Construction du nombre par John Conway
2. Nimbers et infinitésimaux

Alain Busser
IREMI 974

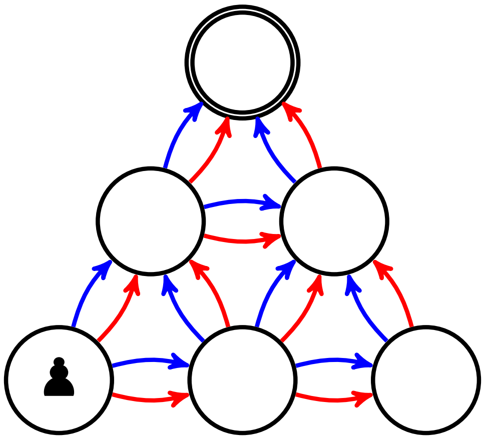
18 avril 2022

2.1 Jeux de Nim

2.1.1 Définition

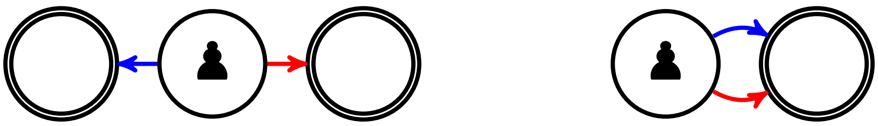
Un jeu est dit *de Nim* (Conway disait *impartial*) lorsque chaque arc bleu est accompagné d'un arc rouge (dans le même sens) et *vice versa*, chaque arc rouge est accompagné d'un arc bleu dans le même sens.

Cela signifie que Rouge et Bleu peuvent faire les mêmes mouvements. Ce n'est pas le cas des jeux combinatoires les plus classiques (échecs, go, dames, hex etc) où les pièces de jeux sont en deux couleurs, chaque joueur ne manipulant que les pièces de sa couleur. Ce n'est pas non plus le cas des jeux de semailles puisque chaque joueur sème dans son camp. L'exemple typique est le jeu où il faut prélever des pièces d'un tas de pièces (autant qu'on veut mais d'un seul tas). Par exemple voici le graphe du jeu de Nim à deux tas de 2 pièces :



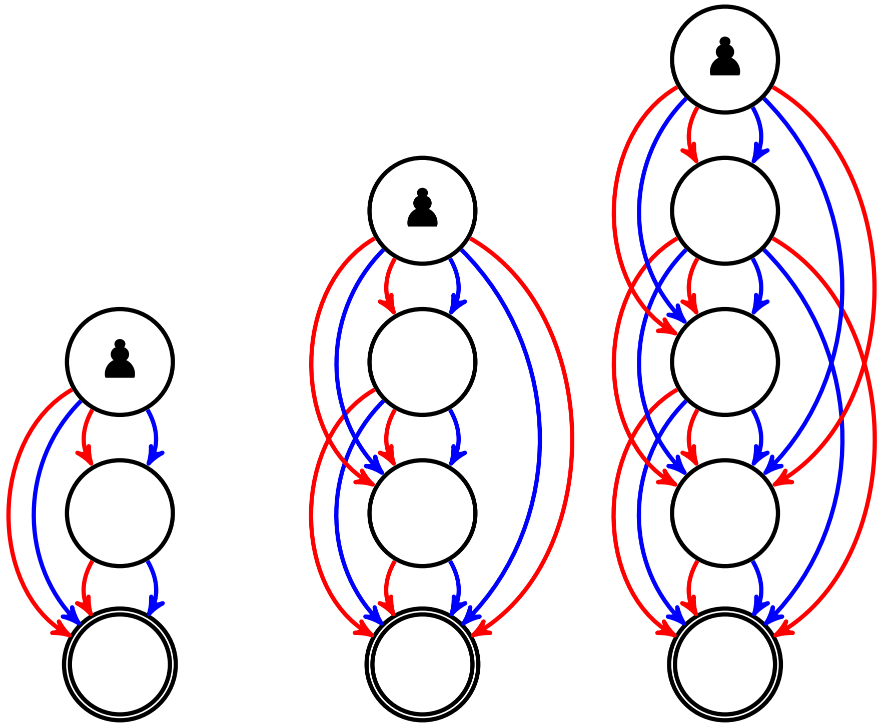
2.1.2 Tas de pièces

On a déjà vu l'étoile qui est un jeu de Nim à un tas, d'une seule pièce. On peut la simplifier ainsi :



