Exemples de suites ultimement périodiques

Introduction

Cet article traite d'une famille de suites binaires $(u_n)_{n>0}$ que l'on obtient à partir d'une suite initiale $(U_n)n>0$ définie par récurrence,

$$U_1 = b \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{a}{2} U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ U_{n+1} = \dfrac{a}{2}(U_n + a^n) + 1 & \text{si } U_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère alors la suite associée $(u_n)_{n>0}$ qui donne la parité des termes :

- *si U_n est pair alors $u_n = 0$*
- *si U_n est impair alors $u_n = 1$,*

a est un entier naturel impair *a* >1 et *b* un entier naturel.

Le but poursuivi est de montrer que

- ces suites binaires sont ultimement périodiques avec pour période

  p = ordre de 2 modulo $\dfrac{a(a-2)}{pgcd(b-1, a)}$

- elles sont périodiques si et seulement si $0 \le b < a$.

Par exemple pour b = 3 **et** *a* = 61 l**a suite binaire associée** $(u_n)_{n>0}$ **est périodique et sa période 1740 ne peut être observée**(voir III-A-1 remarque 3).

Table des matières

Définition

Une suite $(u_n)_{n>0}$ est *dite ultimement périodique s'il existe deux entiers naturels* n_0 et *p, p différent de 0, tels que* $u_{n+p}=u_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *. On dit que p est une période.*
Le plus petit p qui convient est la période de la suite.
Le plus petit n_0 *est le rang d'entrée dans le motif (séquence de longueur p qui se reproduit à l'infini).*

propriété
La suite est dite périodique si n_0 *est l'indice du premier terme de la suite.*
Si on supprime les premiers termes d'une suite périodique la suite obtenue reste périodique avec la même période, seul l'ordre des termes du motif peut changer.

Première partie *b* = 1

I-A- Observation des premières valeurs des suites associées

Dans cette partie on note $(R_n)_{n>0}$ et $(r_n)_{n>0}$ les suites.

Les premiers termes de la suite $(r_n)_{n>0}$ sont obtenus à l'aide du logiciel Xcas et du **programme1** dans lequel on fixe $b = 1$.

```
u(a,b,n):={// permet de voir lespremiers termes en fonction de a et de b
local c,x,L;
L:=NULL;
c:=0;
x:=b;
while(c<n)
{if irem(x,2)==0 then x:=a*x/2+1;L:=L,0;
else x:=(x+a^(c+1))*a/2+1;L:=L,1;end_if;
c:=c+1;
}
return L;
```

Le tableau suivant donne pour *a* variant de 3 à 39 les premières valeurs.

```
for(j:=1;j<20;j++){afficher(2*j+1,u(2*j+1,1,44));}
```

```
3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
5,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0
7,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0
9,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0
11,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1
13,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1
15,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0
17,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0
19,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1
21,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1
23,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1
25,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0
27,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1,1,0
29,1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1
31,1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0
33,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0
35,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1
37,1,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,1,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,1,1,0
39,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,1,0
```

De façon plus lisible

3 1,,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1

5 1,0,1,0,1,0,10,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0

7 1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0

9 1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0

11 1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1

13 1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1

15 1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0

17 1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0

19 1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1

21 1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1

23 1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,1

25 1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0

27 1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,1,1,0

29 1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1

31 1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0

33 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0.

….

On observe :

* un motif répétitif pour chaque valeur de a, avec des périodes assez imprévisibles :

2 pour 5 18 pour 21 6 pour 23

** une périodicité verticale suivant le rang du terme :

pour un rang j la période est 2^{j-1}

3 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1

5 1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0

7 1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0

9 1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0

11 1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1

13 1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1

15 1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,1,0,0

17 1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0.

I-B Cinq observations sur la période et le motif

Observation-1

Si a est de la forme 2^k+1, avec $k>0$, la période semble être k et le motif qui se répète est formé d'un 1 suivi de k-1 zéros.

Exemple pour $17 = 2^4 + 1$

1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0.

Ainsi, pour a = 3, 5, 9, 17, 33, les motifs sont respectivement 1, 10, 100, 1000,10000.

Observation-2

Si $1+2^k < a <= 1+2^{k+1}$ la période est variable suivant la valeur de a, mais le motif qui se répète semble se terminer par 1 suivi de k zéros.

Pour $k = 4$, on a $17 < a \leq 33$

Valeur de a	Motif
19	1,1,1,1,0,0,0,0
21	1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0
23	1,1,0,0,0,0
25	1,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0
27	1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0
29	1,0,1,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,0
31	1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0
33	1,0,0,0,0.

Observation-3

Si a est de la forme 2^k+3, $k>0$ la période semble être 2k et le motif 11..100..0, où 1 et 0 sont répétés k fois.

Pour $11 = 2^3 + 3$

1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0.

Pour a = 5, 7, 11, 19 les blocs sont 10, 1100, 111000, 11110000.

Observation-4

Pour certaines valeurs de a, la période vaut a -3.

Exemple pour $a = 21$ la période est 18.

1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1...

On le vérifie également lorsque a prend les valeurs 5, 7, 13, 15, 21.

Est ce vrai pour une infinité de nombres a premiers?

Une réponse positive à cette dernière question résout positivement la conjecture des nombres "premiers jumeaux " .

Observation-5

Souvent lorsque la période est un nombre pair, comme pour a = 13 où elle vaut 10, la première moitié du motif 10111 est conjuguée de la deuxième 01000(les 1 se changent en 0 et les 0 en 1). Le motif est conjugué.

1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1.*

Il y a cependant des exceptions, par exemple si a = 23, la période est 6 et le motif 110000. Les trois premiers termes ne sont pas conjugués des trois derniers.

Dans le tableau, la propriété de conjugaison a lieu également lorsque a prend les valeurs 5, 7, 11, 13, 15,19,21,27,29,31.

remarque :

D'après l'**observation -3,** le motif est conjugué pour tout a de la forme 2^k+3.

I-B- Existence d'une période pour tout nombre a

I-B-1- Mise en évidence d'une suite

Quand le motif est court, par exemple pour $a = 9$, on peut tenter une méthode directe pour établir l'existence d'une période (**voir pour aller plus loin** p 25). Mais celle ci nécessite de connaître déjà la période et les premiers termes.

Pour notre démonstration nous allons nous inspirer de la suite de Syracuse.

Pour cette suite, l'image d'un terme pair est divisé par 2 jusqu'à l'obtention d'un terme impair, par exemple : 120-60-30 –15

15 le nombre impair final est prévisible si on écrit 120 sous la forme 2^3*15 et l'indice 3 nous donne le nombre de termes pairs.

Ainsi nous observons que l'écriture d'un nombre pair sous une certaine forme, met en évidence l'obtention des termes suivants :

$$2^3*15 \text{ ---} 2^2*15 \text{ ---} 2^1*15 \text{ ---} 15.$$

Appliquons cela pour notre suite .

Partons du premier terme $R_1 = 1$ de la suite, il est impair donc par définition le terme suivant

$R_2=(1+a^1)\frac{a}{2}+1$ soit $R_2=\frac{a(1+a^1-2)}{2}+a^1+1$

la parenthèse 1 + *a* – 2 désigne un nombre pair que l'on peut écrire sous la forme $2^{k_1}a_1$ **avec a_1 impair et** $k_1\geq 1$ **.**

On obtient $R_2=2^{(k_1-1)}a_1a+a^1+1$. Comme R_1 = 1 on trouve la formule (I).

$$\text{(I)} \quad R_2=2^{k_1-1}a_1a^1+a^1+R_1$$

Cette formule montre que la parité de R_2 dépend uniquement de k_1 car a^1 + R_1 est pair.

Deux cas se présentent k_1 = 1 et $k_1 > 1$.

- **Étude du cas $k_1 > 1$.**

Dans l'équation (I) R_2 est pair et est suivi d' une suite de termes(éventuellement réduite à un seul),

$$R_3=2^{(k_1-2)}a_1a^2+(a+1)\frac{a}{2}+1=2^{(k_1-2)}a_1a^2+R_2$$

$$R_4=2^{(k_1-3)}a_1a^3+R_2\frac{a}{2}+1=2^{(k_1-3)}a_1a^3+R_3$$

…........

…........

$$R_{k_1+1}=2^0a_1a^{k_1}+R_{k-1}\frac{a}{2}+1=2^0a_1a^{k_1}+R_{k_1} \quad .$$

Tous les termes R_i sont pairs sauf R_1 et le dernier R_{k_1+1} . R_1 est suivi de k_1 - 1 terme(s) pair(s) suivis (eux même) par un terme impair.

Ainsi les k_1 + 1 premiers termes de la suite associée r_n sont 1 0...0 1 avec k_1 – 1 zéros.

Comme R_{k_1+1} est impair le terme suivant est $R_{k_1+2}=(a^{k_1+1}+a_1a^{k_1}+R_{k_1})\frac{a}{2}+1$ c à d

$$R_{k_1+2}=(a^{k_1+1}+a_1a^{k_1})\frac{a}{2}+R_{k_1}\frac{a}{2}+1=\frac{(a+a_1)}{2}a^{k_1+1}+R_{k_1+1}=\frac{(a+a_1-2)}{2}a^{k_1+1}+a^{k_1+1}+R_{k_1+1} \quad ,$$

En posant $(a+a_1-2)=2^{k_2}a_2$ il vient

$$\text{(II)} \quad R_{k_1+2}=2^{k_2-1}a_2a^{k_1+1}+a^{k_1+1}+R_{k_1+1} \quad .$$

La parité des termes suivants dépendra uniquement de k_2.

