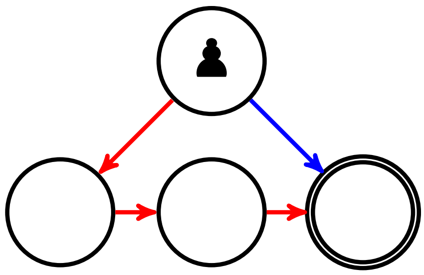
Le nombre est 2,5 (nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 2 et plus petit que 3) donc la moyenne de l'interrupteur de départ est 2,5. Mais il n'était pas nécessaire de le refroidir d'autant que 2 degrés, car au bout de 1,5 degrés il était déjà devenu le nombre 2,5. La température de l'interrupteur est donc seulement 1,5 degrés, pas 2 degrés. Conway note donc $2,5 \pm 1,5$ cet interrupteur.

Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement à des interrupteurs dont la borne la plus petite est un entier négatif et la borne la plus grande est zéro, comme $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$, -1 ± 1, $-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}$ etc. Leur moyenne est opposée à leur température qui est la moitié d'un entier.

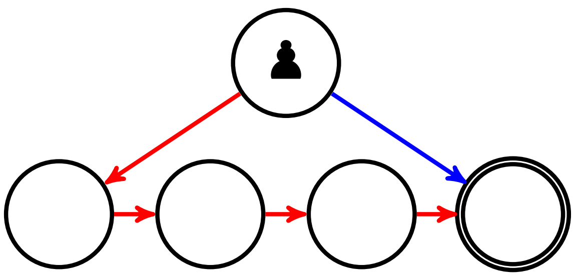
Les voici :



l'interrupteur $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$



l'interrupteur -1 ± 1

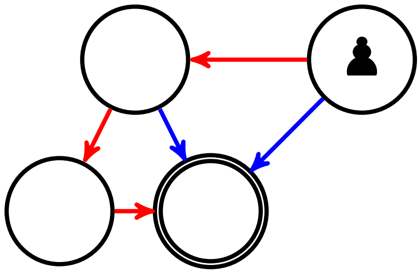


l'interrupteur $-\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}$

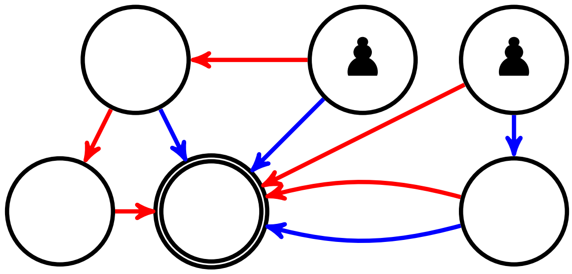
Ces intervalles servent à construire des jeux positifs et plus petits que toute puissance de $\uparrow$.

3.2.3 Le jeu Tiny

Dans ce jeu, si Bleu joue, il arrive à la position 0 et gagne, alors que si Rouge joue, elle arrive à l'interrupteur $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ ce qui permet à Bleu de gagner :



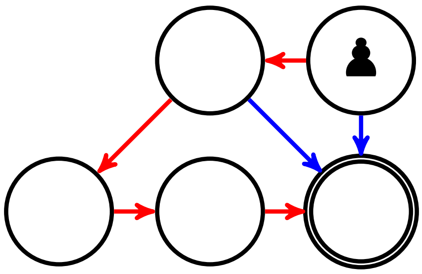
Le jeu (noté $+_1$ et appelé *tiny*) est donc positif. Mais de peu puisque par exemple il suffit de lui ajouter un infiniment petit négatif comme par exemple $\downarrow$



pour que la somme soit à l'avantage de Rouge, donc négative. Ce qui signifie que $+_1$ est plus petit que $\uparrow$. En fait on peut vérifier de façon similaire qu'il est aussi plus petit que $\uparrow^2$, que $\uparrow^3$ etc. C'est le plus petit jeu positif vu jusqu'à présent. Mais Conway en construit d'autres, encore plus petits.

