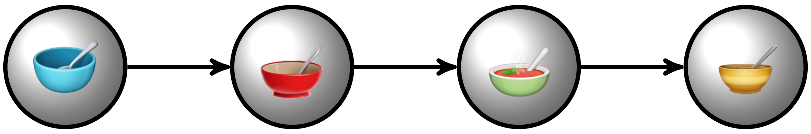
La subitisation

Alain Busser

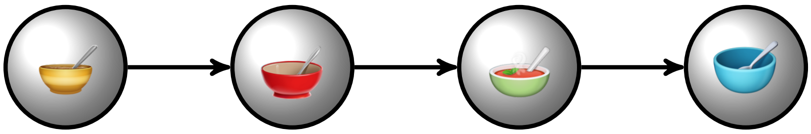
9 décembre 2023

1 chemins

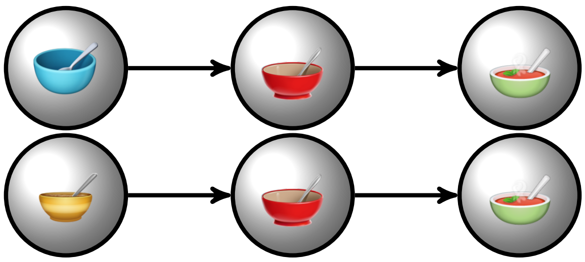
La catégorie Quatre comprend, entre autres, l'objet *Quatre bols* :



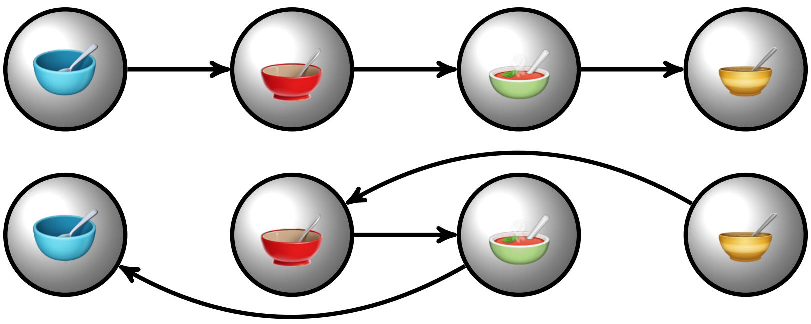
Voici un autre objet de la même catégorie :



Bien que cet objet mérite aussi de s'appeler *quatre bols*, ce n'est pas le même objet : ces objets viennent de l'ajout (un foncteur) à la fin, d'un bol qui n'est pas le même, à deux objets différents de la catégorie Trois [1] :

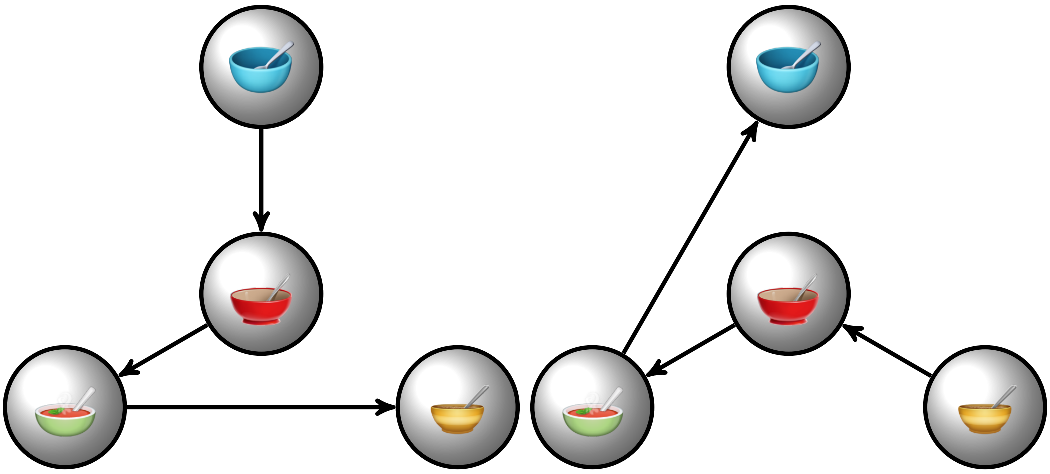


En redessinant autrement le second objet de la catégorie Quatre, on voit mieux le morphisme qu'il y a entre les deux objets :

