

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète Mellish, faites à l'Observatoire de Marseille (chercheur de comètes)*. Note de M. **COGGIA**, présentée par M. B. Baillaud.

Dates. 1915.	Temps moyen de Marseille.	ΔR .	$\Delta \odot$.	Nombre de comp.	R apparente.	Log. fact. parall.	\odot apparente.	Log. fact. parall.	*
Févr. 20...	^h 17. ^m 22. ^s 14	+3.48,13	+ 6'.36",9	15: 5	^h 17. ^m 15. ^s 46,05	-1,308	+2.23'.11",0	+0,761	1
» 23...	17.31.25	-2.22,66	+ 1.10,4	15: 5	17.19.33,20	-1,241	+2.10.21,2	+0,762	2
» 25...	17.39.58	+0. 8,36	- 8. 4,6	15: 5	17.22. 4,28	-1,177	+2. 1. 6,0	+0,763	3

Positions moyennes des étoiles de comparaison.

*	Gr.	R moyenne, 1915,0.	Réduction au jour.	\odot moyenne, 1915,0.	Réduction au jour.	Autorités.
1.....	6,3	^h 17. ^m 11. ^s 57,28	+0,64	+ 2.16'.51",2	-17",1	5708 Albany
2.....	8,9	17.21.55,18	+0,68	+ 2. 9.27,8	-17,0	5770 Albany
3.....	8,9	17.21.55,18	+0,74	+ 2. 9.27,8	-17,2	5770 Albany

La comète est diffuse, irrégulière, sans point brillant ni condensation. Éclat 11^e.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*. Note (1) de M. **W. SIERPINSKI**, présentée par M. Émile Picard.

Le but de cette Note est de donner un exemple d'une courbe cantorienne et jordanienne en même temps, dont tout point est un point de ramification. (Nous appelons *point de ramification* d'une courbe \mathcal{C} un point p de cette courbe, s'il existe trois continus, sous-ensembles de \mathcal{C} , ayant deux à deux le point p et seulement ce point commun.)

Soient T un triangle régulier donné; A, B, C respectivement ses sommets: gauche, supérieur et droit. En joignant les milieux des côtés du triangle T , nous obtenons quatre nouveaux triangles réguliers (*fig. 1*), dont trois, T_0, T_1, T_2 , contenant respectivement les sommets A, B, C , sont situés parallèlement à T et le quatrième triangle U contient le centre du triangle T ; nous excluons tout l'intérieur du triangle U .

Les sommets des triangles T_0, T_1, T_2 nous les désignerons respectivement :

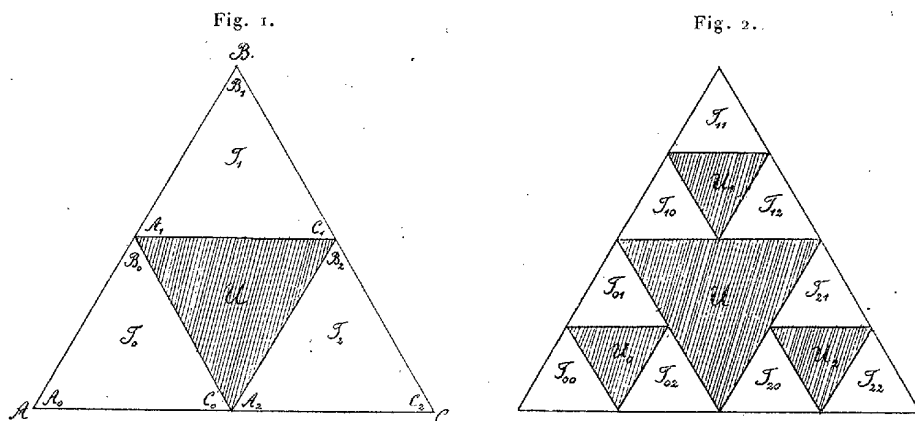
(1) Séance du 1^{er} février 1915.

les sommets gauches, par A_0, A_1, A_2 ; supérieurs, par B_0, B_1, B_2 ; droits, par C_0, C_1, C_2 .

