CORRESPONDANCE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée.* Note (¹) de M. W. SIERPINSKI, présentée par M. Émile Picard.

Le but de cette Note est de construire *une courbe cantorienne* (*plane*) C_0 *telle que*, C *étant une courbe cantorienne* (*plane*) *donnée arbitrairement* a priori, *il existe toujours une image biunivoque et continue* C′ *de la courbe* C *dont tous les points sont points de la courbe* C_0.

La courbe C_0 sera définie comme suit. Soit Q un carré donné, par exemple le carré dont les sommets sont les points (0,0), (0,1), (1,0) et (1,1). Divisons le carré Q en neuf carrés plus petits et excluons l'intérieur de celui qui contient le centre du carré Q. Sur chacun des huit carrés qui resteront opérons de même et ainsi de suite *in infinitum*. L'ensemble de tous les points du carré Q qui ne seront pas exclus constitue évidemment une ligne cantorienne : c'est la courbe C_0.

Soit maintenant C une courbe cantorienne donnée quelconque : je dis qu'il existe une courbe C′, sous-ensemble de C_0, qui est une image biunivoque et continue de la courbe C. Pour le démontrer il suffit évidemment de démontrer qu'il existe une courbe K qui est une image biunivoque et continue de la courbe C_0 et qui contient tous les points de la courbe C.

Pour définir la courbe K construisons préalablement un carré U tel que la courbe C soit située à l'intérieur de U. Comme axes des coordonnées, prenons les côtés du carré U. Divisons le carré U en neuf nouveaux carrés : soit V celui d'entre eux qui contient le centre du carré U.

Nous dirons, pour abréger, qu'*un rectangle* R *jouit de la propriété* P, si ses côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et s'il ne contient à son intérieur aucun point de la courbe C.

Soit R un rectangle jouissant de la propriété P qui est intérieur au carré V (un tel rectangle existe évidemment, la courbe C étant un ensemble non dense dans le plan). Désignons par x_1 l'abscisse (commune) des sommets gauches du rectangle R; par x_2 celle de ses sommets droits; par y_1

(¹) Séance du 10 janvier 1916.

l'ordonnée de ses sommets inférieurs, et par y_2 celle de ses sommets supérieurs. Posons encore $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Les quatre droites

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad y = y_1, \quad y = y_2$$

divisent le carré U en neuf rectangles ayant comme sommets gauches inférieurs respectivement les points (x_α, y_β) ($\alpha = 0, 1, 2$; $\beta = 0, 1, 2$); désignons par $U_{\alpha,\beta}$ celui de ces rectangles qui a le point (x_α, y_β) comme sommet gauche inférieur (nous aurons donc évidemment $U_{1,1} = R$). Divisons chacun des neuf rectangles $U_{\alpha,\beta}$ en neuf rectangles égaux : soit toujours $V_{\alpha,\beta}$ celui d'entre eux qui contient le milieu du rectangle $U_{\alpha,\beta}$.

Nous allons maintenant construire neuf rectangles $S_{\alpha,\beta}$ jouissant de la propriété P. Généralement, σ désignant un symbole définissant un rectangle S_σ dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées, nous désignerons toujours par x'_σ l'abscisse des sommets gauches du rectangle S_σ, par x''_σ l'abscisse de ses sommets droits, par y'_σ l'ordonnée de ses sommets inférieurs et par y''_σ celle de ses sommets supérieurs.

Les neuf rectangles $S_{\alpha,\beta}$ seront maintenant définis par récurrence comme suit. A l'intérieur du rectangle $V_{\alpha,\beta}$, choisissons un rectangle $S_{\alpha,\beta}$ jouissant de la propriété P et contenu d'une part entre les parallèles $y = y'_{\alpha-1,\beta}$, $y = y''_{\alpha-1,\beta}$ et d'autre part entre les parallèles $x = x'_{\alpha,\beta-1}$, $x = x''_{\alpha,\beta-1}$ (si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, on doit omettre l'une ou l'autre de ces conditions). Posons

$$x_{\alpha 1} = x'_{\alpha,2}, \quad x_{\alpha 2} = x''_{\alpha,2}, \quad y_{\beta 1} = y'_{2,\beta}, \quad y_{\beta 2} = y''_{2,\beta} \quad (\alpha = 0, 1, 2;\ \beta = 0, 1, 2)$$

et désignons par $R_{\alpha,\beta}$ le rectangle formé par les droites

$$x = x_{\alpha 1}, \quad x = x_{\alpha 2}, \quad y = y_{\beta 1}, \quad y = y_{\beta 2}.$$

On voit aisément que le rectangle $R_{\alpha,\beta}$ sera contenu dans $S_{\alpha,\beta}$: donc il ne contiendra à son intérieur aucun point de la courbe C. Posons encore

$$x_{\alpha 0} = x_\alpha, \quad y_{\beta 0} = y_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2).$$

Les droites

$$x = x_{\alpha_1 \alpha_2}, \quad y = y_{\beta_1 \beta_2} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = 0, 1, 2)$$

divisent le carré U en 81 rectangles dont les sommets gauches inférieurs sont respectivement les points $(x_{\alpha_1\alpha_2}, y_{\beta_1\beta_2})$: désignons par $U_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2}$ celui de ces rectangles dont le sommet gauche inférieur est le point $(x_{\alpha_1\alpha_2}, y_{\beta_1\beta_2})$.

