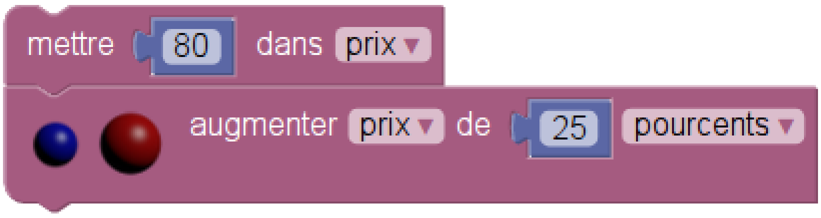
Suites géométriques

I/ Taux d'évolution

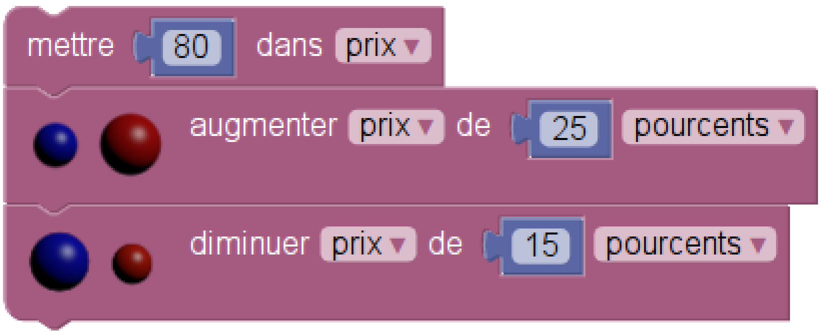
> Un commerçant décide d'augmenter de 25 % le prix d'un de ses articles. Comme plus personne n'achète cet article, il décide, la mort dans l'âme, de baisser le prix de l'article de 15 %. De quel pourcentage le prix a-t-il changé au final ?

Supposons par exemple que le prix initial ait été 80 €. Dans SofusPy974[1], on crée alors une variable appelée prix et initialisée à 80 :

Pour l'augmentation, on rajoute un bloc (catégorie maths, sous-catégorie Sofus) pour augmenter de 25 %:



Puis on ajoute un bloc pour la diminution de 15 %:



Ensuite on va dans l'éditeur Python, en cliquant sur

1 https://alainbusser.github.io/SofusPy974/

On obtient alors la traduction en Python du problème :

```
prix = 80
prix = prix + prix * 25 / float(100 )
prix = prix - prix * 15 / float(100 )
```

L'expression `float(100)` est à comprendre ainsi : 100[2] vu non comme un entier mais comme un réel (`float` en Python). On peut, dans l'éditeur Python, simplifier les expressions, en effectuant les divisions :

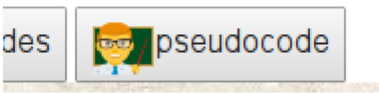
- 25 divisé par 100 donne 0,25 (`0.25` en Python)
- 15 divisé par 100 donne 0,15 (`0.15` en Python)

Le script Python devient alors[3]

```
prix = 80
prix = prix + prix * 0.25
prix = prix - prix * 0.15
```

On vérifie, en exécutant le script, qu'il donne le même prix final que la version précédente (en ajoutant un `print(prix)` par exemple.

Pour écrire le programme en pseudo-code, cliquer sur



ce qui fait apparaître dans la console de sortie, l'algorithme :

```
prix ← 80
prix ← prix + prix × 0,25
prix ← prix - prix × 0,15
```

Mais on peut encore simplifier les expressions des deux dernières lignes puisqu'elles comportent un facteur commun (la variable `prix`). On met donc `prix` en facteur pour obtenir la version simplifiée du script :

2 Pourcent veut dire « pour 100 » donc un pourcentage est une fraction de dénominateur 100.
3 Avec les pourcentages, « de » veut dire × et « pour » veut dire ÷.