Autrement dit, le graphique ci-dessus représente 2 tas d'une pièce au jeu de Nim. Chacun de ces tas est l'étoile. En fait le tout (les deux tas) est le jeu 0, comme on le verra plus bas.

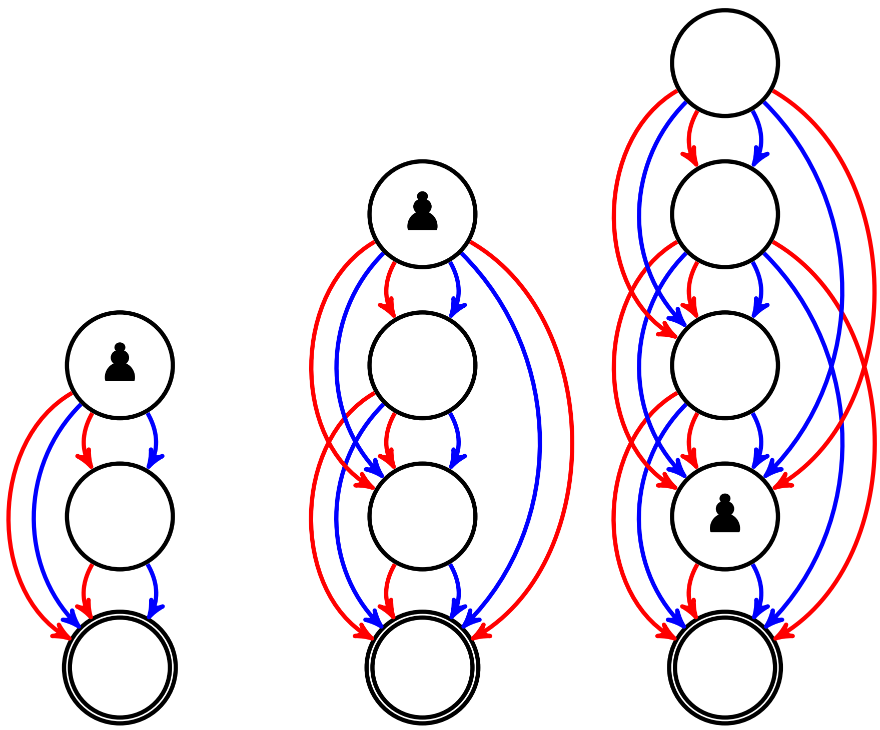
Voici des tas de respectivement 2, 3 et 4 pièces :



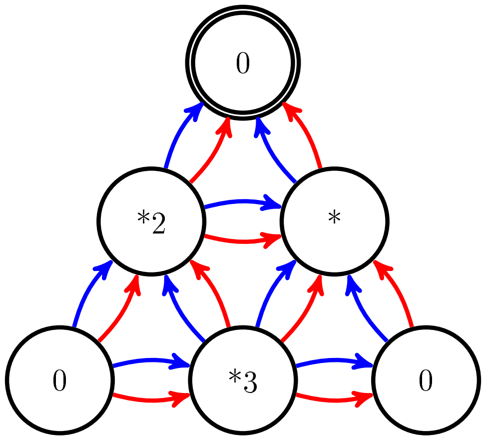
Conway note respectivement *2, *3 et *4 ces tas de pièces.

