# Théorie de Conway

## Nombres et jeux

Alain Busser

IREM de La Réunion

17 juin 2020

# John Horton Conway
1937-2020

# Sowing
## jeu inventé par Conway

C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

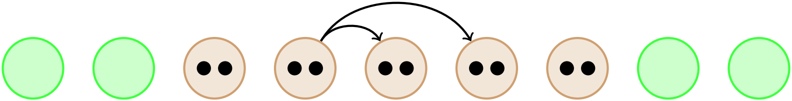
# Sowing

## jeu inventé par Conway

C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

# Sowing

## jeu inventé par Conway



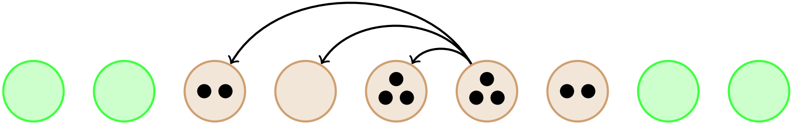
C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

# Sowing

## jeu inventé par Conway

C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

# Sowing
## jeu inventé par Conway



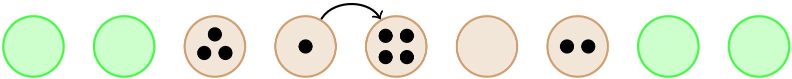
C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

# Sowing
## jeu inventé par Conway

C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

# Sowing

## jeu inventé par Conway



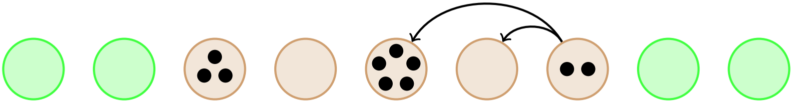
C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

# Sowing

## jeu inventé par Conway

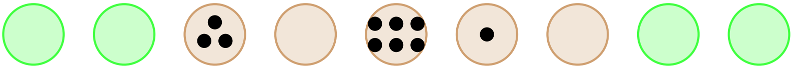
C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

# Sowing
## jeu inventé par Conway



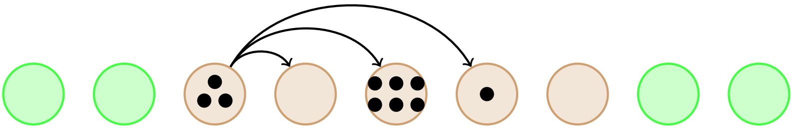
C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

# Sowing
## jeu inventé par Conway



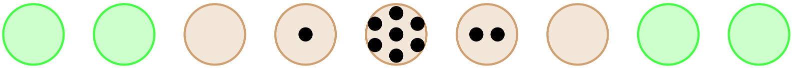
C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

# Sowing
## jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut semer que vers la droite.

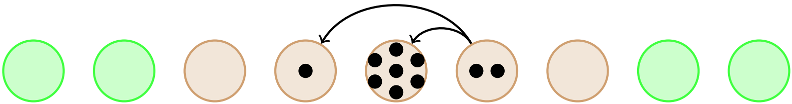
# Sowing
## jeu inventé par Conway



C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

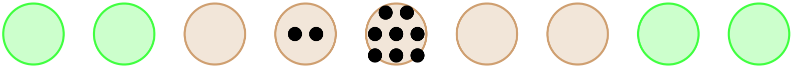
# Sowing

## jeu inventé par Conway



C'est à *Droite* de jouer ; il ne peut semer que vers la gauche.

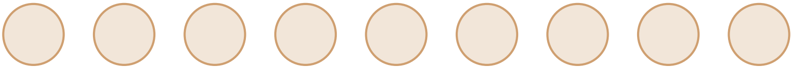
# Sowing
## jeu inventé par Conway



C'est à *Gauche* de jouer ; il ne peut plus semer vers la droite. Il a perdu.

# Le jeu vide

## un jeu plutôt équitable !



Quel que soit le prochain joueur, il ne peut jouer.

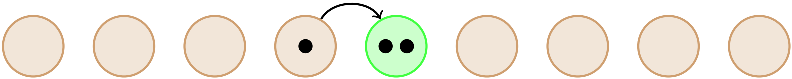
# Le nombre 0

## un jeu plutôt équitable !

Chaque joueur a devant lui un jeu vide. On dit que le nombre de graines est $\infty$.