- prix + prix×0,25 = prix × (1+0,25) = prix × 1,25
- prix – prix×0,15 = prix × (1-0,15) = prix × 0,85

```
prix = 80
prix = prix * 1.25
prix = prix * 0.85
```

Le pseudo-code correspondant est

```
prix ← 80
prix ← prix × 1,25
prix ← prix × 0,85
```

La seconde ligne (remplacer prix par prix×1,25) revient à multiplier le prix par 1,25. Ce qui se note ainsi en Python :

```
prix = 80
prix *= 1.25
prix *= 0.85
```

Le pseudo-code étant

```
prix ← 80
multiplier le prix par  1,25
multiplier le prix par  0,85
```

En bref,

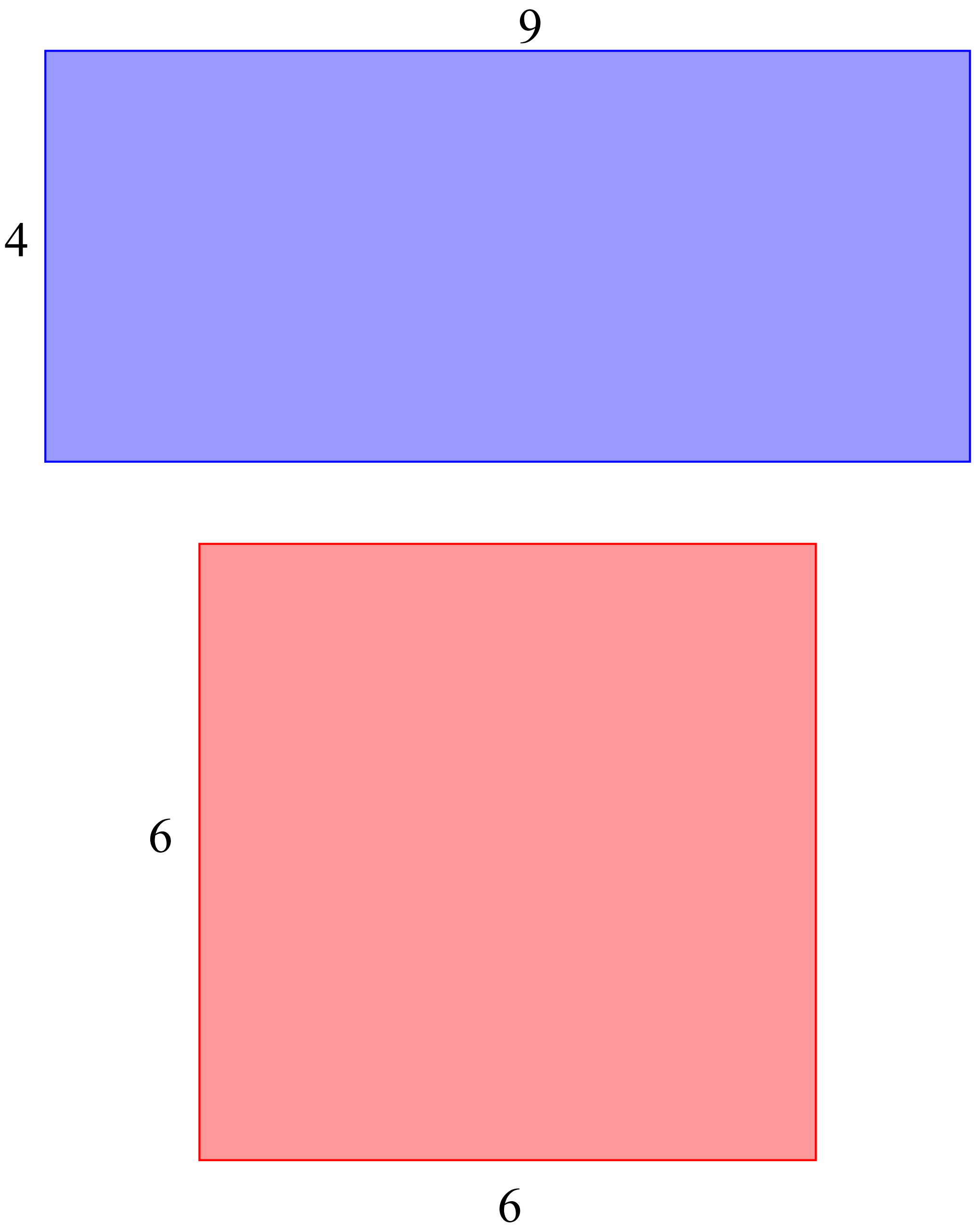
- on a fixé le prix à 80 €
- on a multiplié le prix par 1,25
- on a multiplié le prix par 0,85

Donc, au final, le prix a été multiplié par 1,25×0,85 soit par 1,0625. Donc

Le prix a augmenté de 6,25 %.

II/ Moyenne géométrique

Dans la figure ci-dessous, y a-t-il plus de bleu ou plus de rouge ?