2.1.3 Nim-addition

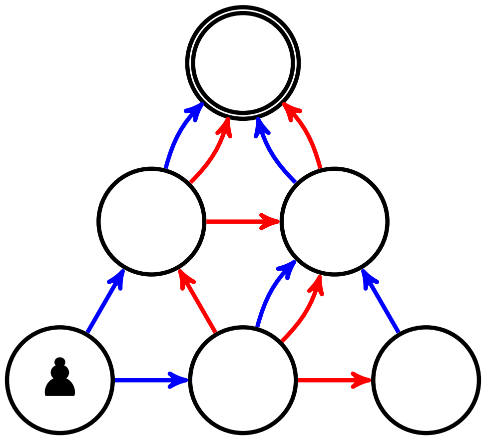
Les jeux *, *2, *3, *4 etc ne sont pas des nombres mais on peut les additionner. C'est pour analyser le jeu de Nim (et la nim-addition, décrite par Charles Bouton au début du XX^e siècle) que Patrick Grundy a inventé dans les années 1930, la notion de somme de jeux. Par exemple le graphique ci-dessus peut être vu comme un jeu de Nim à trois tas de 2, 3 et 4 pièces respectivement, ou comme la somme *2+*3+*4=*5. Le coup gagnant (pour celui qui joue en premier) consiste à annuler la nim-somme, c'est



L'addition des nombres de Nim permet de calculer la valeur du jeu qui ouvre cette section :



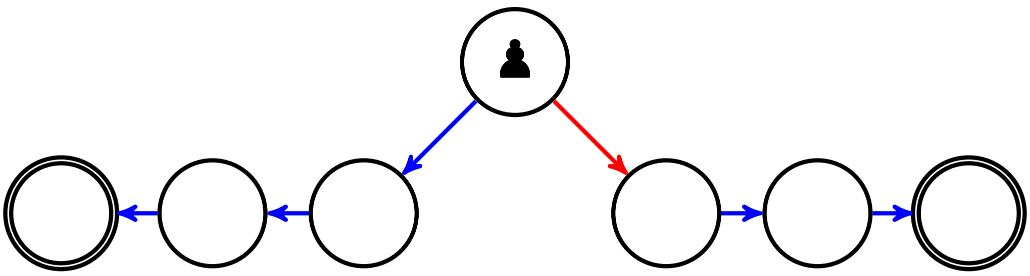
En fait le jeu ci-dessous aussi est 0 :



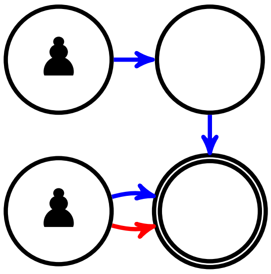
On rappelle que ceci signifie que le deuxième joueur, quelle que soit sa couleur, dispose d'une stratégie gagnante. Mais pour le montrer il faut faire intervenir des jeux qui ne sont ni des nombres, ni des nombres de Nim.

2.1.4 Addition de jeux des deux sortes

On peut se demander pourquoi Conway écrit *3 pour un tas de 3 pièces, et pas 3* (après tout il y a 3 pièces et chaque pièce vaut une étoile). C'est que, d'une part, *2 n'est pas la somme *+* (cette somme vaut 0), d'autre part, la notation 2* est réservée à un autre jeu :



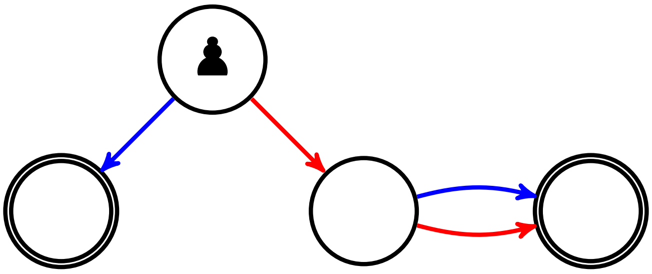
Ce jeu n'est ni un nombre, ni un nombre de Nim, mais la somme d'un nombre (2 ; les deux arcs bleus) et d'un nombre de Nim (l'étoile : l'arc double bleu-rouge) :