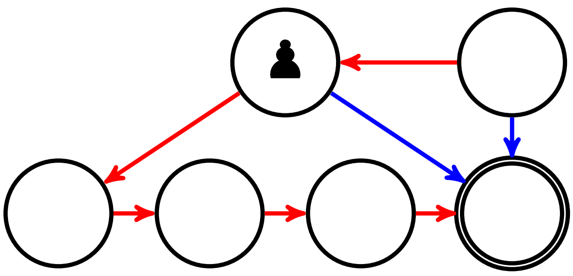
3.2.4 Encore plus petit que $+_1$

Le jeu où Bleu a l'option 0 alors que Rouge a l'option -1 ± 1 est lui aussi positif :

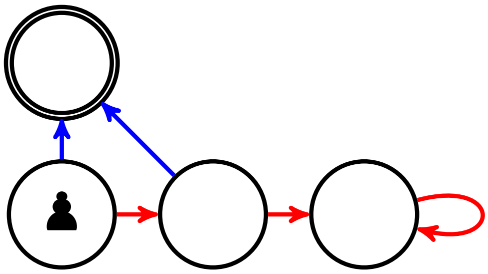


On vérifie que ce jeu (noté $+_2$) est non seulement plus petit que $\uparrow$, $\uparrow^2$ etc mais même que $+_1$. Et même, une somme de plusieurs copies de $+_2$ est plus petite que $+_1$. $+_2$ est infiniment plus petit que $+_1$. Et la série continue, avec $+_3$ qui est positif mais (infiniment) plus petit que $+_2$.

Voici $+_3$:

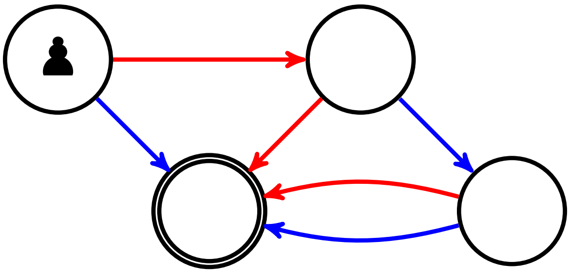


Bien entendu, $+_{1000}$ est beaucoup plus petit encore (tout en étant positif). En fait on peut définir quelque chose comme $+_\infty$:

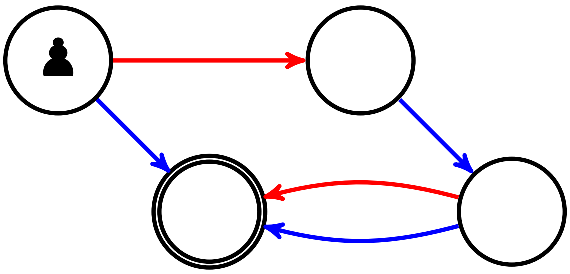


Le jeu ci-dessus, noté $+$ (sans indice) est le plus petit nombre positif, c'est-à-dire qu'il est inférieur à tous les multiples, sous-multiples et puissances de $\uparrow$ mais aussi à tous les $+_n$ où n est un nombre éventuellement infini...

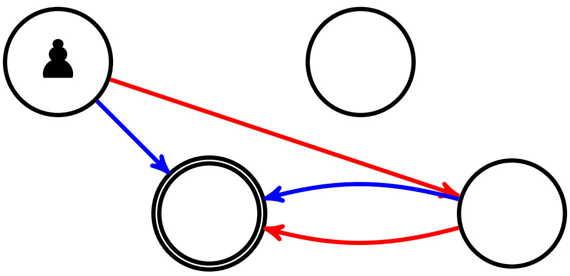
Si le nombre n est grand, le jeu $+_n$ est petit. Si n est petit, le jeu $+_n$ est grand. En revanche, il est possible que pour n infinitésimal, $+_n$ soit égal à n. La seule solution positive de cette équation est $\uparrow$. Voici la construction de $+_\uparrow$:



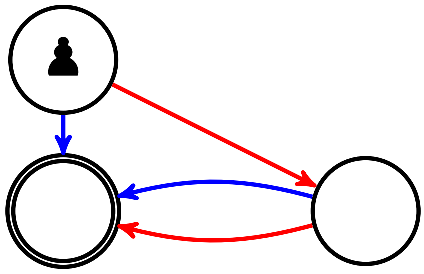
Ce jeu peut être simplifié. Si Rouge joue l'arc rouge du haut, l'arc suivant ne sert à rien puisque c'est alors à Bleu de jouer :



Et comme Bleu n'a alors qu'un seul choix, on peut y aller directement :



En enlevant le sommet devenu inutile (puisque jamais visité), on reconnaît le jeu $\uparrow$:



Donc $+_{\uparrow} = \uparrow$.