# Le nombre 1

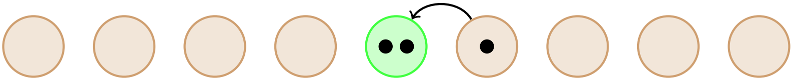
## un jeu à l'avantage de Gauche



Droite ne peut pas jouer. Gauche a une option de jeu qui transforme ce jeu en le jeu 0.

# Le nombre -1

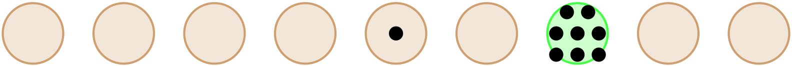
## un jeu à l'avantage de Droite



Gauche ne peut pas jouer. Droite a une option de jeu qui transforme ce jeu en le jeu 0.

# Le nombre 0

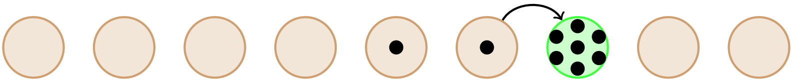
## une autre version



Chaque joueur a devant lui un jeu vide. Ce jeu est aussi égal à 0.

# Le nombre 1

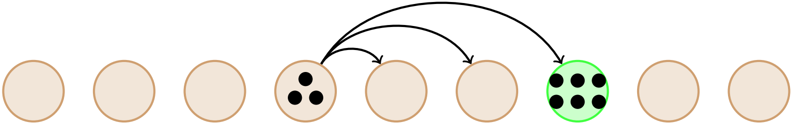
## une autre version



Droite ne peut pas faire mieux que le jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 0. Ce jeu est aussi égal à 1.

# Le nombre 2

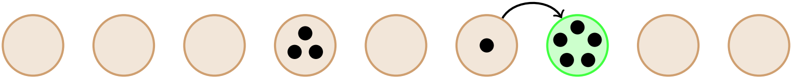
## vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 1. Ce jeu est donc égal à 2.

# Le nombre 3

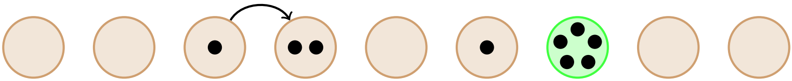
## vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 2. Ce jeu est donc égal à 3.

# Le nombre 4

## vers une construction des entiers



Droite a devant lui un jeu vide. Gauche peut aller vers le jeu 3. Ce jeu est donc égal à 4.

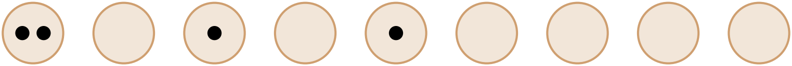
# Le nombre 2

## Une autre forme du nombre 2

Gauche peut semer les deux graines et arriver au jeu 1. Ce jeu vaut donc 2.

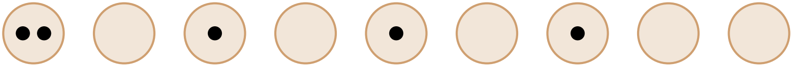
# Le nombre 3

## Une construction généralisable des entiers



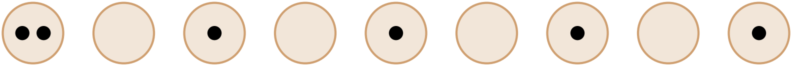
# Le nombre 4

## Une construction généralisable des entiers



# Le nombre 5

## Une construction généralisable des entiers



# Généralisation

## Jeff Erickson, 1996

**Théorème**

Si $n \geqslant 1$ et s'il y a $n$ cases ne contenant qu'une graine alors

$$[2, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1] = n + 1$$

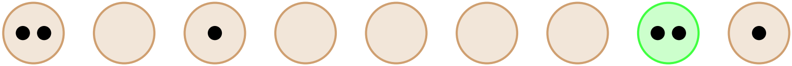
# Addition

## Où l'on découvre que $2+2=4$

Gauche a deux coups d'avance sur Droite à gauche mais aussi à droite, cela fait 4 coups d'avance : Ce jeu est la somme de deux jeux valant 2 chacun.