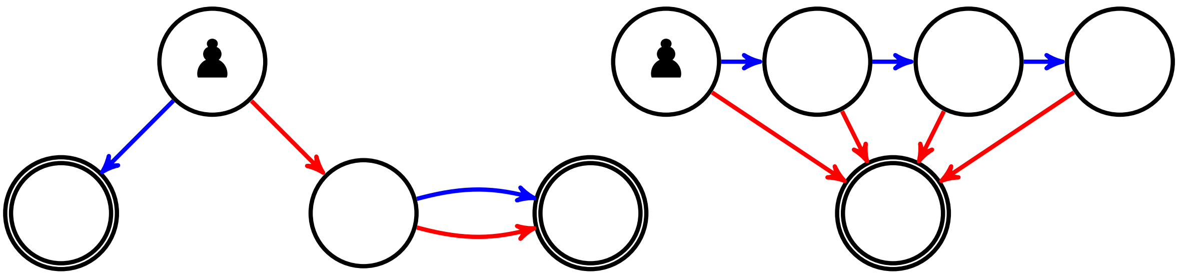
2.2 Infinitésimaux

2.2.1 Haut

Ce jeu est appelé *up* (haut ; noté $\uparrow$) par Conway :



Si c'est à Bleu de jouer, il gagne (il arrive à 0 qui fait perdre Rouge). Si c'est à Rouge de jouer, elle perd (elle arrive à l'étoile qui fait gagner Bleu). C'est donc toujours Bleu qui gagne. Ce jeu est donc positif. Mais si on lui soustrait n'importe quel nombre, c'est Rouge qui gagne. Par exemple si on additionne $-\frac{1}{8}$ à ce jeu :



Le résultat est à l'avantage de Rouge (que Bleu commence ou que Rouge commence). Et c'est pareil si on ajoute un jeu qui est faiblement à l'avantage de Rouge comme $-\frac{1}{2048}$. Le jeu $\uparrow$ est donc à la fois

- plus grand que 0 (puisque Bleu gagne)
- plus petit que $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2048}$ et que toute fraction positive.

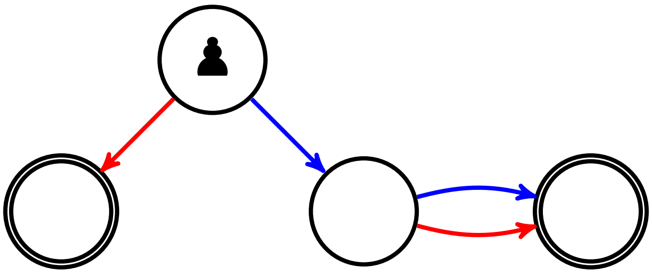
Ce n'est donc pas une fraction (il est même plus petit que $\frac{1}{2^\infty}$) mais c'est une sorte de nombre puisqu'on peut le comparer à des nombres et même l'additionner avec des nombres.

D'ailleurs $\uparrow + \uparrow = \uparrow 2$ alors que $2 + \uparrow = 2\uparrow$ dans la notation de Conway.

En fait du point de vue des calculs, $\uparrow$ se comporte comme le 1 des entiers naturels. Par exemple $\uparrow 5 + \uparrow 3 = \uparrow 8$ (alors que *5+*3=*6). Et il y a même un opposé de $\uparrow$.

2.2.2 Bas

Le jeu obtenu en inversant les couleurs, à partir de $\uparrow$, est noté $\downarrow$ et s'appelle *down* (bas) :

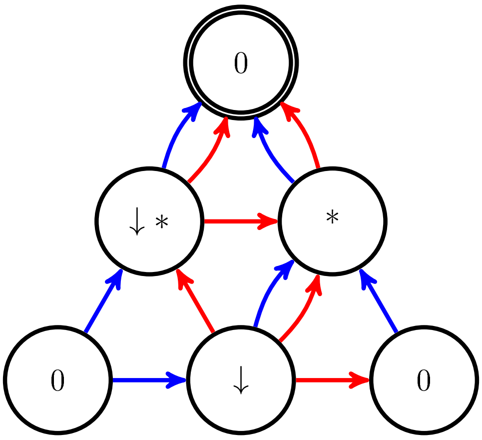


En fait $\downarrow$ est l'opposé $-\uparrow$ de $\uparrow$. Par exemple $\downarrow$ est négatif (c'est Rouge qui gagne, de toute façon) et $\uparrow + \downarrow = 0$.