- **Étude du cas k_1 = 1.**

Dans l'équation (I) R_2 est impair.

$R_{k_1+1}=R_2=2^0 a_1 a+a+1$ et $R_{k_1+2}=R_3=(a^2+2^0 a_1 a+a+1)\frac{a}{2}+1$ $=$ $\frac{(a_1+a-2)}{2}a^2+a^2+R_2$ et $R_{k_1+2}=2^{k_2-1}a_2 a^{k_1+1}+a^{k_1+1}+R_{k_1+1}$ ce qui est bien (II) pour $k_1 = 1$.

Ainsi la relation (II) est obtenue dans les deux cas, elle montre que le signe des termes suivants dépend de k_2. On peut donc recommencer.

On obtient ainsi une suite $S(n)$ ***:***

$1\ ,\ 2^{k_1-1}a_1\ ,\ 2^{k_1-2}a_1\ ,\dots\ ,\ a_1\ ,\ 2^{k_2-1}a_2\ ,\dots\ ,\ a_2\ ,\ \dots\dots\ .$

Les nombres impairs 1, a_1***,*** a_2***, ……sont reliés entre eux par les égalités :***

$a+1-2=2^{k_1}a_1$; $a+a_1-2=2^{k_2}a_2$; $a+a_2-2=2^{k_3}a_3$;……. .

Il est naturel de poser $a_0 = 1$.

La connaissance de a_i ***détermine à la fois*** a_{i+1} *et* k_{i+1}.

Quant aux premiers termes de la suite associée (r_n) ***on a : 1,0…..,0,1,0…0,1, …***

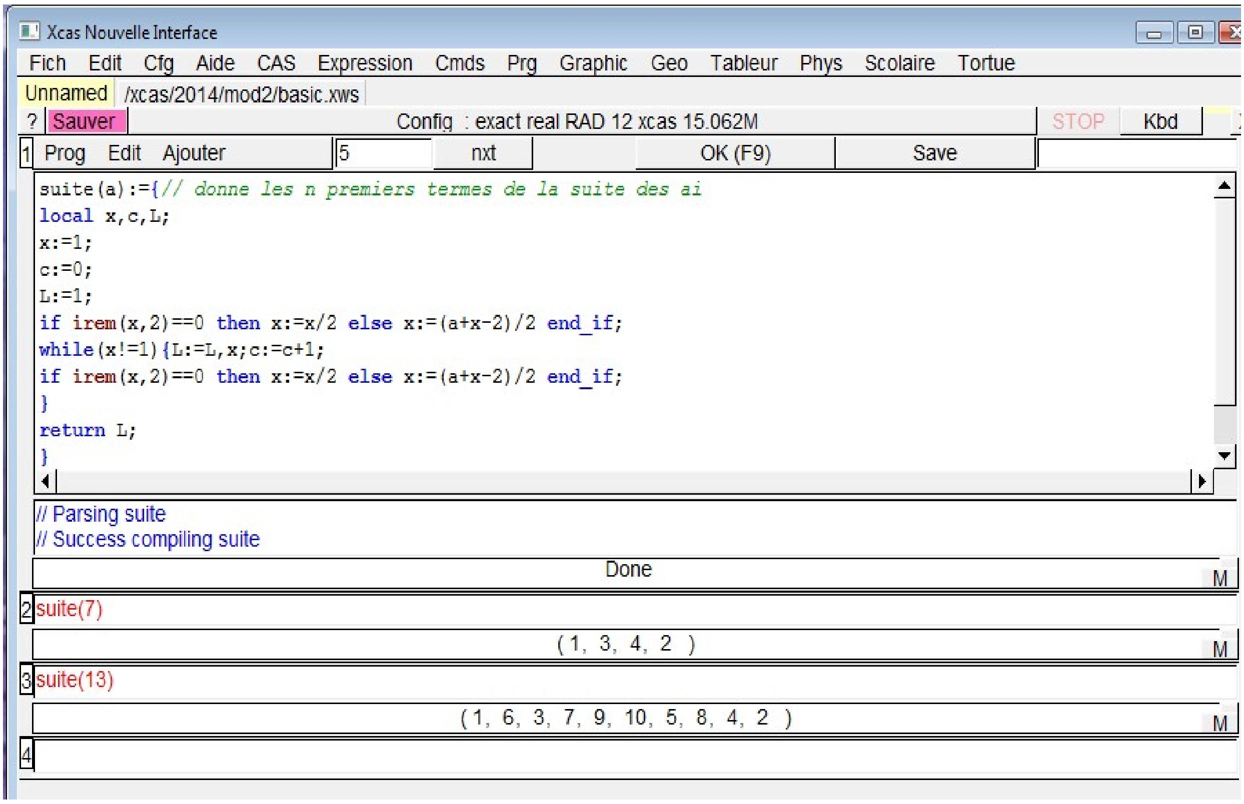
le nombre de zéros entre deux 1 étant respectivement $k_1 - 1$, $k_2 - 1$,......*etc*.

Le **programme2** permet d'obtenir ces suites.

Il montre, pour le résultat de **"suite(13)"**que

$a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=5$, $a_5=1$ ***et***

$k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=1$, $k_4=2$ ***et*** $k_5=4$.



Remarque :

Ce programme montre que les termes de la suite $S_{(n)}$ vérifient

$S_1 = 1$ et $S_{n+1}=f(S_n)$, f étant la fonction définie sur N par :

$f(x)=\frac{x}{2}$ si x est pair et $f(x)=\frac{a-2+x}{2}$ si x est impair.

L'étude de ce type de fonctions permet d'expliquer simplement la périodicité. Nous la traiterons dans la deuxième partie.

I-B-2 - la suite binaire associée (r_n) est périodique

1)-La suite a_n est majorée par $a - 2$.

Montrons que pour tout i $a_i \leq a-2$. La démonstration se fait par récurrence sur i.

Initialisation.

$a_0 = 1$, a est par définition un nombre impair supérieur à 1, on a bien $a_0 \leq a-2$

Hérédité.

Supposons $a_m \leq a-2$

on a $a+a_m-2=2^{k_{m+1}} a_{m+1}$ avec $k_{m+1} \geq 1$

donc $a_{m+1}=\frac{a+a_m-2}{2^{k_{m+1}}} \leq \frac{a-2}{2^{k_{m+1}-1}} \leq a-2$.

L'hérédité est montrée ; la suite $a_{(n)}$ est majorée par a - 2.

Ainsi,tous les termes de la suite $S_{(n)}$ sont majorés par a - 2.

2)-La suite des a_i est ultimement périodique.

Le nombre d'entiers inférieurs à a – 2 est fini, donc d'après le principe des tiroirs,

il faudra que $a_i=a_{i+j}$ pour un certain i et un certain j, j#0.

Ceci fera apparaître une période dans la suite des a_i et aussi pour la suite $S_{(n)}$.

3)-Le motif commence au premier terme.

Soit i_0 le premier indice tel que l'égalité $a_{i_0}=a_{i_0+j_0}$ ait lieu pour un certain j_0 et raisonnons par l'absurde. Supposons $\boldsymbol{i_0}$ différent de 0.

On peut alors parler du terme a_{i_0-1} et $a+a_{i_0-1}-2=2^t a_{i_0}$ donc $a+a_{i_0+j_0-1}-2=2^w a_{i_0+j_0}$.

Supposons $w \leq t$ on a alors par soustraction membre à membre

$a_{i_0-1}-a_{i_0+j_0-1}=(2^{t-w}-1)2^w a_{i_0+j_0}=(2^{t-w}-1)(a+a_{i_0+j_0-1}-2)$.

Si t # w, on arrive à une contradiction car

$a_{i_0-1}-a_{i_0+j_0-1}<a-2$ et $(2^{t-w}-1)(a+a_{i_0+j_0-1}-2)>a-2$.

Ainsi t = w, ce qui entraîne $a_{i_0-1}=a_{i_0-1+j_0}$ qui à nouveau est contradictoire avec la définition de i_0 . La suite $a_{(i)}$ est périodique pour chaque valeur de *a*.

I-C- Le motif répétitif et la période pour la suite associée $r_{(n)}$

I-C-1 Le motif

On déduit de ce qui précède qu'il existe un indice s >0 minimal tel que $a_0 = a_s = 1$.

La suite $S_{(n)}$ déjà rencontrée est périodique et la séquence

$$1 \;,\; 2^{k_1-1}a_1 \;,\; 2^{k_1-2}a_1 \;,\ldots\;,\; a_1 \;,\; 2^{k_2-1}a_2 \;,\ldots\;,\; a_2 \;,\;\ldots\ldots\;,\; 2^{k_s-1}a_s \;,\;\ldots\;,a_s$$

sans le dernier terme donne le motif. On en déduit le motif(en rouge) pour la suite $r_{(n)}$

1, 0, …,0,1,0,..,0, 1,0........................1,0....0, 1.