Le jeu $+_1$ a un opposé (obtenu en inversant les couleurs rouge et bleue), noté $-_1$ et appelé *miny*, et qui est à la fois négatif et plus grand que $\downarrow$, $\downarrow^2$ etc.

3.3 Poids atomique

3.3.1 particules hautes et basses

Conway associe à chaque infinitésimal un nombre appelé son *poids atomique*. Cela permet de construire les nombres car le poids atomique d'une somme d'infinitésimaux est la somme des poids atomiques des termes de la somme, et plus un infinitésimal est grand, plus son poids atomique est grand.

Le poids atomique de $\uparrow$ est 1, le poids atomique de $\uparrow\uparrow$ est 2, le poids atomique de $\uparrow\uparrow\uparrow$ est 3 etc.

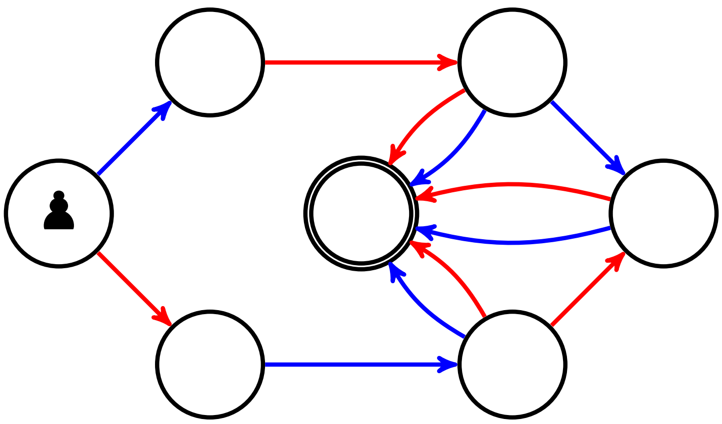
Le poids atomique de $\downarrow$ est -1, le poids atomique de $\downarrow\downarrow$ est -2 etc.

Le poids atomique du jeu appelé $\frac{1}{2}\times\uparrow$ (présenté dans la section sur les infinitésimalement infinitésimaux) est $\frac{1}{2}$ comme on s'en doutait. Un poids atomique n'est donc pas nécessairement entier.

Les poids atomiques de $\uparrow^2$, $\uparrow^{[2]}$, $+_1$, $+_2$ etc sont égaux à 0. Il en est de même pour les nombres de Nim comme l'étoile.

3.3.2 Interrupteurs infinitésimaux

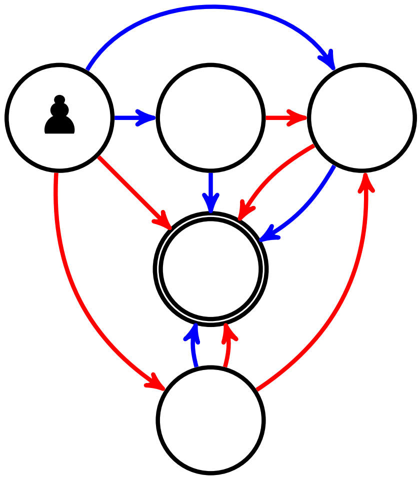
Le poids atomique d'un infinitésimal n'est pas forcément entier (on a vu que celui de $\frac{1}{2}\times\uparrow$ est $\frac{1}{2}$) mais en fait le poids atomique n'est même pas forcément un nombre ! Voici un jeu dont le poids atomique est l'étoile :



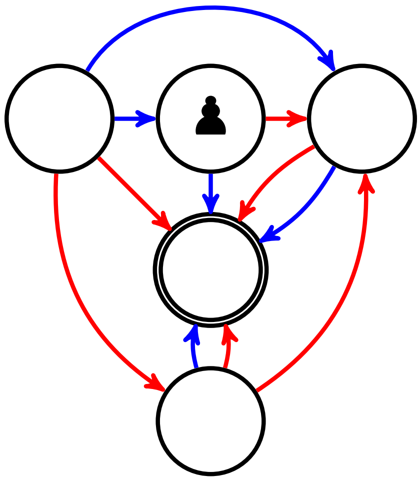
Ce jeu est un interrupteur infinitésimal (donc de moyenne et de température nulles) : il s'agit de $\pm\uparrow\uparrow$.