Donc $2\downarrow$ est très (infiniment) proche de 2 mais en étant inférieur à 2, alors que $2\uparrow$ est aussi infiniment proche de 2, mais en étant supérieur à 2. Au fait $\downarrow$ est plus petit que $\uparrow$ bien qu'ils soient infiniment proches l'un de l'autre.

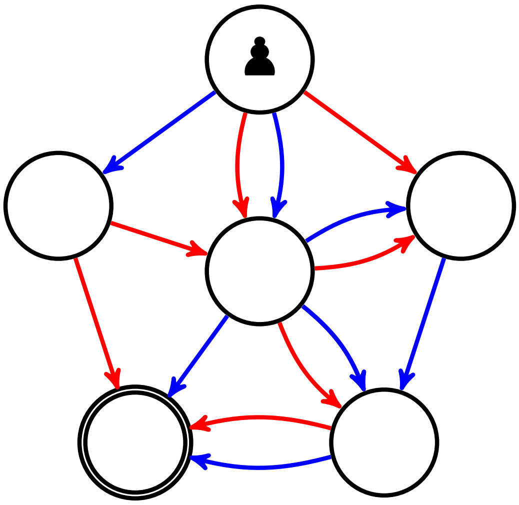
2.2.3 Calculs de jeux

Les hauts et les bas (ainsi que les étoiles) permettent de calculer de proche en proche les valeurs des sommets de ce jeu :

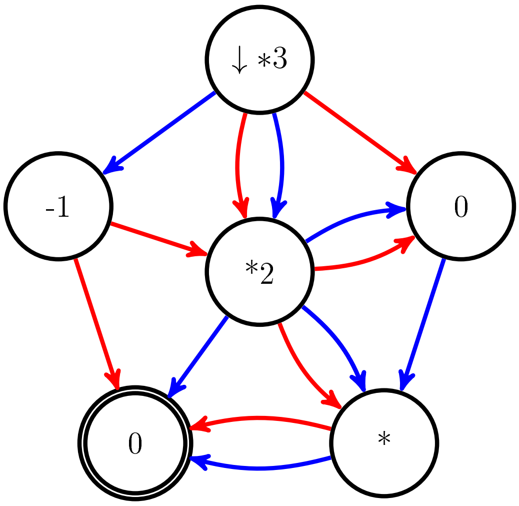


La notation $\downarrow *$ désigne la somme de $\downarrow$ et de l'étoile.

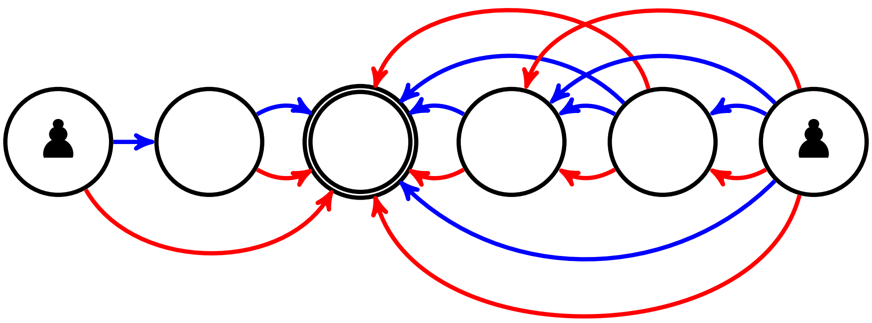
On peut maintenant calculer le jeu qui ouvrait cet article :