Les 1 correspondent aux nombres impairs a_0, a_1, a_2,.....,a_s = 1 ; entre deux 1 consécutifs il y a respectivement $k_1 - 1$ zéros, $k_2 - 1$ zéros,...........,$k_s - 1$ zéros.

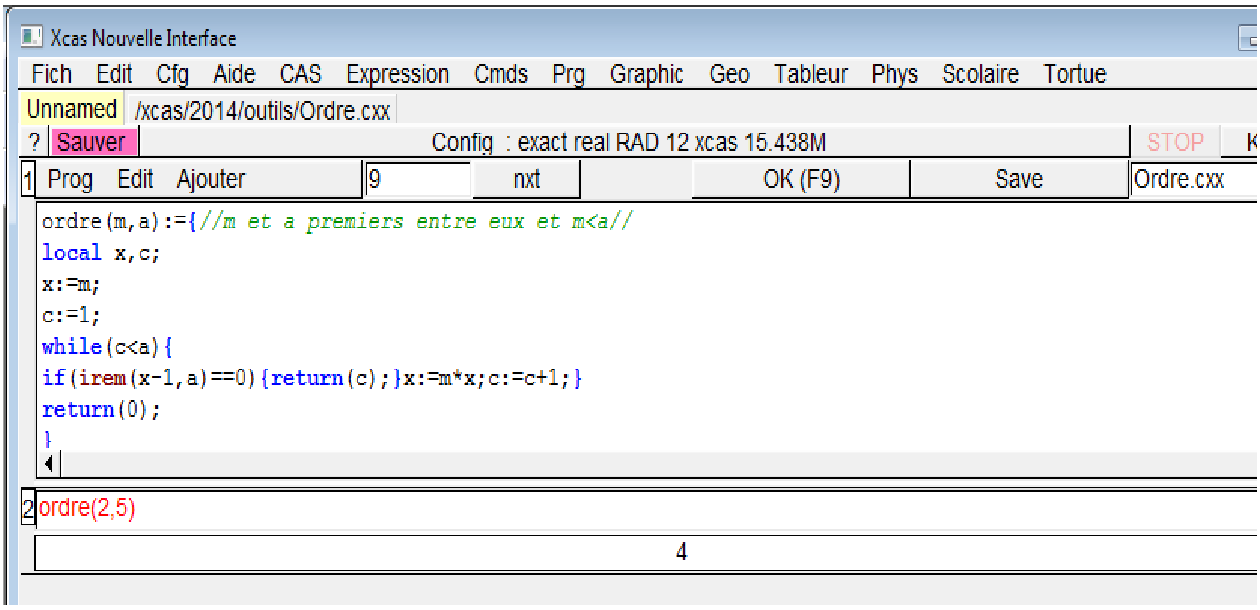
Certains de ces nombres peuvent être nuls, auquel cas il n'y a pas de zéro entre les 1 correspondants.

I-C-2 la période

Ordre de 2 modulo a.

C'est la plus petite valeur de m qui vérifie la propriété : " a divise 2^m - 1 ". Elle existe car 2 est premier avec a qui est impair et supérieur à 1.

Voici un **programme 3** qui permet de déterminer l'ordre de 2 modulo *a*.



On sait déjà que la période est $p_1 = k_1 + k_2 + ... + k_s$.

Nous allons montrer le résultat suivant

p_1 = ordre de 2 modulo (a-2).

Le résultat $a_i \leq a-2$ pour tout i et les équations $\frac{a+a_i-2}{2} = 2^{k_{i+1}-1} a_{i+1}$ montrent que tous les termes de la séquence

$$1 \ ,\ 2^{k_1-1}a_1 \ ,\ 2^{k_1-2}a_1 \ ,\dots\ ,\ a_1 \ ,\ 2^{k_2-1}a_2 \ ,\dots\ ,\ a_2 \ ,\ \dots.. \ ,\ 2^{k_s-1}a_s \ ,\ \dots \ ,a_s$$

sont inférieurs à a -2 et que pour tout i, a_i est congru à $2^{k_{i+1}} a_{i+1}$ modulo (a-2) .

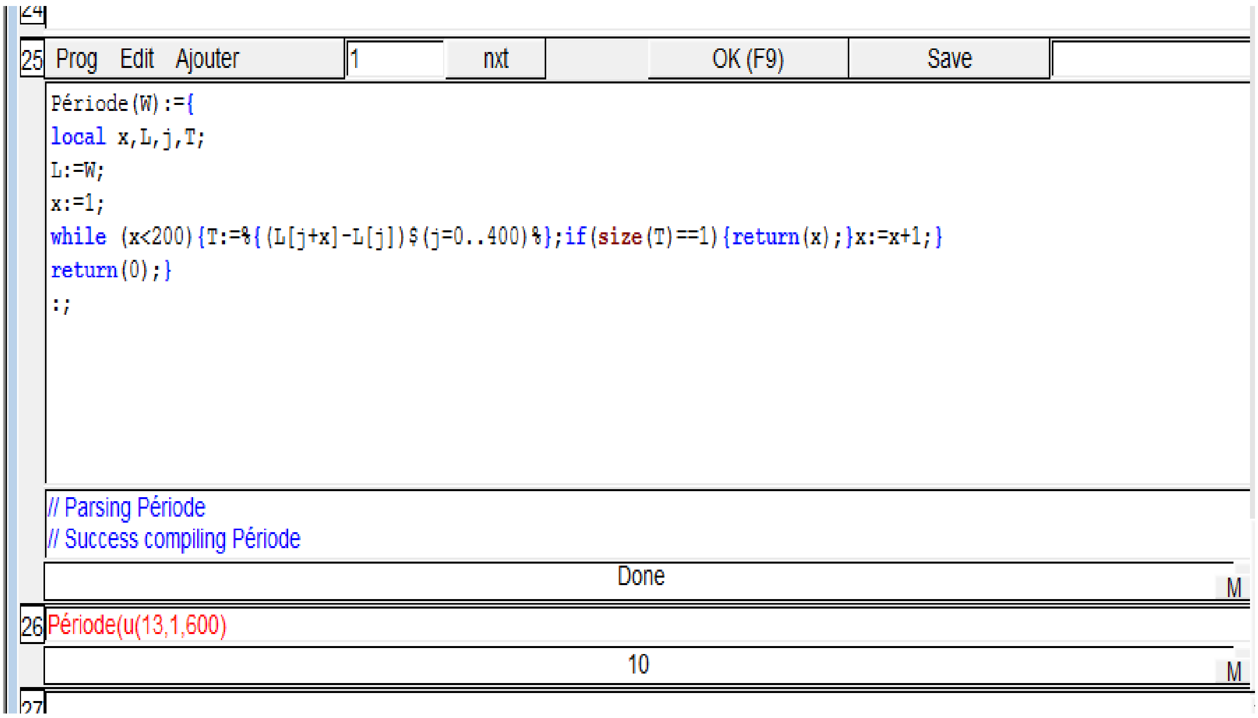
Donc comme $a_s = 1$

$$a_{s-1} \equiv 2^{k_s} \ ;\ a_{s-2} \equiv 2^{k_{s-1}} a_{s-1} \equiv 2^{k_{s-1}+k_s} \ \dots\dots \ 1 \equiv 2^{k_1+k_2+\dots+k-s} \ .$$

Soit m_0 l'ordre de 2 modulo (a-2) ,la dernière congruence montre que $k_1 + k_2 + ... + k_s$ est multiple de m_0. Par définition de l'indice s, tous les termes de la séquence sont différents et sont congrus à une puissance de 2, donc $m_0 = k_1 + k_2 + ... + k_s$. D'où le résultat.

Par exemple pour a = 13, p_1 = ordre de 2 modulo 11, p_1 = 10.

Voici un **programme 4** qui permet de vérifier le résultat précédent. Il renvoie, pour une suite périodique donnée, un candidat pour une période inférieure à 200,.



I-D- Des Réponses aux cinq observations

Observation 1

Si a est de la forme 2^k+1, avec k>0 le motif semble être 100…0, 1 suivi de k-1 zéros.
Ainsi, pour a = 3, 5, 9, 17, 33, les motifs sont respectivement 1, 10, 100, 1000,10000.

Si $a=1+2^k$ alors $a+a_0-2=a+1-2=2^k$ donc $a_s=a_1=1$. La période est k et le motif 10..0 avec k - 1 zéros après le 1.

Observation 2

Si $1+2^k < a <= 1+2^{k+1}$ le motif semble se terminer par1 suivi de k zéros.

Si $a=1+2^{k+1}$ d'après ce qui précède cela est vérifié.

Supposons $1+2^k<a<1+2^{k+1}$

Soit s le premier indice tel que a_s = 1.

On a $a+a_{s-1}-2=2^{k_s}$

$2^k<a-1\leq a+a_{s-1}-2$ donc $2^k<2^{k_s}$.

Comme $a+a_{s-1}-2\leq 2(a-2)$ on a $2^{k_s}\leq 2^{k+2}-2$.

On en déduit $k_s=k+1$.

Ce qui montre que le motif se termine par un 1 suivi de k zéros.