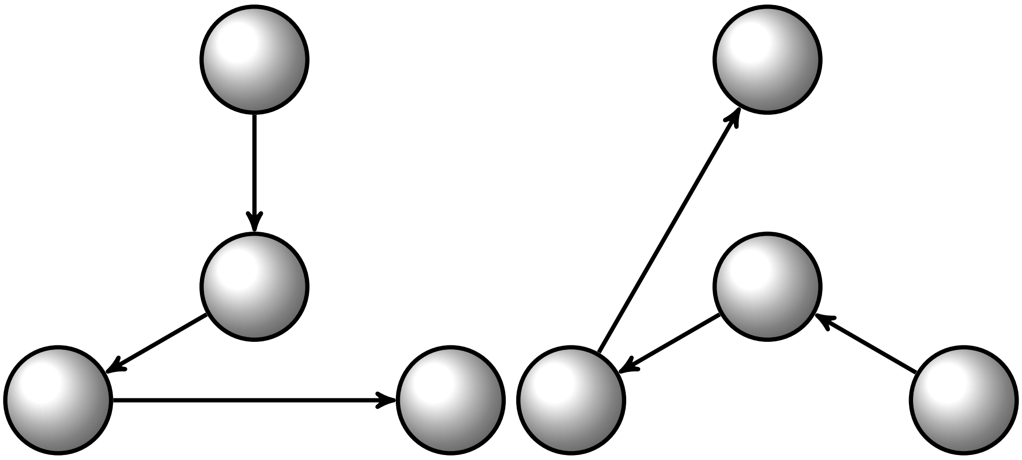


On peut encore les redessiner :

1. On dit que ces deux objets de la catégorie Trois sont *en cobordisme*. C'est l'objet de la catégorie Quatre qui est appelé cobordisme. Cette notion est due à Henri Poincaré.



Les *quatre bols* peuvent être reliés entre eux dans l'ordre que l'on veut, sans que cela change leur nombre. on peut donc considérer que le comptage revient à trouver un *chemin* comme ceux-ci :

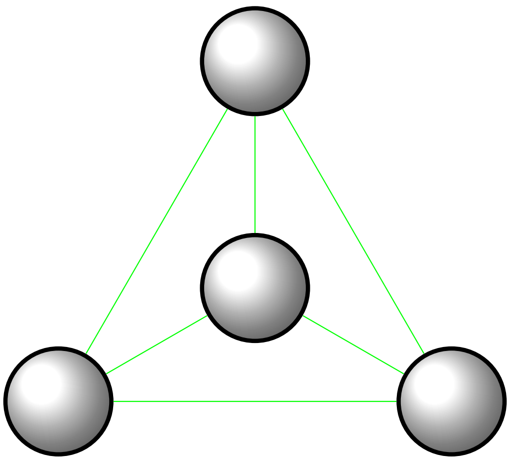


Il semble que la compréhension du fait que différents chemins donnent le même nombre (un de plus que la longueur du chemin) soit une étape importante de la construction du nombre.

Un chemin qui passe par tous les sommets d'un graphe est dit *hamiltonien*[2]. Ainsi, compter, c'est trouver un chemin hamiltonien dans un graphe, et construire le nombre, c'est comprendre que le résultat du comptage ne dépend pas du chemin hamiltonien choisi.