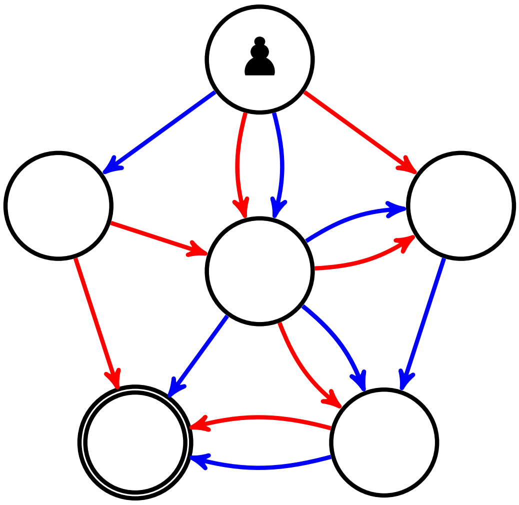
On trouve ces valeurs :



Le jeu est donc la somme de ↓ et d'un tas de 3 pièces au jeu de Nim :



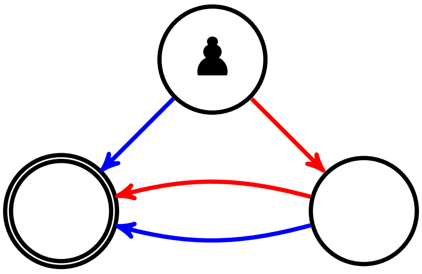
Pour comparaison, voici le jeu original :



Qui croirait, juste en les voyant, que c'est le même jeu ?

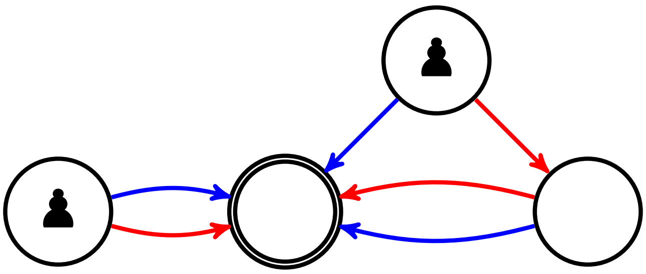
2.2.4 Double haut

On rappelle que ce jeu, noté $\uparrow$, est positif :

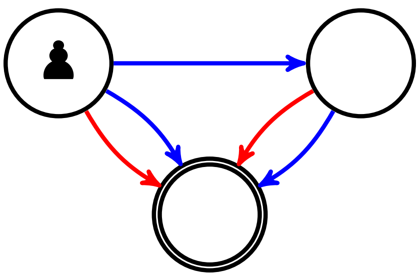


Cela signifie que si Bleu joue en premier, il mène directement le pion à l'arrivée, alors que si Rouge joue en premier, elle mène le pion à droite et Bleu gagne le coup d'après : dans les deux cas, Bleu gagne.