Observation 3

De même, si a est de la forme 2^k+3, k >0 le motif semble être 11..100..0, où 1 et 0 sont répétés k fois.

Pour a = 5, 7, 11, 19 les motifs sont 10, 1100, 111000, 11110000.

Si $a=3+2^k$ alors $a+a_0-2=2(1+2^{k-1})$ donc $a_1=1+2^{k-1}$ comme $k_1=1$

R_2 est impair.

Le motif commence par 11.

De même

$$a+a_1-2=2(1+2^{k-1}+2^{k-2}) \text{ donc } a_2=1+2^{k-1}+2^{k-2} \text{ et } k_2=1 .$$

Le motif commence par 111.

……..

$$a+a_{k-2}-2=2(1+2^{k-1}+2^{k-2}+...2^1) \quad \text{donc} \quad a_{k-1}=1+2^{k-1}+2^{k-2}+...+2^1 \quad \text{et} \quad k_{k-1}=1$$

Le motif commence par 111...1, le chiffre 1 est répété *k* fois.

Ensuite $a+a_{k-1}-2=2(1+2^{k-1}+2^{k-2}+...2^1+2^0)=2^{k+1}$ ce qui donne *k* zéros pour terminer le motif.

Observation-4

Pour certaines valeurs de *a* la période vaut *a* – 3.

Exemple pour 21 la période est 18.

1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1.

Cela est vrai également pour *a*= 5, 7, 13, 15, 21…..

Est ce vrai pour une infinité de a premier?

Une réponse positive à cette dernière question résout positivement la conjecture des nombres "premiers jumeaux "

Il découle de ce qui précède que l'affirmation

"la période est *a* – 3"veut dire que l'ordre de 2 modulo (*a*-2) est a-3 donc le groupe des éléments inversibles de Z/(*a*-2)Z contient au moins *a*-3 éléments. On en déduit que *a*-2 est un nombre premier et que 2 est racine primitive du groupe des éléments inversibles de Z/(*a*-2)Z.

La période est *a*-3 si et seulement si *a*-2 est un nombre premier et "2 est racine primitive du groupe des éléments inversibles de Z/(*a*-2)Z" .

Ainsi, si il existe une infinité de nombres *a* premiers tels que la période est *a*-3, il existe une infinité de "premiers jumeaux".

Observation-5

Souvent lorsque la période est un nombre pair, comme pour a = 13 où elle vaut 10, la première moitié du motif 10111 est conjuguée de la deuxième 01000(les 1 se changent en 0 et les 0 en 1). Le motif est conjugué.

1011101000*1011101000........*

Il y a cependant des exceptions, par exemple si a = 23, la période est 6 et le motif 110000 les trois premiers termes ne sont pas conjugués des trois derniers.

Nous montrerons dans la deuxième partie le résultat suivant.

Théorème.

Soit p_1 la période de la suite, le motif est conjugué, si et seulement si, p_1 est pair et *a*-2 divise $2^{\frac{p_1}{2}}+1$.

Remarque 1 :

Si $a = 2^k + 3$ on sait que la période est paire($p_1 = 2k$) et aussi que le motif est conjugué, on a $a-2=2^{\frac{p_1}{2}}+1$.

Remarque 2 :

Si la période est égale à $a - 3$, elle est paire et on sait que a - 2 est premier et divise $2^{a-3}-1$ (Fermat). Comme $2^{a-3}-1=(2^{\frac{a-3}{2}}-1)(2^{\frac{a-3}{2}}+1)$ il divise l'un des facteurs.

L'ordre de 2 modulo(a - 2) étant a - 3, il ne peut diviser le premier facteur. Donc le théorème s'applique.

Si la période est égale à *a* - 3 alors le motif est conjugué.

Remarque 3 :

Si $a = 23$ on a vu que $p_1 = 6$ et que le motif n'est pas conjugué. 6 est l'ordre de 2 modulo 21.

21 divise $2^6 - 1 = 63$ mais 21 ne divise pas $9 = 2^3 - 1$.

E- À propos de la période "verticale" dans le tableau

On se sert de l'écriture de a en base 2 :

$$a = x_0 + x_1 2^1 + x_2 2^2 + ... + x_n 2^n \quad .$$

L'idée est que les m-premiers coefficients x_i dans l'écriture de a en base 2 déterminent les m-premiers termes de la suite r_n .

Vérifions seulement que x_0 et x_1 déterminent r_1 et r_2 .

a est impair donc $x_0 = 1$ et pour tout i, $x_i = 0$ ou 1. Comme $a > 1$ l'un des x_i, $i \# 0$, n'est pas nul.

La parité du terme R_2 dépend uniquement de x_1.

L'égalité **(I)** donne a +1 – 2 = $2(x_1 + x_2 2^1 + ... + x_n 2^{n-1})$

Si $x_1 = 1$ alors $a_1 = 1 + x_2 2^1 + ... + x_n 2^{n-1}$ et $k_1 = 1$ donc R_2 est impair.

Si $x_1 = 0$ alors $k_1 > 1$ et R_2 est pair.

Donc x_0 et x_1 déterminent r_1 et r_2 ..

En ajoutant 2 à a, on change x_1 en son conjugué donc la parité de R_2 change.

En ajoutant 4 à a, x_0 et x_1 sont inchangés.

3 1,1,
5 1,0,

7 1,1,

9 1,0,

Ceci explique le motif vertical 10.... sur la deuxième colonne.

On montre de même que x_0, x_1 et x_2 déterminent r_1 , r_2 et r_3 .

Deuxième partie Étude d'une fonction

c est un nombre impair différent de 1

Dans cette partie nous allons établir un lien entre motif et orbite, ce qui permettra,dans la troisième partie, de comprendre pourquoi les suites sont périodiques.

Soit f définie sur N par :

$$f(n)=\frac{c+n}{2} \quad \text{si n est impair sinon} \quad f(n)=\frac{n}{2} \ .$$

Elle est bien définie car si n est impair, 2 divise $c + n$.

.

II-A propriétés

On a les propriétés suivantes :

II-A-1 $f(c) = c$ et $f(0) = 0$.

II-A-2 Si $c < n$ alors $f(n) < n$. C'est clair si n est pair et si n est impair alors $c < n$ implique $2c < c + n < 2n$ et finalement $c < f(n) < n$.

On remarque que si n est impair et plus grand que c l'image reste plus grande que c.

II-A-3 si $x + y$ est impair alors $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Supposons(sans perdre de généralité) x pair et y impair,

$$f(x+y)=\frac{x+y+c}{2}$$

$f(x)=\frac{x}{2}$ et $f(y)=\frac{y+c}{2}$ d'où le résultat.

II-A-5 La restriction $\bar{f}$ de f à E={1,2,...c-1} est une permutation de E

démonstration

1)-Si x appartient à E alors $f(x)$ appartient à E.

Comme x appartient à E on a $1\leq f(x)$ et $x < c$,

- si x est pair c'est clair
- si x est impair $2x < c + x < 2c$ et $x < f(x) < c$. .

Donc $f(E)\subseteq E$.

On remarque que si x appartient à E et est impair alors son image est plus grande.

2)- La restriction $\bar{f}$ de f à E est injective.

Si x_1 et x_2 sont deux éléments de E, montrons que

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{entraîne} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \quad .$$

Si x_1 et x_2 ont la même parité cela est évident. Sinon, supposons (sans perdre de généralité) x_1 pair et x_2 impair et raisonnons par l'absurde,

$f(x_1) = f(x_2)$ implique $\frac{x_1}{2} = \frac{c+x_2}{2}$ soit $x_1 > c$ contraire à l'hypothèse, x_1 appartient à E donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

E étant fini, la restriction $\bar{f}$ de f à E est bijective : c'est une permutation de E.

Remarque.

Si x et y sont deux antécédents distincts d'un élément de E pour f, l'un est pair et plus grand que c et l'autre impair et plus petit que c.

II-B-Orbites

II-B-1 Définition et notation

Soit σ une permutation d'un ensemble fini F et x un élément de F, l'orbite de x est par définition l'ensemble $O_x = x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots\ldots, \sigma^{h-1}(x)$ h étant le plus petit entier tel que $\sigma^h(x) = x$.

Ainsi la suite $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots\ldots, \sigma^{h-1}(x), \sigma^h(x), \sigma^{h+1}(x), \ldots\ldots\ldots\ldots$ est périodique et son motif est précisément $x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots\ldots, \sigma^{h-1}(x)$.

Notation

Soit la suite $T_{(n)}$ définie par récurrence pour d dans N par

$T_{(1)} = d$ et pour tout $n > 1$ $T_n = f(T_{n-1})$.

Considérons la suite binaire associée $t_{(n)}$ qui prend les valeurs 0 ou 1 suivant que T_n est pair ou impair.

On a le résultat suivant :

si d appartient à E, la suite $T_{(n)}$ (respectivement $t_{(n)}$) est périodique et le motif est O_d (respectivement o_d).

Exemple pour $c = 21$ et E={1,2,......20}, si $d = 1$, les premiers termes de la suite $T_{(n)}$ sont

$$1,11,16,8,4,2,1,11,16,8,4,2,1,11 \ldots\ldots \quad .$$

Le motif est $O_1 = 1,11,16,8,4,2$ et $o_1 = 110000$.