Opérons sur chacun de triangles T_0, T_1, T_2 comme nous l'avons fait pour le triangle T : nous aurons neuf nouveaux triangles situés parallèlement au triangle T , lesquels nous désignerons par

$$T_{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 = 0, 1, 2; \lambda_2 = 0, 1, 2)$$

et leurs sommets respectivement par $A_{\lambda_1 \lambda_2}, B_{\lambda_1 \lambda_2}, C_{\lambda_1 \lambda_2}$, et trois nouveaux triangles U_0, U_1, U_2 , situés parallèlement à U , dont les intérieurs seront



exclus (*fig. 2*). Avec chacun des triangles $T_{\lambda_1 \lambda_2}$ procédons de même et ainsi de suite, en désignant toujours par $A_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, B_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}, C_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ respectivement les sommets de gauche, supérieur et droit du triangle $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ et par $T_{\lambda_1 \dots \lambda_n 0}, T_{\lambda_1 \dots \lambda_n 1}, T_{\lambda_1 \dots \lambda_n 2}$ les nouveaux triangles, contenant respectivement les sommets $A_{\lambda_1 \dots \lambda_n}, B_{\lambda_1 \dots \lambda_n}, C_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$; enfin par $U_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$, le triangle situé parallèlement à U et inscrit dans $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$.

Soit \mathcal{C} l'ensemble de tous les points du triangle T qui ne sont pas intérieurs à aucun des triangles

$$U, U_0, U_1, U_2, U_{00}, U_{01}, \dots, U_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}.$$

On voit sans peine que l'ensemble \mathcal{C} est un continu non dense dans le plan : c'est donc une courbe cantorienne.

Soit p un point de la courbe \mathcal{C} qui n'est pas un sommet du triangle T et d'aucun des triangles $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$. On voit sans peine qu'il existe une suite infinie d'indices $0, 1, 2$, bien déterminée par le point p :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

telle que le point p est un point de tout triangle de la suite

$$(1) \quad T_{\alpha_1}, T_{\alpha_1\alpha_2}, T_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \dots$$

Considérons la suite infinie des sommets

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_1\alpha_2}, A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \dots$$

et soit P l'ensemble formé par le point p et par tous les points de chacun des segments

$$(2) \quad A_{\alpha_1 \dots \alpha_i} A_{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Plusieurs de ces segments peuvent se réduire aux points, mais une infinité d'entre eux a une longueur positive, car autrement nous aurions $A_{\alpha_1 \dots \alpha_i} \equiv A_{\alpha_1 \dots \alpha_i \alpha_{i+1}}$ pour $i = k, k+1, \dots$ et le point $A_{\alpha_1 \dots \alpha_i}$ serait commun pour tous les triangles (1), ce qui donnerait $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \equiv p$, contre l'hypothèse que p n'est un sommet d'aucun des triangles $T_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$.

L'ensemble P est donc un ensemble infini. Il est aisé de voir que c'est un ensemble fermé et d'un seul tenant : l'ensemble P est donc un continu. D'autre part, P est évidemment sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{E} .

De même, en partant des suites infinies $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_1\alpha_2}, B_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \dots$ et $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \dots$, nous définirons respectivement les continus Q et R .

Je dis que les continus P, Q et R ont deux à deux seulement le point p commun.