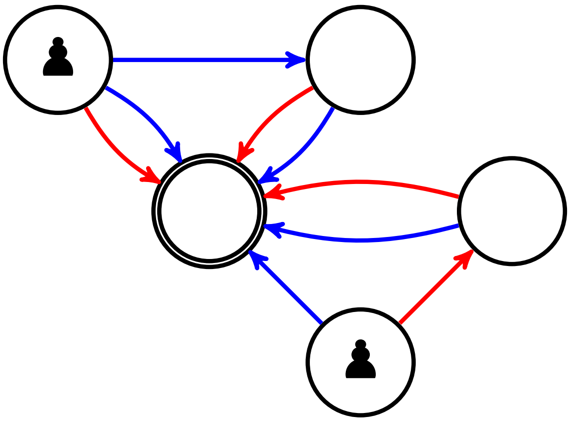
La somme de $\uparrow$ et de l'étoile



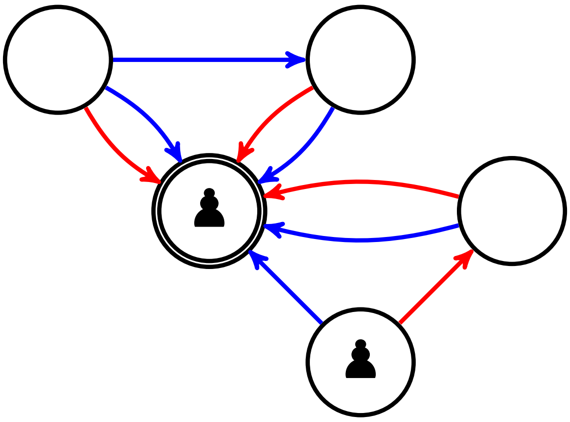
notée $\uparrow *$ et simplifiée ainsi :



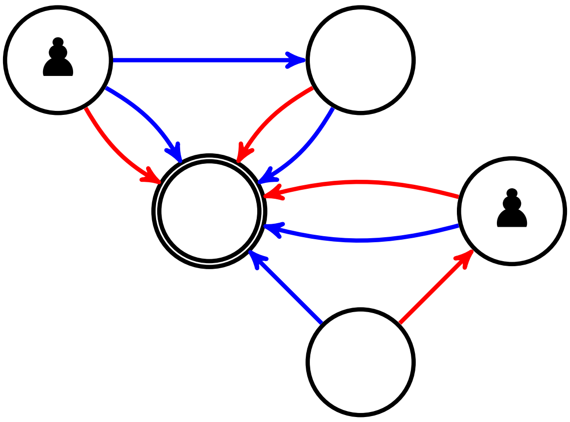
n'est *pas* positive, bien que ce soit la somme de $\uparrow$ qui est positif et de * qui n'est pas négatif. En effet si c'est à Rouge de jouer, elle gagne. On peut donc dire que $\uparrow$ est positif mais à peine : pas assez pour que sa somme avec * soit positive. Mais il suffit de peu pour le rendre positif : juste lui ajouter un infinitésimal, à savoir $\uparrow$. Comme $\uparrow$ est positif, ce jeu est donc supérieur (de peu) au précédent :



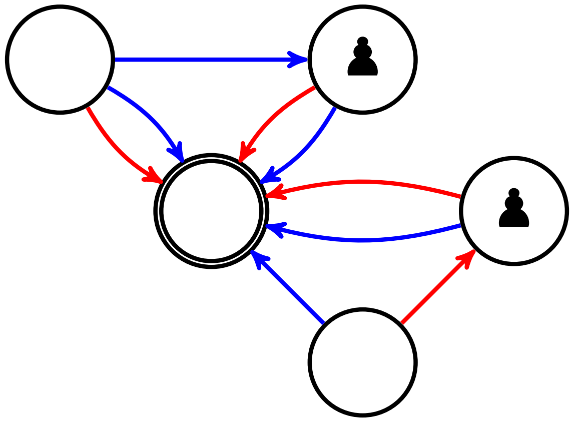
Le nom de ce jeu est $\uparrow\uparrow *$ puisque c'est la somme de $\uparrow$ et de $\uparrow *$. On peut vérifier qu'il est positif : si c'est à Bleu de jouer, il gagne en faisant



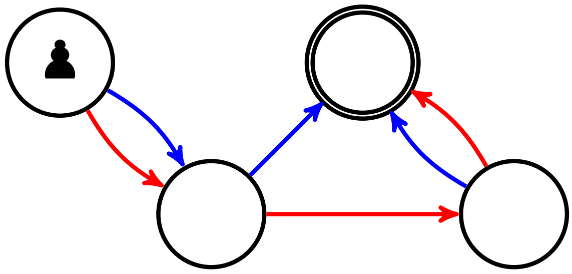
puisqu'après Rouge n'a pas d'autre choix que mener l'autre pion à droite, et Bleu gagnera après. Alors que si c'est à Rouge de jouer, si elle fait comme ci-dessus, Bleu gagne en menant le second pion à l'arrivée. Et si elle fait