Remarque : si $d = 0$ ou $d = c$, la suite est stationnaire.

II-B-2 Cardinal d'une orbite

Par définition de f, c = 2f(n) – n pour tout n impair et 0 =2f(n) – ns i n est pair.

n et 2f(n) sont congrus modulo c.

Ce résultat appliqué à l'orbite de x, $x, \bar{f}(x), \bar{f}^2(x), \ldots\ldots, \bar{f}^{h-1}(x)$ pour x élément de E donne, en partant de $\bar{f}^{h-1}(x) \equiv 2\mathrm{x}$, $2^h x \equiv x$ modulo c.

C'est à dire $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$ ***divise*** 2^h+1 .

Comme h est le plus petit entier ayant cette propriété h est l'ordre de 2 modulo $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$.

Ainsi, si x appartient à E, le cardinal de l'orbite de x sous l'action de $\bar{f}$ est l'ordre de 2 modulo $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$.

Remarque : l'ordre de $\bar{f}$ dans le groupe des permutations de E est l'ordre de 2 modulo c.

II-B-3 Orbite conjuguée

Il est question dans ce paragraphe d'une orbite d'un élément de E sous l'action de $\bar{f}$ dont le cardinal est pair $x, \bar{f}(x), \bar{f}^2(x), \ldots\ldots, \bar{f}^{l-1}(x), \bar{f}^{l}(x), \bar{f}^{l+1}(x), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{f}^{2l-1}(x)$.

On dit que l'orbite est conjuguée si et seulement si pour i variant de 0 à l-1 $\bar{f}^{(i)}(x)$ *et* $\bar{f}^{(l+i)}(x)$ sont de signes opposés.

Conséquence $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)$ est un nombre impair pour tout i de 0 à l-1.

Exemple : pour c = 15, E = {1,2,...,13,14} et il y a quatre orbites :

$O_1=1,8,4,2$ $O_3=3,9,12,6$ $O_5=5,10$ et $O_7=7,11,13\,14$, seules $O_3=3,9,12,6$ et $O_5=5,10$ sont conjuguées.

Nous démontrons deux résultats :

résultat 1

***O_x* conjuguée si et seulement si** $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)=c$ **pour tout *i* variant de 0 à (*l*-1).**

La condition est clairement suffisante car c est impair. Montrons qu'elle est nécessaire.

Supposons O_x conjuguée, les sommes $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)$ sont impaires, considérons l'ensemble de celles strictement plus grandes que c.

Supposons que cet ensemble soit non vide, il possède un plus petit élément c'est à dire une somme $s=\bar{f}^{j}(x)+\bar{f}^{l+j}(x)$ (pour un certain j) plus petite que toutes les autres mais plus grande que c.

Comme cette somme est impaire son image par f est $\bar{f}^{j+1}(x)+\bar{f}^{l+j+1}(x)$ (propriété II-A-3).

Elle est plus grande que *c* mais strictement plus petite que s (propriétés II-A-2) d'où une contradiction.

On montre de façon analogue que l'ensemble des sommes $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)$ strictement plus petites que *c* est vide. D'où le résultat.

résultat 2

***O**$_x$* **conjuguée si et seulement si** $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$ **divise** $2^{l}+1$.

Si O_x est conjuguée $x+\bar{f}^{(l)}(x)=c$ et $x+\bar{f}^{(l)}(x)\equiv 2^{21}x+2^{l}x \quad modulo \quad c$

donc *c* divise $2^{l}x(2^{l}+1)$ et $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$ divise $2^{l}+1$.

Réciproquement

Si $\dfrac{c}{pgcd(x,c)}$ divise $2^{l}+1$ alors $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)\equiv 0 \quad modulo \quad c$ comme

$0<\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)<2\text{c}$ donc $\bar{f}^{i}(x)+\bar{f}^{l+i}(x)=c$.

En particulier pour *c* = *a*-2 et *b*= 1 cela donne

Théorème

soit p la période de la suite

Le motif est conjugué, si et seulement si, p est pair et a-2 divise $2^{\frac{p}{2}}+1$.

Ce résultat solutionne l'observation 5 de la première partie.

Troisième partie *b* varie dans N

On rappelle que la suite $(U_n)_{n>0}$ vérifie

$$U_1 = b \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_{n+1} = \frac{a}{2} U_n + 1 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ U_{n+1} = \frac{a}{2}(U_n + a^n) + 1 & \text{si } U_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Elle dépend de deux paramètres *a* et *b*, *a* et *b* sont des entiers naturels, de plus *a* est impair $a > 1$.

Dans cette partie nous allons montrer que pour toutes les valeurs de *b*, la suite binaire associée $(u_n)_{n>0}$ est ultimement périodique.

Avec pour période

$$p = ordre\ de\ 2 \quad modulo\left(\frac{a(a-2)}{pgcd(b-1,a)}\right) \quad .$$

On montre également qu'elle est périodique si et seulement si *b* vérifie $0 \leq b < a$ **.**

III-A- Le premier terme vérifie $0 \leq b < a$ les suites binaires associées sont périodiques

On le sait déjà pour $b = 1$, distinguons deux cas selon la parité de *b*.

III-A 1- *b* est impair

$$U_2 = \frac{(b+a)*a}{2} + 1 = \frac{(b+a)*a}{2} - a - b + 1 + a + b$$

On pose $a^2 - 2a + b(a-2) + 2 = 2^l_1 a_1$ et $b(a-2) + 2 = a_0$, on obtient $a^2 - 2a + a_0 = 2^l_1 a_1$ et $U_2 = 2^{l_1 - 1} a_1 a^0 + a + U_1$ avec $a_0 < a(a-2)$.

Comme dans la première partie, si $l_1 > 1$ après une suite de termes pairs on arrive à $U_{l_1+1} = a_1 a^{l_1 - 1} + U_{l_1}$ qui est impair,puis

$$U_{l_1+2} = (a_1 a^{l_1 - 1} + a^{l_1+1}) \frac{a}{2} + U_{l_1+1}$$

$$U_{l_1+2} = \frac{a^{l_1}(a_1 + a^2 - 2a)}{2} + a^{l_1+1} + U_{l_1+1} \quad ,$$

si $l_1=1$ $\quad U_3=\dfrac{(a_1+a^2)a}{2}+U_2=\dfrac{(a_1+a^2-2\mathrm{a})a}{2}++a^2+U_2$.

On pose $a^2-2\mathrm{a}+a_1=2_2^{l}a_2$ etc.....

On continue comme dans la première partie.

On obtient ainsi une suite

b , $2^{k_1-1}a_1$, $2^{k_1-2}a_1$,… , a_1 , $2^{k_2-1}a_2$,… , a_2 , ...

que l'on peut comparer avec

a_0 , $2^{k_1-1}a_1$, $2^{k_1-2}a_1$,… , a_1 , $2^{k_2-1}a_2$,… , a_2 , ...

qui est la suite $T_{(n)}$ ***pour c = a(a-2) et*** $d=a_0=b(a-2)+2$ ***et*** $d<a(a-2)$

On sait qu'elle est périodique et que la période est p = $\left(\dfrac{a(a-2)}{pgcd(a_0,a(a-2))}\right)$

comme a₀ et b sont impairs les suites binaires associées coïncident.

La relation $a_0=b(a-2)+2$ montre que a_0 , qui est impair, est premier avec $a-2$ donc $pgcd(a_0,a(a-2))=pgcd(a_0,a)$.

Elle montre également que $pgcd(a_0,a)=pgcd(b-1,a)$, on en déduit le résultat

– **la période est l'ordre de 2 modulo** $\left(\dfrac{a(a-2)}{pgcd(b-1,a)}\right)$.

Remarque1.

Pour *b*= 1 *pgcd*(0,*a*) = a, on retrouve le résultat de la première partie,

p =ordre de 2 modulo a-2 .

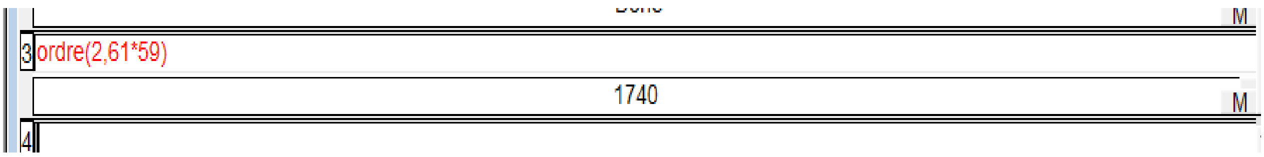
Remarque2.

Pour *a* fixé, les périodes en fonction de *b* sont multiple de p_1 .