En fait il y a autant de bleu que de rouge : l'aire du rectangle bleu est $9 \times 4 = 36$ et l'aire du carré rouge est $6 \times 6 = 36$. La construction d'un carré de même aire que le rectangle de côtés 9 et 4 passe par ce que l'on nomme ***moyenne géométrique*** de 9 et 4. Elle n'est pas égale à la moyenne de 9 et 4 qui est $(9+4)/2 = 13/2 = 6{,}5$ mais à 6 (parce que $6^2 = 9 \times 4$). Une suite pour laquelle chaque terme est la moyenne géométrique du précédent et du suivant, est appelée ***suite géométrique***. Par exemple la suite commençant par 4, **6**, 9 est géométrique.

III/ Suites géométriques

1) Définition

Une suite géométrique est une suite dans laquelle chaque terme est le produit du précédent par un nombre appelé ***raison***[4] de la suite.

Par exemple la suite 4, 6, 9, 13.5, … est géométrique de raison 1,5.

2) Taux d'évolution constant

Si on augmente une variable d'un même pourcentage p plusieurs fois de suite, on a une suite géométrique. Sa raison est (1+p/100) .

Si on diminue une variable d'un même pourcentage p plusieurs fois de suite, on a une suite géométrique, de raison (1-p/100).

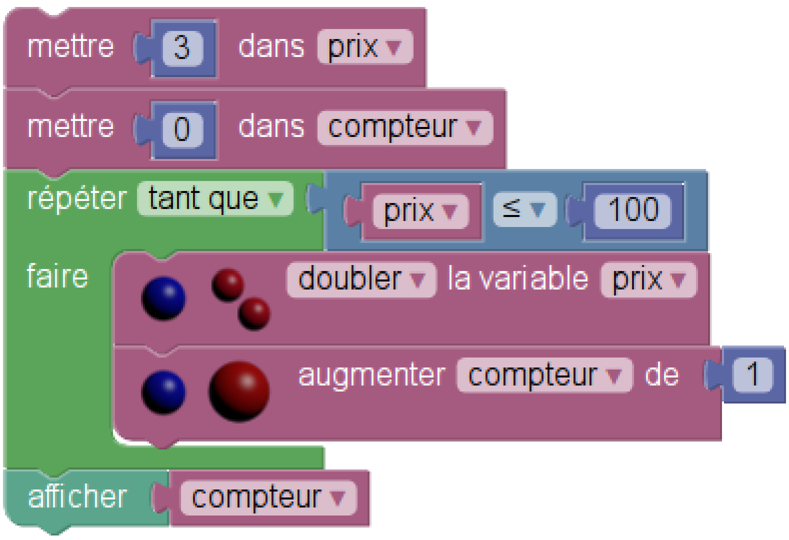
3) Propriétés

On suppose que le premier terme et la raison sont positifs. Alors

- Si la raison est plus grande que 1, la suite est croissante et tend vers l'infini.
- Si la raison est plus petite que 1, la suite est décroissante et tend vers 0.

4) Recherche de seuil

C'est l'inflation : un biscuit qui au départ ne coûtait que 3 roubles, voit son prix doubler toutes les semaines. Au bout de combien de semaines son prix dépassera-t-il 100 roubles ?



4 Du latin *ratio* qui veut dire quotient (le quotient de chaque terme par le précédent est la raison de la suite).

En Python :

```
prix = 3
compteur = 0
while prix <= 100:
    prix = prix * 2
    compteur = compteur + 1
print(compteur)
```

ainsi, l'algorithme

```
prix ← 3
compteur ← 0
Tant que prix ≤ 100
   prix ← prix × 2
   compteur ← compteur + 1
```

permet, en lisant le contenu de la variable compteur, de répondre à la question. Mais il y a une autre méthode, basée sur le logarithme : la suite des prix du biscuit est géométrique de raison 2, donc on sait que son terme général est 3×2^n. On demande à partir de quand cette expression dépasse 100, on veut donc résoudre l'inéquation $3\times2^n > 100$. La fonction ln étant croissante, cela revient à

$\ln(3\times2^n) > \ln 100$. Or le premier membre est $\ln(3) + n\times\ln(2)$, donc on résout $\ln(3)+ n\times\ln(2) > 100$ ce qui équivaut à $n\times\ln 2 > \ln(100)-\ln(3)$ puis $n> (\ln(100)-\ln(3)\ ) / \ln(2)$. En appuyant sur ln 100 ÷ 3) ÷ ln 2) entrer on a un peu plus de 5 : il faudra donc 6 semaines pour que le biscuit coûte plus de 100 roubles.