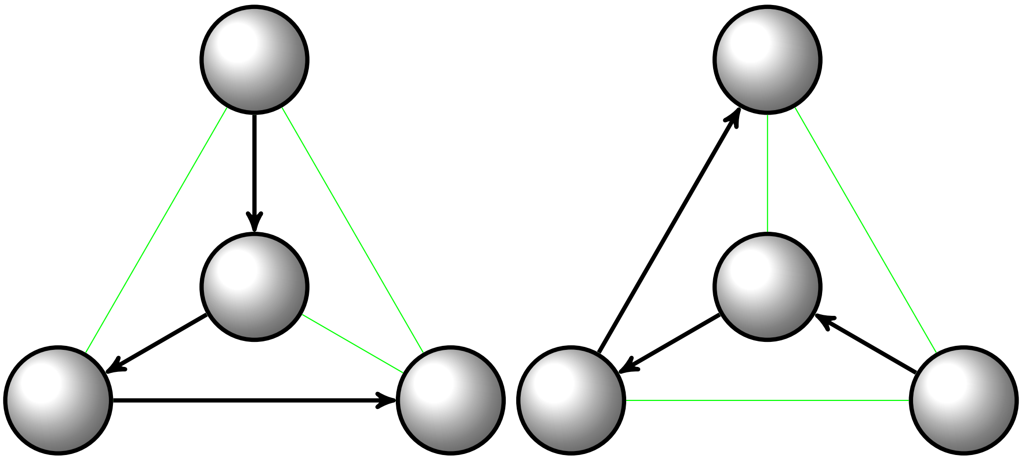
2 Graphes complets

Les deux chemins hamiltoniens vus ci-avant sont extraits de ce graphe :

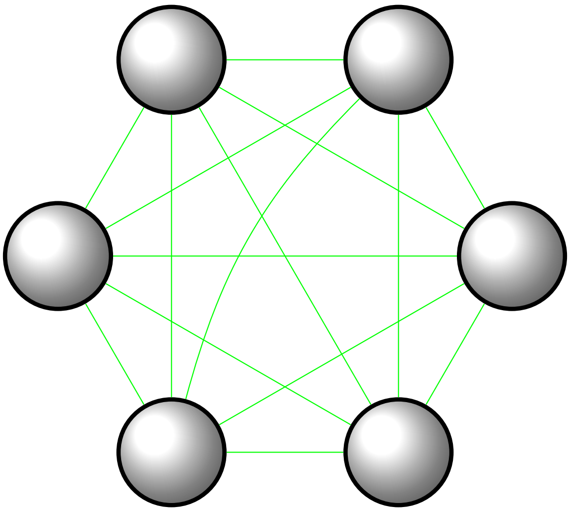


2. En référence à l'astronome irlandais Rowan Hamilton qui a commercialisé un jeu consistant justement à dessiner un chemin hamiltonien en reliant des clous avec de la ficelle.

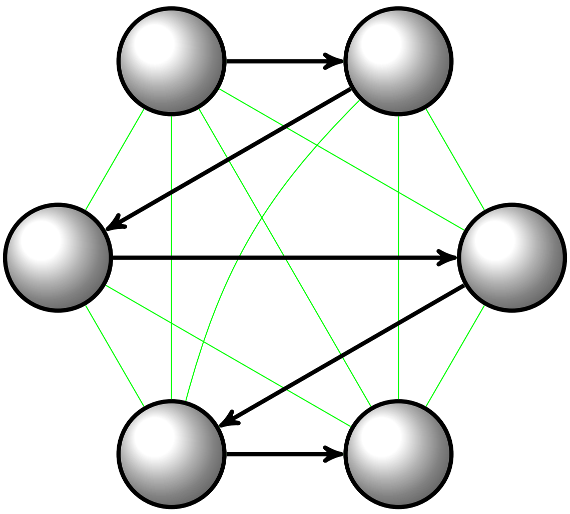
En effet :