En effet, supposons que P et Q ont un point commun p' , différent de p . Le point p' , comme un point de P autre que p , sera un point initial ou intérieur d'un des segments de longueur non nulle de la suite (2), par exemple du segment

$$(3) \quad A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} A_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}}$$

et, de même, pour un indice l , p' sera un point du segment

$$(4) \quad B_{\alpha_1 \dots \alpha_l} B_{\alpha_1 \dots \alpha_l \alpha_{l+1}}.$$

Dans le cas $k=l$ on voit sans peine (en discutant séparément les trois cas $\alpha_{k+1} = 0, 1, 2$) que les segments (3) et (4) n'ont pas de points communs. Si $k \neq l$, par exemple $k < l$, on voit aisément que le segment (4) appartient au triangle $T_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}$, tandis que tous les points du segment (3), sauf le point $A_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}$ sont extérieurs au triangle $T_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}}$. Dans aucun de ces cas le point p' ne peut être en même temps initial ou intérieur pour les segments (3) et (4). Nous avons donc démontré que les continus P et Q n'ont pas de points communs autres que p .

Nous avons donc démontré que tout point de la courbe \mathcal{E} qui n'est pas un sommet du triangle T et d'aucun des triangles $T_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ est un point

de ramification de la courbe \mathcal{C} . Quant aux sommets des triangles $T_{\lambda_1} \dots T_{\lambda_n}$ (excepté les sommets du triangle T), on voit sans peine que dans chacun

Fig. 3.

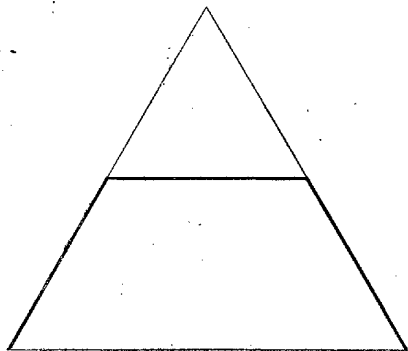
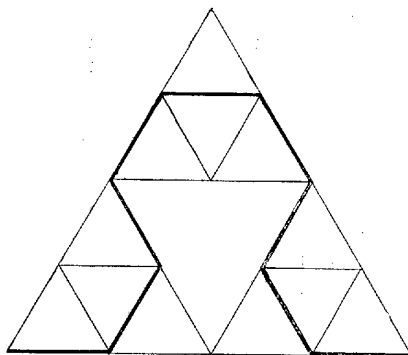


Fig. 4.



d'eux se rencontrent quatre segments différents, situés entièrement sur l'ensemble \mathcal{C} .

Donc, tous les points de la courbe \mathcal{C} , sauf peut-être les points A, B, C, sont ses points de ramification.

Pour obtenir une courbe dont tous les points sans exception sont ses

Fig. 5.

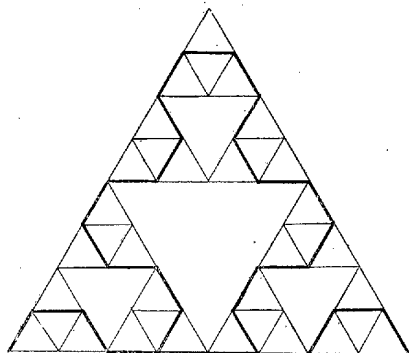
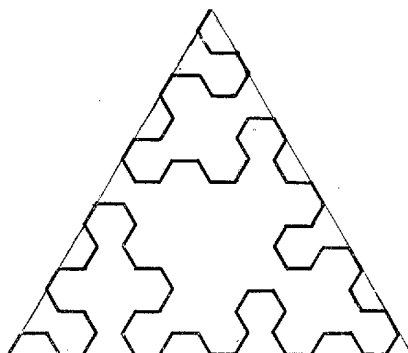


Fig. 6.



points de ramification, il suffit de diviser un hexagone régulier en six triangles réguliers et dans chacun d'eux inscrire une courbe \mathcal{C} .

Remarquons qu'on pourrait démontrer sans peine que la courbe \mathcal{C} est une courbe jordanienne. Or, la courbe \mathcal{C} peut être regardée comme limite d'une suite de lignes brisées dont les premiers termes représentent les figures 3, 4, 5 et 6.