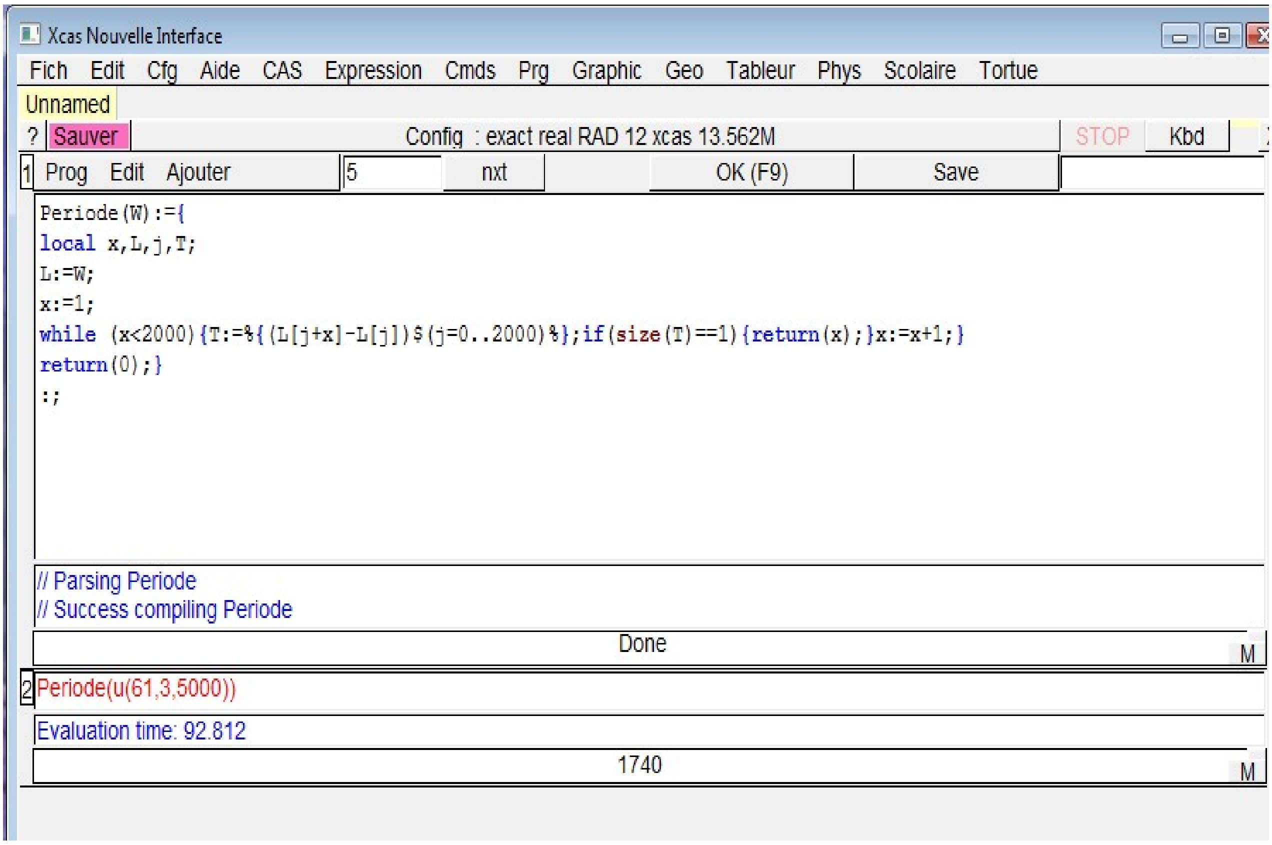
En effet, si $\dfrac{a(a-2)}{pgcd(b-1,a)}$ divise 2^p-1 alors $a-2$ divise 2^p-1 donc *p* est multiple de p_1 .

Remarque3.

Pour *b*=3 et *a* = 61, la formule fournit une période assez grande 1740.



Ce qu'on vérifie (t<100 secondes) avec le programme4 en le modifiant légèrement.



III-A 2- *b* est pair

Par définition le terme suivant est $U_2=\frac{b*a}{2}+1=\frac{b*a}{2}-b+1+b$, on pose $b(a-2)+2=2^{l_1}a_1$,

il vient $U_2=2^{l_1-1}a_1a^0+U_1$. On a $b(a-2)+2<a(a-2)$ donc $2^{l_1}a_1\le a(a-2)$ soit t_1 le premier indice tel que $2^{t_1}a_1>a(a-2)$ posons $a_0=2^{t_1}a_1-a(a-2)$,

a_0 est impair et $a_0 = a(a - 2)$

La suite

$b\ ,\ 2^{l_1-1}a_1\ ,\ 2^{l_1-2}a_1\ ,\dots\ ,\ a_1\ ,\ 2^{l_2-1}a_2\ ,\dots\ ,\ a_2\ ,\ \dots..$

peut être comparer à la suite $T_{(n)}$ ***pour c = a(a-2) et*** $a_0=2^{t_1}a_1-a(a-2)$

$a_0\ ,2^{t_1-1}\ ,\dots,\ 2^{l_1}a_1\ \ 2^{l_1-1}a_1\ ,\ 2^{l_1-2}a_1\ ,\dots\ ,\ a_1\ ,\ 2^{l_2-1}a_2\ ,\dots\ ,\ a_2\ ,\ \dots..$

dans la quelle on a supprimé les premiers termes jusqu'à $2^{l_1}a_1$ ***et substitué*** $2^{l_1}a_1$ ***à b qui sont tous les deux pairs.***

Elle est périodique et la période est l'ordre de 2 modulo($\frac{a(a-2)}{pgcd(a_0,a(a-2))}$ ***).***

Comme $2^{l_1}a_1$ ***et b sont tous les deux pairs les suites binaires associées coïncident.***

On a $a_0=2^{t_1-l_1}(b(a-2)+2)-a(a-2)$ donc a_0 qui est impair est premier avec a - 2 et

$pgcd\,(a_0, a(a-2)) = pgcd\,(a_0, a)$, de plus l'expression de a_0 montre que

$$pgcd\,(a_0, a) = pgcd\,(b-1, a)$$

– **la période est l'ordre de 2 modulo** $\left(\dfrac{a(a-2)}{pgcd(b-1\,,a)}\right)$

remarque :

pour a = 15

ordre de 2 modulo 13*15 = ordre de 2 modulo13 = ordre de 2 modulo3*13

= ordre de 2 modulo 5*13 = 12

la période est la même quelque soit *b*.

Cela est vrai également lorsque a appartient à la séquence

15,21,39,63,69,111,141,159,183,195,213,309,315,381,411......

Pour tous ces nombres

- a semble être multiple de 3!
- a-2 semble être premier!

L'examen des quatre termes après 411 qui prolongent cette séquence permet d'en savoir plus.

III-B- Les suites associées sont ultimement périodiques si le premier terme vérifie $a \leq k$.

$$b \;,\; 2^{l_1-1}a_1 \;,\; 2^{l_1-2}a_1 \;,\ldots\;,\; a_1 \;,\; 2^{l_2-1}a_2 \;,\ldots\;,\; a_2 \;,\; \ldots..$$

Si k est impair $a^2-2\text{a}+k(a-2)+2=2_1^l a_1$ et $2^{l_1-1}a_1 > a(a-2)$.

À partir du second terme, les termes décroissent jusqu'au premier terme de la suite inférieur à $a(a-2)$ qui détermine l'entrée dans le motif.

Si b est pair $b(a-2)+2=2^{l_1}a_1$ **,** on a pas forcément $2^{l_1-1}a_1 > a(a-2)$ et l'entrée dans le motif pourra se faire dès le deuxième terme.

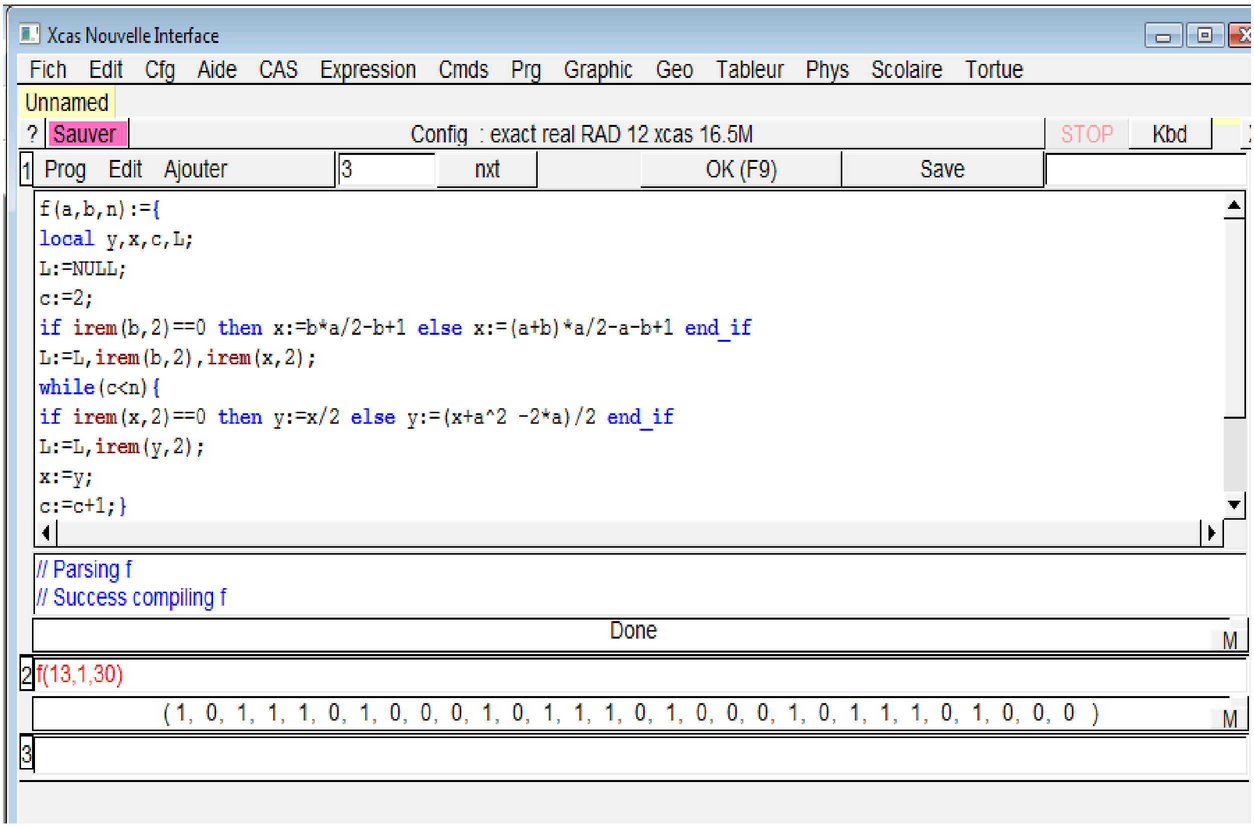
Cependant si $2^{l_1-1}a_1 < a(a-2)$ comme $2^{l_1}a_1 > a(a-2)$ l'antécédent de $2^{l_1-1}a_1$ dans E est impair. Comme b est pair, la suite binaire associée n'est pas périodique.