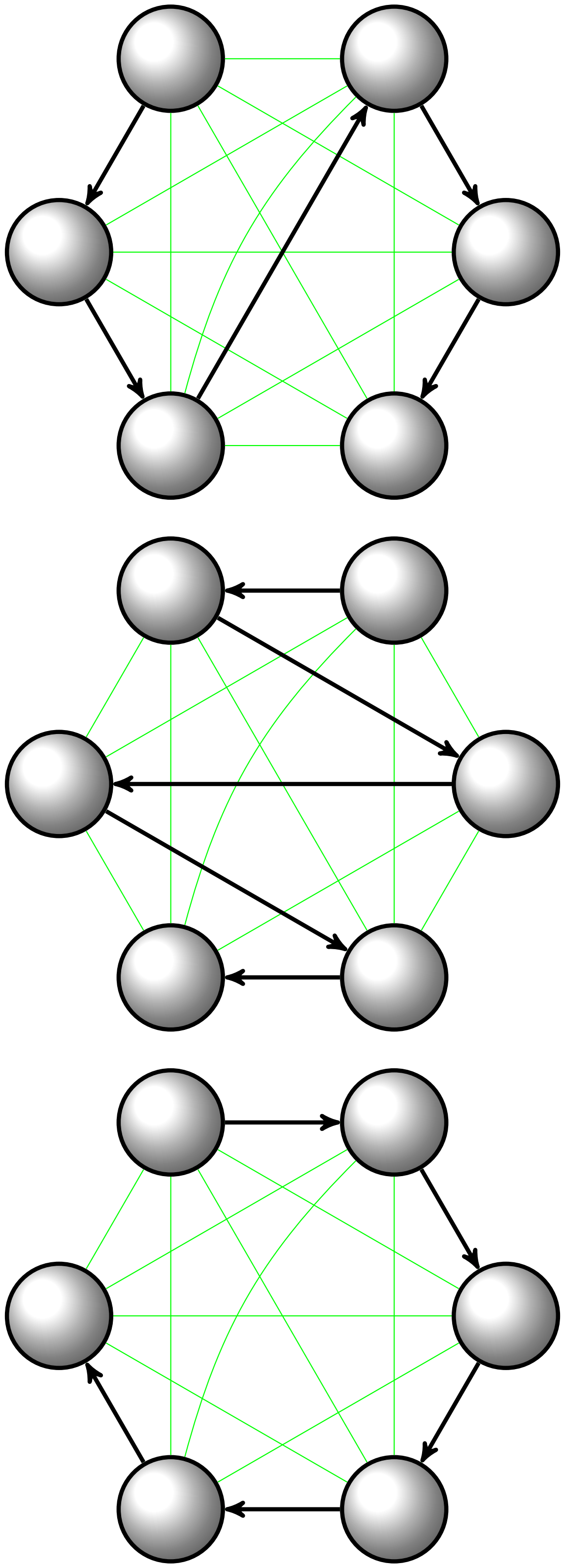


Il y a 24 chemins hamiltoniens dans ce graphe complet, représentant le nombre 4. Il y a 720 chemins hamiltoniens dans celui-ci (représentant le nombre 6) :

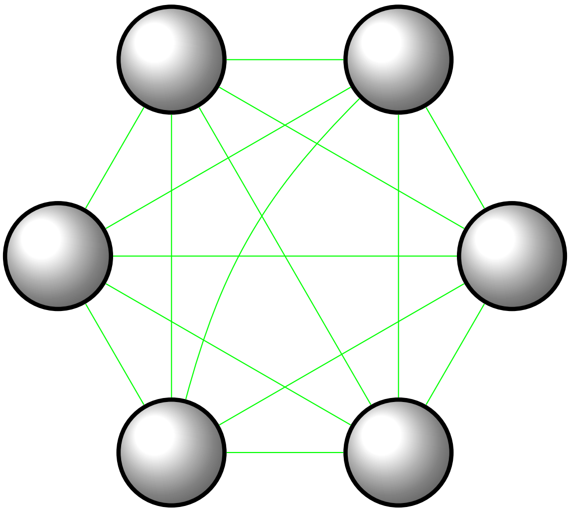


En voici quelques-uns, correspondant à divers parcours de lecture d'un texte :

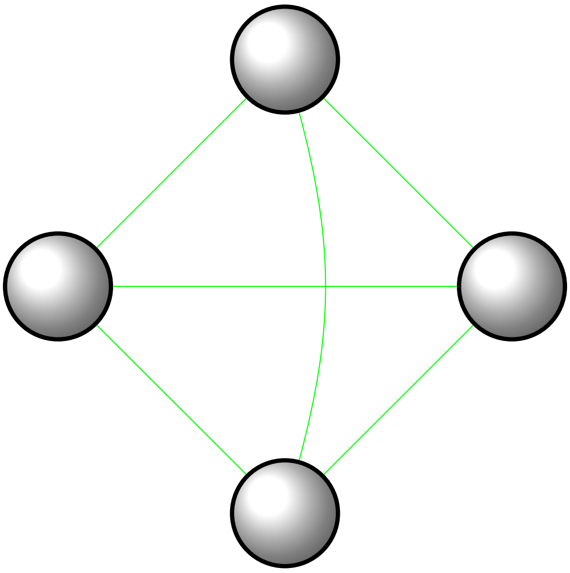




La recherche d'un chemin hamiltonien est un problème réputé difficile, on s'attend donc à ce que cela prenne plus de temps d'en trouver un sur le graphe représentant 6



que sur le graphe représentant 4 :