# Addition des relatifs

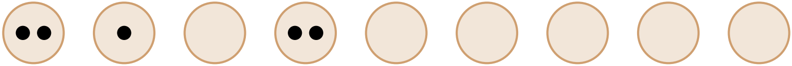
## Où l'on découvre que $2 - 1 = 1$



Le jeu de gauche vaut 2 et celui de droite vaut -1 ; leur somme est $2 + (-1) = 1$.

# Le nombre 0

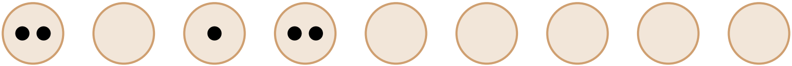
## Le retour de 0



En analysant ce jeu, on découvre que le premier qui le joue est perdant. Sa valeur est donc 0.

# Le nombre 0

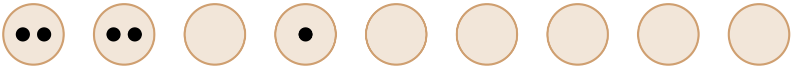
## Le retour de 0



Ce jeu est l'opposé du précédent. Sa valeur est donc également nulle.

# Le nombre 1

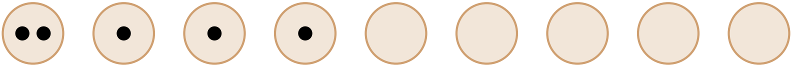
## Le retour de 1



Droite a le jeu vide. Si Gauche joue, il arrive au jeu précédent qui est nul. Ce jeu vaut donc 1.

# Le nombre 0,5

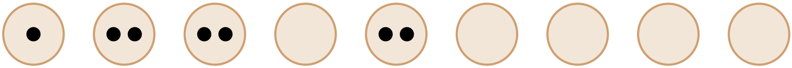
## Un nouveau nombre



Si Droite joue, il offre le jeu 1 à Gauche qui gagne. Si Gauche joue, il aboutit au jeu nul. L'avantage est donc à Gauche, mais cet avantage est à la fois supérieur à 0 et inférieur à 1 : Conway l'évalue à $\frac{1}{2} = 0,5$

# Le nombre $\frac{1}{4}$

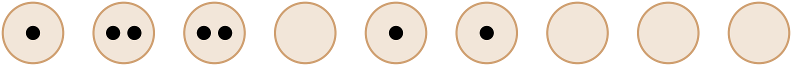
## Encore un nouveau nombre



Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{2}$ : Conway l'évalue à $\frac{1}{4} = 0,25$

# Le nombre $\frac{1}{8}$

## Vers les fractions dyadiques



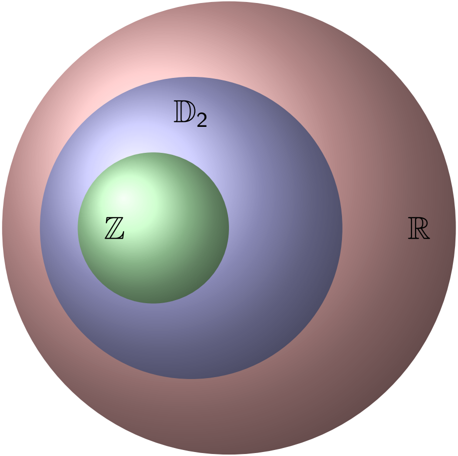
Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{4}$ : Conway l'évalue à $\frac{1}{8} = 0,125$

# Le nombre $\frac{1}{16}$

## Vers les réels

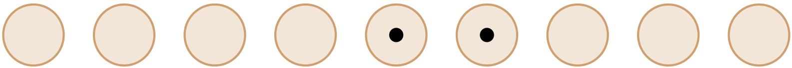
Ce jeu est à la fois supérieur à 0 et inférieur à $\frac{1}{8}$ : Conway l'évalue à $\frac{1}{16} = 0,0625$

# les hyperréels
## John Conway, Donald Knuth



# L'étoile de Conway

## Ce jeu n'est pas un nombre



Le premier qui joue aboutit au jeu nul : Ce jeu n'est pas nul. Conway le note $*$. Ce jeu est inférieur à $\frac{1}{2}$, à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{8}$ etc. et supérieur à $-\frac{1}{2}$, à $-\frac{1}{4}$, à $-\frac{1}{8}$ etc et pourtant n'est pas nul. Conway note ceci : $* \parallel 0$

# Le retour de l'étoile

## I am not a number, I am a nimber

Chaque joueur peut mener ce jeu à 0 : Sa valeur est là aussi l'étoile.