Dans les deux cas la suite est ultimement périodique et

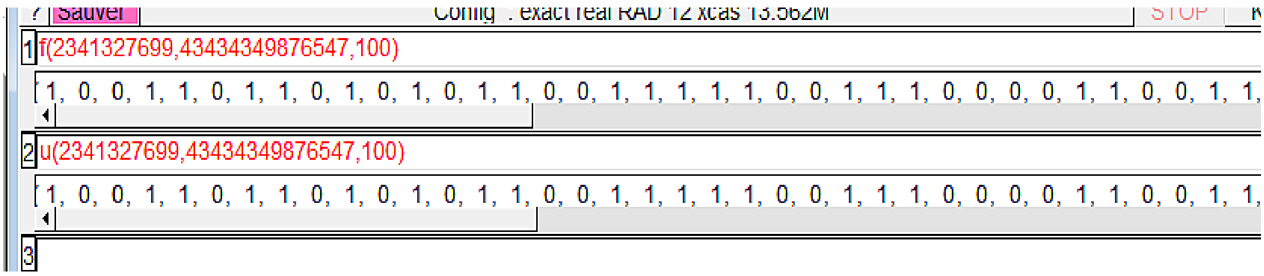
$$\boldsymbol{p} = \textbf{l'ordre de 2 modulo } \frac{a(a-2)}{pgcd(b-1\,,a)}$$

Voici un **programme5** qui remplace le programme1 de la première partie donnant u(a,b,n).

Il utilise la fonction f pour $c = a(a\text{-}2)$ et évite les nombres astronomiques(lesquels ne semblent pas gêner Xcas).



Comparaison des deux programmes pour a = 2341327699 et b = 43434349876547



Pour aller plus loin

A- Dans une autre direction

Pour a =9 et b = 1 la période est 3 et le motif 100. On peut essayer d'établir directement ce résultat à partir de la suite $R_{(n)}$.

Nous connaissons les premiers termes:

$R_1 = 1$, R_2, $= 46$, $R_3 = 208$, $R_4 = 937$, $R_5 = 33742$ et $R_6 = 151840$.

On établit par récurrence, pour tout nombre j dans N, les trois formules suivantes dans lesquelles

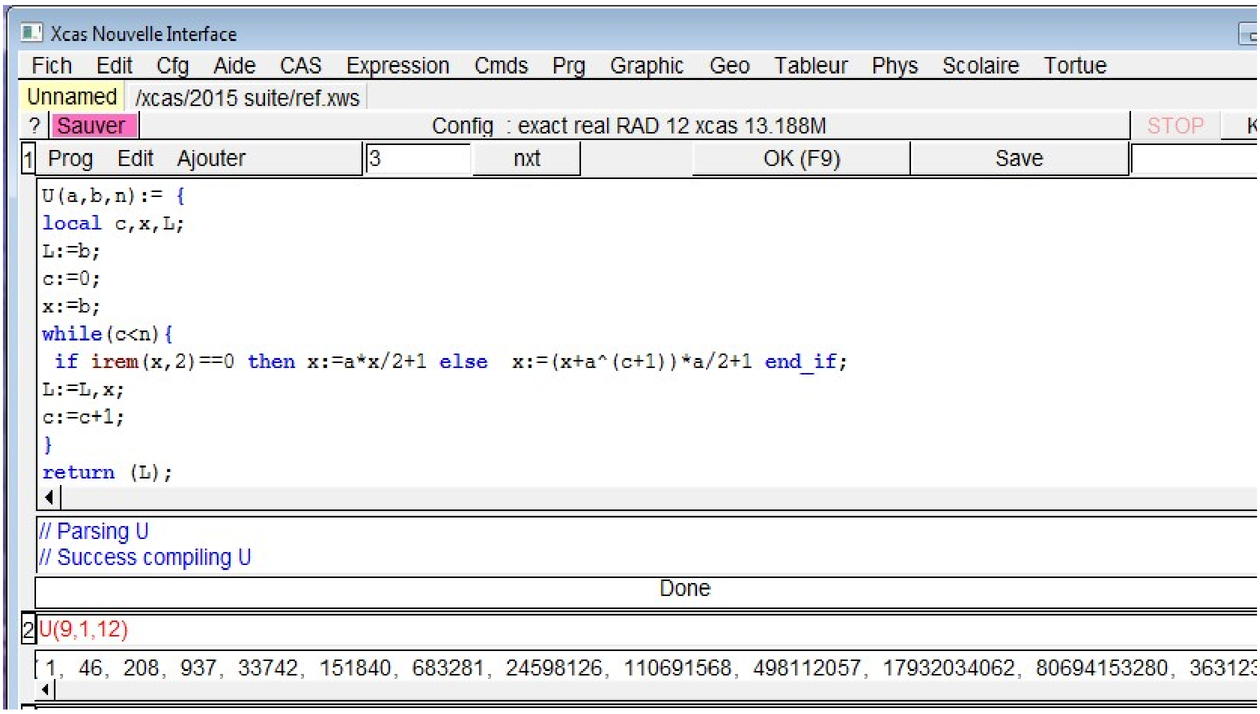
$$B(j)=\frac{9^{(3j)}-1}{9^3-1} \quad .$$

$R_{1+3j} = (R_4 - R_1)B(j) + R_1$, $R_{2+3j} = (R_5 - R_2)B(j) + R_2$, $R_{3+3j} = (R_6 - R_3)B(j) + R_3$.
Elles montrent clairement la parité des termes car R_1 et R_4 sont impairs donc R_{1+3j} est impair, R_2, R_3, R_5 et R_6 sont pairs donc R_{2+3j} et R_{3+3j} sont pairs.

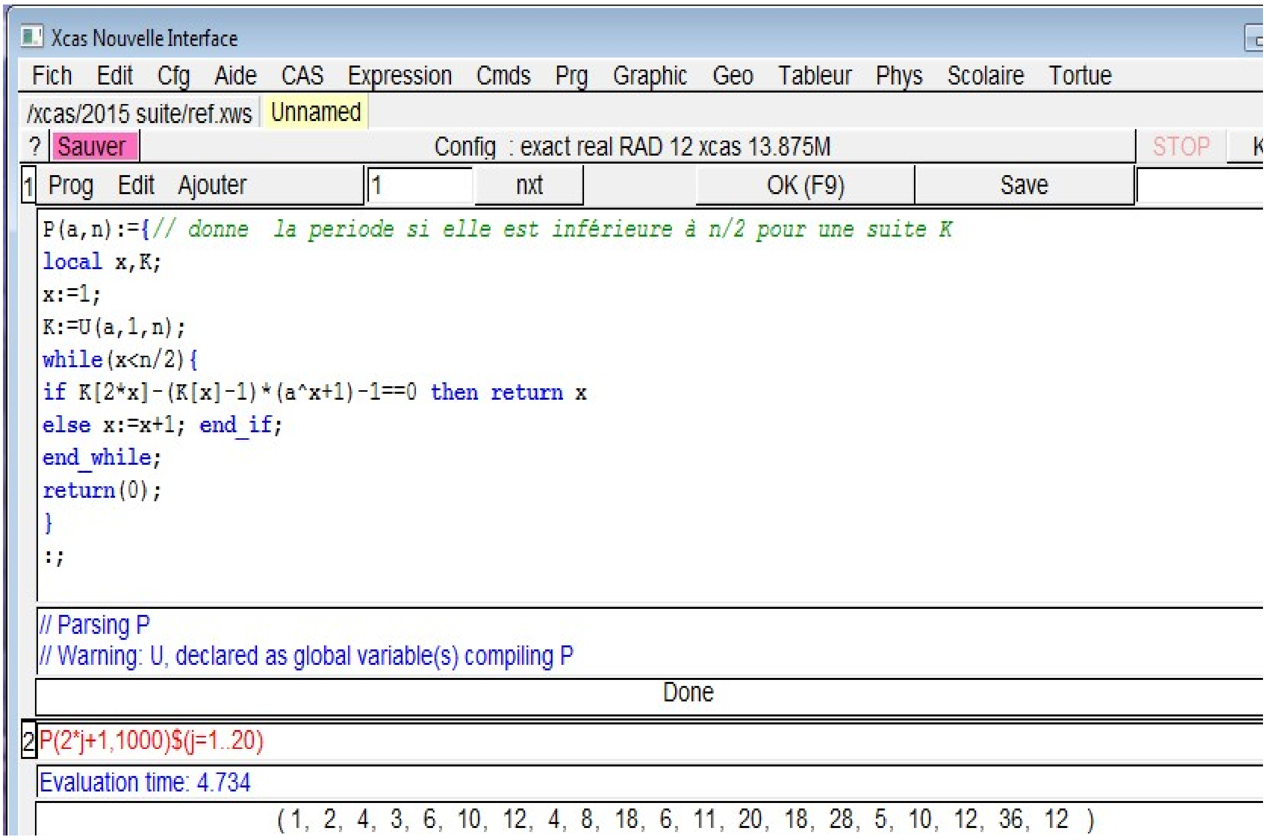
B- Un autre programme pour la période lorsque *b = 1*