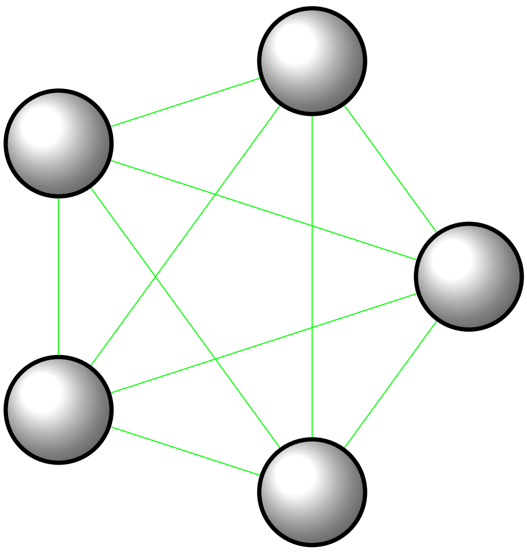


Ceci amène à modéliser les nombres entiers par des graphes complets, le foncteur de passage au nombre suivant consistant à

- rajouter un sommet au graphe précédent,
- puis relier le nouveau sommet à chacun des sommets précédents.

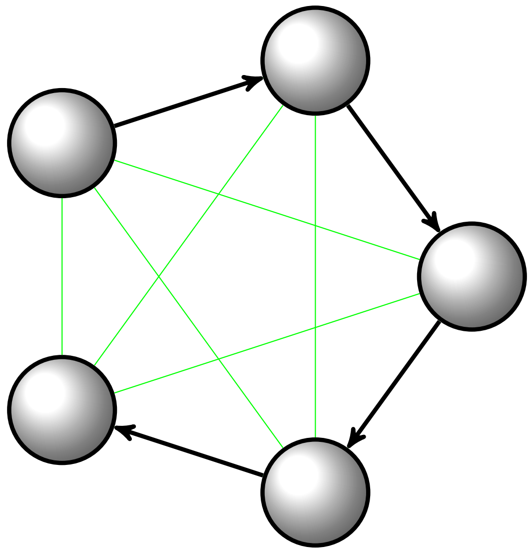
Ce foncteur est à la base de la théorie de Poincaré, qui appelait *simplexes* ces graphes.

Par exemple voici le nombre 5, vu comme un simplexe (qui vient tout droit de la quatrième dimension) :

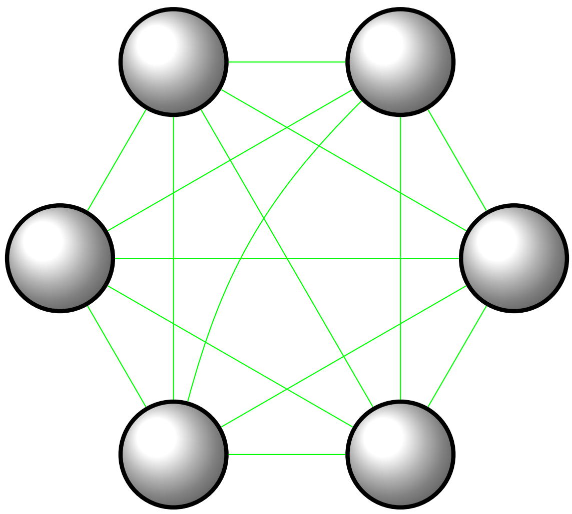


3 Subitisation

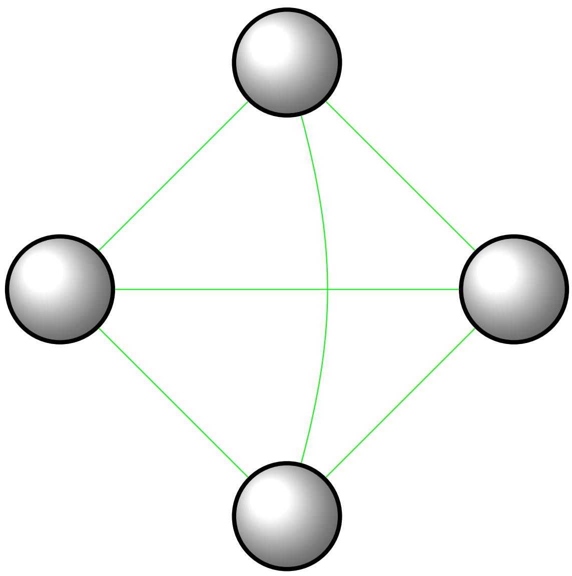
Pour savoir que ce graphe est un objet de la catégorie Cinq, il est nécessaire de trouver un chemin hamiltonien dans le graphe, par exemple :