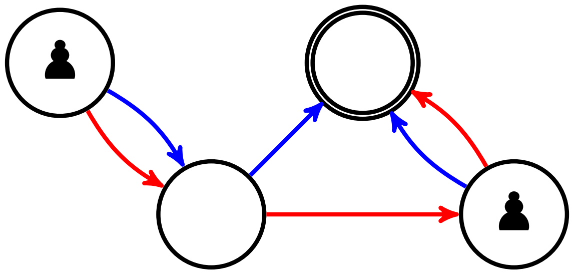
Bleu gagnera ensuite avec ce coup subtil :



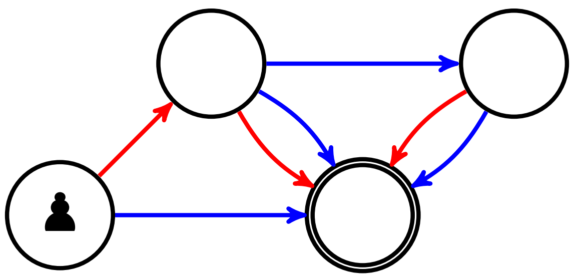
qui ramène la situation à *+*=0, et comme c'est alors à Rouge de jouer, elle perd.
Voici la version de $\Uparrow *$ à un seul pion :



Comme $\Uparrow * + * = \uparrow + \uparrow + * + * = \uparrow + \uparrow + 0 = \Uparrow$, on en déduit une représentation à deux pions, du jeu $\Uparrow$:

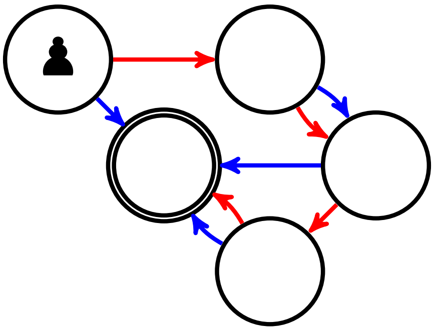


Mais $\Uparrow$ a aussi une représentation à un seul pion :

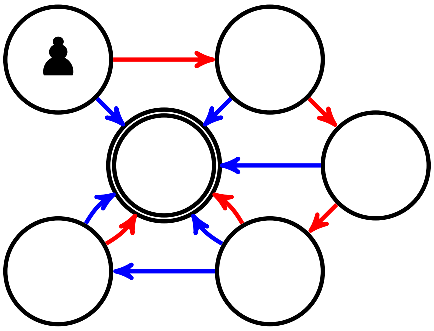


2.2.5 Autres multiples de $\uparrow$

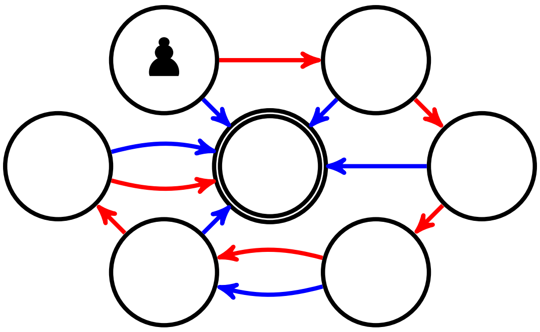
Le jeu ci-dessous est $\uparrow + \uparrow + \uparrow$, noté $\uparrow\uparrow\uparrow$ (lui aussi positif puisqu'il est supérieur à $\Uparrow$, et lui aussi infinitésimal) :



Voici $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



et $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$:



On peut dire que, comme * n'est ni positive ni négative, * apporte (par addition) une certaine incertitude, qui permet tout juste de ne plus garder positif le jeu $\uparrow *$ (alors que $\uparrow$ est positif), mais que cette incertitude n'est pas suffisante pour empêcher $\uparrow\uparrow *$ d'être positif. Par exemple, alors que $2\uparrow$ est supérieur à 2 (puisque $\uparrow$ est positif), $2\uparrow *$ ne l'est plus, à cause d'une incertitude apportée par *. Ce point sera précisé plus loin dans la partie sur les interrupteurs de Conway.