Il prend en compte directement les termes de la suite $R_{(n)}$ qui n'est pas périodique. Ces termes s'obtiennent en modifiant le programme1.

Par exemple pour a = 13 et b = 1



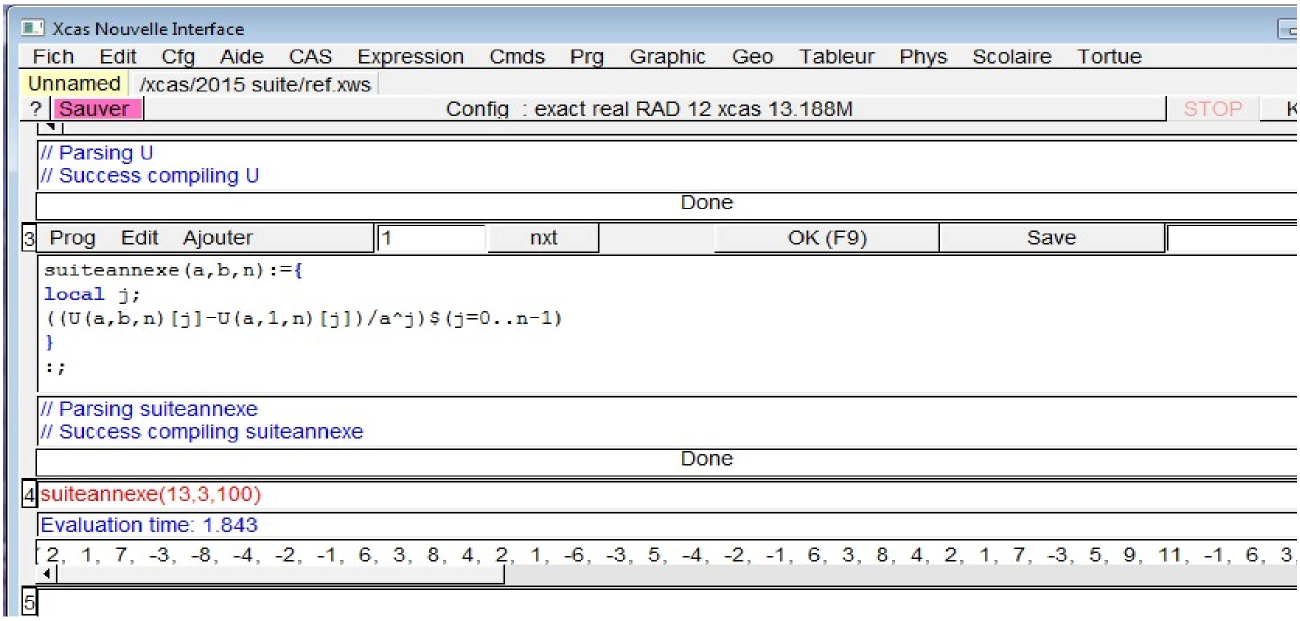
Le programme suivant donne la période de la suite associée $r_{(n)}$ pour n assez grand.



C- Une suite intéressante

La suite $V(n)=\dfrac{U(n)-R(n)}{a^{n-1}}$ est ultimement périodique.

Exemple pour a = 13 et b =3



Les cent premiers termes sont

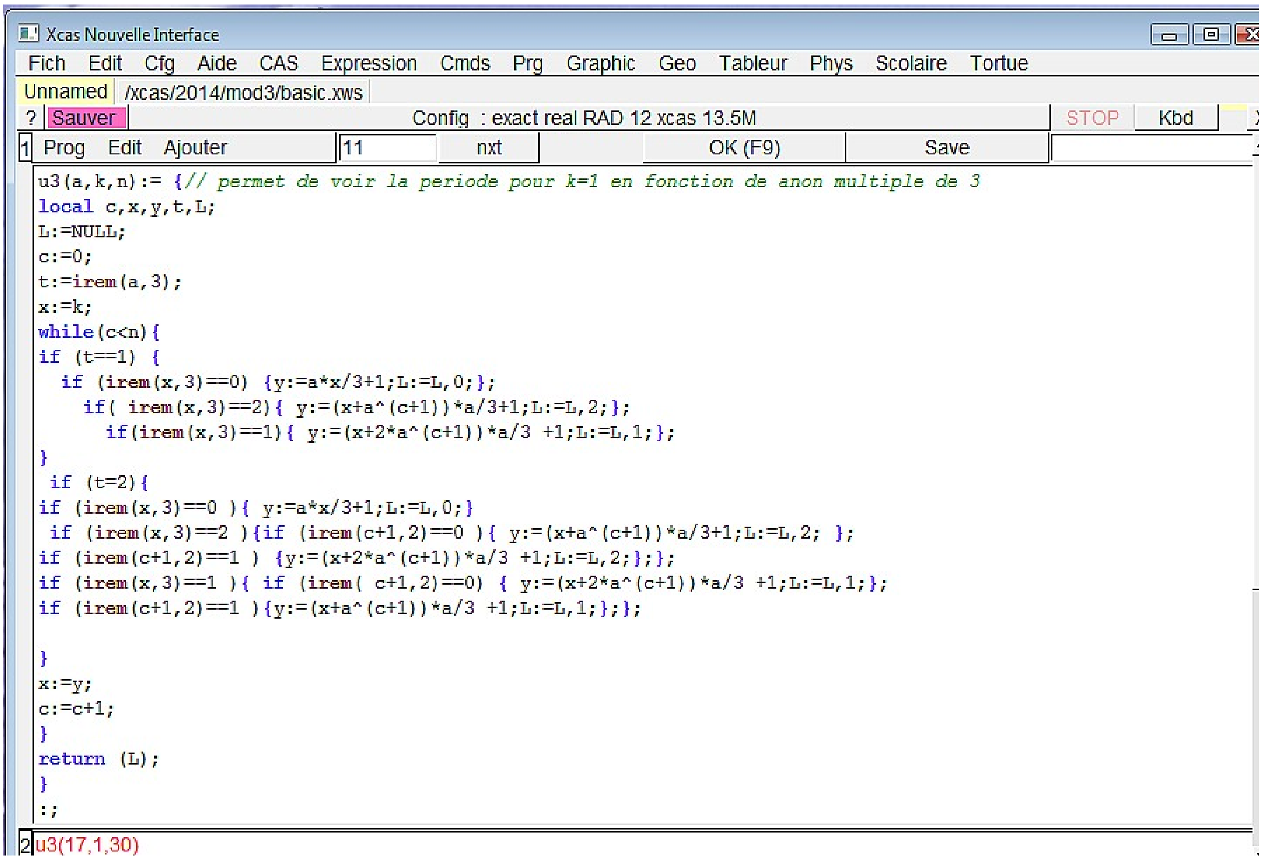
2,1,7,-3,-8,-4,-2,-1,6,3,8,4,2,1,-6,-3,5,-4,-2,-1,6,3,8,4,2,1,7,-3,5,9,11,-1,6,3,-5,-9,2,1,7,10,5,-4,-2,-1,-7,-10,-5,-9,2,1,7,-3,5,-4,-2,-1,6,3,8,4,2,1,7,-3,-8,-4,-2,-1,6,3,8,4,2,1,-6,-3,5,-4,-2,-1,6,3,8,4,2,1,7,-3,5,9,11,-1,6,3,-5,-9,2,1,7,10. La période est 60.

D- Suites ternaires

Passons aux suites avec des 0 des 1 et des 2.

Le programme est plus long, il le serai encore plus avec tous les chiffres de 0 à 9.

Si *a* est congru à 1 modulo 3 on observe une grande ressemblance avec ce qui a été fait précédemment.



1,1,2,2,0,0,1,1,2,2,0,0,1,1,2,2,0,0,1,1,2,2,0,0,1,1,2,2,0,0