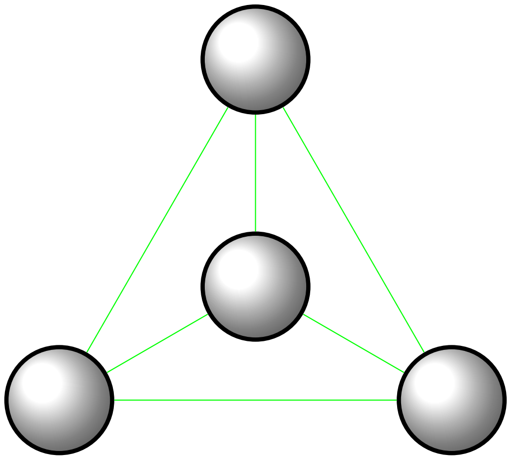
Cela prend moins de temps qu'avec le nombre 6 :



mais plus de temps qu'avec le nombre 4 :



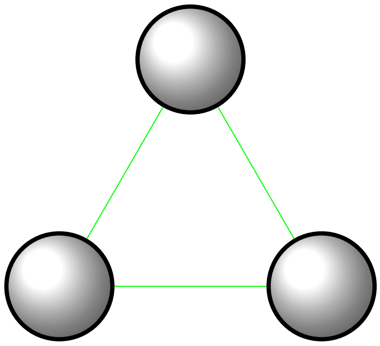
parce que, plus il y a de sommets, plus ça prend du temps de les compter (trouver un chemin hamiltonien). Mais voici un autre objet de la catégorie Quatre :



Et là, il n'y a pas photo. Ou plutôt, pas de croisements. Sous cette forme, le graphe peut être reconnu directement sans avoir besoin de chercher le chemin hamiltonien. On s'attend donc à ce que le nombre 4 soit plus rapidement reconnu, que les nombres plus grands que lui.

3.1 Le nombre 3

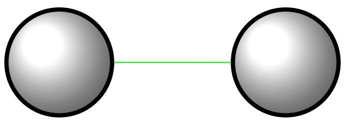
Cela est encore plus vrai avec le nombre 3 :



Pourquoi ? Parce que s'il est possible de dessiner le graphe 4 avec des croisements ou pas, il n'existe pas de moyen de dessiner le graphe 3 avec des croisements. Les chemins hamiltoniens sont inévitables sur ce graphe.

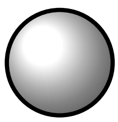
3.2 Le nombre 2

Le graphe représentant le nombre 2 est lui aussi immédiatement reconnaissable : le seul chemin est hamiltonien. Voici ce nombre :



3.3 Le nombre 1

Le graphe représentant le nombre 1 n'a pas d'arête donc pas de chemin : ce graphe est hamiltonien. Le voici :



3.4 Le nombre 0

Le graphe vide est aussi hamiltonien (et complet). Lui aussi est aisément reconnaissable puisqu'on n'y voit aucun sommet :

4 Le théorème des 4 couleurs

Le théorème des 4 couleurs dit que, s'il est possible de dessiner un graphe sans croisements, alors il est possible de le colorier proprement sans utiliser plus de 4 couleurs. Il en résulte qu'à partir de 5 sommets, le comptage est nécessaire, et cela permet de prévoir que la reconnaissance des nombres allant jusqu'à 4 est immédiate, puisqu'elle ne nécessite pas de chercher un chemin hamiltonien.

Le cas du nombre 4 est peut-être particulier, puisqu'il est possible de le représenter par un graphe non planaire (avec croisements).

La subitisation est donc peut-être juste une conséquence des faits suivants :

- la rétine humaine est une surface,
- le théorème des 4 couleurs...