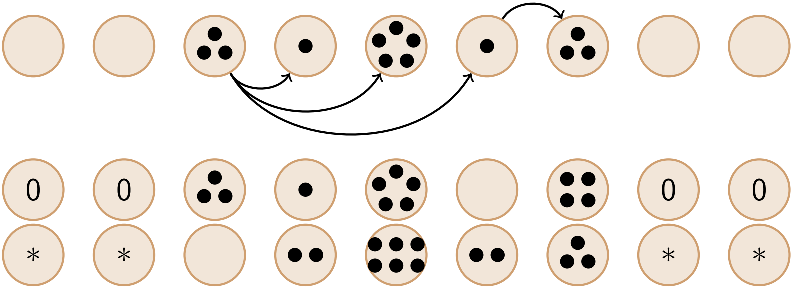
# Le retour de 0

## 0 est un nombre

Le premier joueur perd : Ce jeu vaut 0.

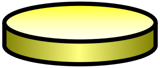
# La double étoile

## I am not a number, I am a nimber



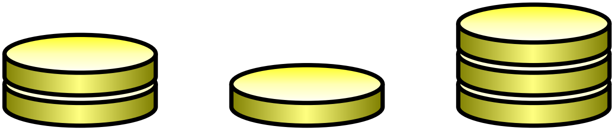

Gauche peut offrir soit 0 soit $*$ à Droite : Ce jeu se note $*2$.

# Jeu de Nim



On note aussi *1 pour l'étoile

# Jeu de Nim



- $*2 + *1 = *3$
- $*2$ n'est pas l'étoile

# table de Nim-addition

| $+$ | $*$ | $*2$ | $*3$ | $*4$ | $*5$ | $*6$ | $*7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $*1$ | 0 | *3 | *2 | *5 | *4 | *7 | *6 |
| $*2$ | *3 | 0 | * | *6 | *7 | *4 | *5 |
| $*3$ | *2 | * | 0 | *7 | *6 | *5 | *4 |
| $*4$ | *5 | *6 | *7 | 0 | * | *2 | *3 |
| $*5$ | *4 | *7 | *6 | * | 0 | *3 | *2 |
| $*6$ | *7 | *4 | *5 | *2 | *3 | 0 | * |
| $*7$ | *6 | *5 | *4 | *3 | *2 | * | 0 |

# Jeu de Nim

$$*5 + *3 + *7 = *$$

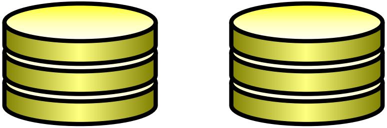
# Jeu de Nim

$$*5 + *3 + *6 = 0$$

# Jeu de Nim

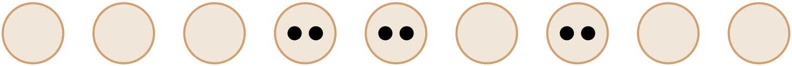
$$*5 + *3 = *6$$

# Jeu de Nim



$$*3 + *3 = 0$$

# Le jeu *up*

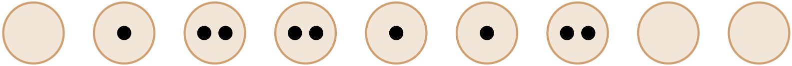


Si Gauche joue, il laisse 0 à Droite qui perd. Si Droite joue, il laisse $*$ à Gauche qui gagne. Ce jeu, noté $\uparrow$, est donc strictement positif. Mais $\uparrow < \frac{1}{2}$, $\uparrow < \frac{1}{4}$, $\uparrow < \frac{1}{8}$ etc. Ce jeu est un nombre infinitésimal strictement positif.

# Le jeu *double up*

Ce jeu est infinitésimal mais strictement supérieur à $\uparrow$. On le note $\uparrow\uparrow$ et on a $\uparrow\uparrow = \uparrow + \uparrow$.

# Le jeu *triple up*



$\uparrow\uparrow\uparrow = \upuparrows + \uparrow$.

# Hyperréels

## structure des infinitésimaux