3.3.3 La moitié d'une étoile

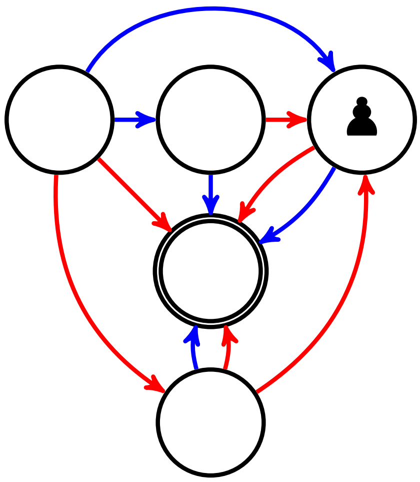
On s'intéresse à ce jeu :



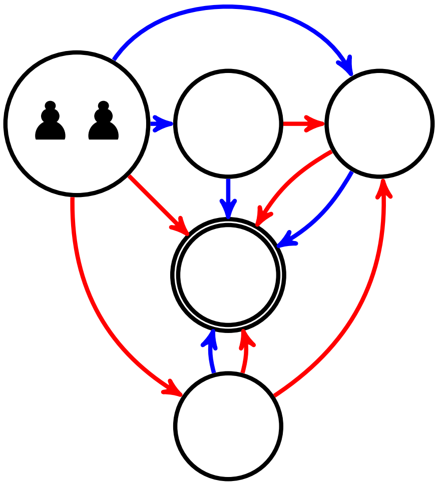
Si Bleu joue, il joue ceci :



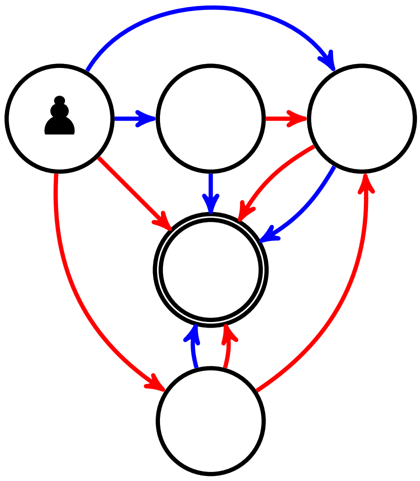
parce que dans ce cas Rouge ne peut que jouer



ce après quoi Bleu gagne. Et si Rouge jouait en premier, elle gagnait en amenant directement le pion à l'arrivée. En apparence, ce jeu est donc tout simplement l'étoile (le premier à jouer est le gagnant). Mais en fait non : on se souvient que *+*=0, or en additionnant entre elles deux copies du jeu ci-dessus, on n'a *pas* zéro. en fait la somme du jeu ci-dessus avec lui-même est l'étoile :



En effet si Bleu joue en premier, il gagne, et si Rouge joue en premier, elle gagne. Ainsi, si on appelle j le jeu



On a $j + j = *$ et donc Conway note $\frac{1}{2} \times *$ ou $\frac{*}{2}$ ce jeu. Il s'agit d'un jeu qui

- n'est pas l'étoile (c'est sa moitié),
- mais est indistinguable de l'étoile.

$\uparrow$ ressemble à une particule élémentaire (beaucoup de jeux infinitésimaux sont des multiples entiers de $\uparrow$) mais il est possible de trouver des sous-multiples de $\uparrow$ comme par exemple $\frac{1}{2}\times \uparrow$. La masse atomique de $\uparrow$ étant 1, on ne s'attend pas à trouver facilement des jeux de masse atomique $\frac{1}{2}$. Mais la masse atomique de l'étoile est nulle, et la masse atomique de $\frac{*}{2}$ est donc entière (égale aussi à zéro puisque la moitié de zéro est nulle). Si un jeu infinitésimal est de masse nulle, on a donc moins tendance à le considérer comme une particule élémentaire, que s'il est de masse atomique entière non nulle.