Supposons maintenant que nous avons déjà défini les rectangles

$$S_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1},\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}} \quad \text{et} \quad U_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n = 0, 1, 2).$$

Divisons chacun des rectangles $U_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ en neuf rectangles égaux et soit $V_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ toujours celui d'entre eux qui est au milieu.

Les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ étant donnés, désignons par $U_{\gamma_1\ldots\gamma_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ celui des rectangles $U_{\xi_1\ldots\xi_n,\eta_1\ldots\eta_n}$ dont le côté droit coïncide avec le côté gauche du rectangle $U_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ et par $U_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\delta_1\ldots\delta_n}$ celui dont le côté supérieur coïncide avec le côté inférieur du rectangle $U_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$.

A l'intérieur du rectangle $V_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ déterminons un rectangle $S_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ jouissant de la propriété P et contenu d'une part entre les parallèles $y = y'_{\gamma_1\ldots\gamma_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ et $y = y''_{\gamma_1\ldots\gamma_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ et d'autre part entre les parallèles $x = x'_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\delta_1\ldots\delta_n}$ et $x = x''_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\delta_1\ldots\delta_n}$. (Dans le cas $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ on doit omettre l'une de ces conditions et dans le cas $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$, l'autre.) Les rectangles $S_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ seront ainsi déterminés par récurrence. Posons

$$x_{\alpha_1\ldots\alpha_n 1} = x'_{\alpha_1\ldots\alpha_n,2\ldots2}, \qquad x_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2} = x''_{\alpha_1\ldots\alpha_n,2\ldots2},$$
$$y_{\beta_1\ldots\beta_n 1} = y'_{2\ldots2,\beta_1\ldots\beta_n}, \qquad y_{\beta_1\ldots\beta_n 2} = y''_{2\ldots2,\beta_1\ldots\beta_n}$$

et désignons par $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ un rectangle formé par les droites

$$x = x_{\alpha_1\ldots\alpha_n 1}, \qquad x = x_{\alpha_1\ldots\alpha_n 2}, \qquad y = y_{\beta_1\ldots\beta_n 1}, \qquad y = y_{\beta_1\ldots\beta_n 2}.$$

Les droites

$$x = x_{\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}}, \qquad y = y_{\beta_1\ldots\beta_n\beta_{n+1}} \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1} = 0, 1, 2)$$

divisent le carré U en 3^{2n+2} rectangles dont les côtés gauches inférieurs sont respectivement les points $(x_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}, y_{\beta_1\ldots\beta_{n+1}})$: désignons-les respectivement par $U_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1},\beta_1\ldots\beta_{n+1}}$.

Ainsi, ayant déjà défini (pour une valeur donnée de n) les rectangles $U_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$, nous pourrons toujours définir les rectangles $U_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1},\beta_1\ldots\beta_{n+1}}$.

Excluons maintenant du carré U l'intérieur du rectangle R et de tous les rectangles $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n = 0, 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$. Désignons par K l'ensemble de tous les points du carré U qui resteront : ce sera évidemment une courbe cantorienne et tout point de la courbe C sera un point de la courbe K.

Soit maintenant t un nombre de l'intervalle $(0, 1)$ et

$$t = (0, c_1 c_2 c_3 \ldots)_3$$

son développement en fraction infinie à base 3. Posons

$$\varphi(t) = \lim_{n=\infty} x_{c_1 c_2 \ldots c_n}, \qquad \psi(t) = \lim_{n=\infty} y_{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

On voit sans peine que les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ seront bien définies dans l'intervalle (0, 1) et qu'elles seront dans cet intervalle des fonctions continues et croissantes de la variable t.

En faisant correspondre à tout point (x, y) de la courbe C_0 le point $[\varphi(x), \psi(y)]$ de la courbe K, nous aurons, comme on voit sans peine, une application biunivoque et continue de la courbe C_0 sur la courbe K. La propriété de la courbe C_0 est donc démontrée.

Remarquons qu'on pourrait démontrer, comme l'a observé M. E. Mazurkiewicz, que tout point de C_0 est un point de ramification d'ordre infini.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Calcul de la poussée exercée sur un mur de soutènement à parement intérieur plan par un massif pulvérulent à surface libre plane.* Note de M. E. **Baticle**, présentée par M. Jordan.

En un point m du massif, l'ellipse directrice des actions moléculaires, transportée parallèlement à elle-même à l'origine des coordonnées (que nous supposons à l'intersection des deux surfaces limitant le massif) et rapportée à ses axes de symétrie, a pour équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, α, β étant des constantes telles que $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, où φ est l'angle de frottement intérieur du massif (condition d'*équilibre-limite*, d'après Rankine). En un point infiniment voisin l'ellipse directrice, également transportée et rapportée aux mêmes axes, a pour équation, ε étant l'angle dont elle a tourné : $\alpha(x + \varepsilon y)^2 + (-\varepsilon x + y)^2 = 1$. Si nous cherchons la condition pour que la direction $mm'(dx, dy)$ soit conjuguée de Om dans (1) et de Om' dans (2) nous obtiendrons la relation

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(x\,dy - y\,dx) = -\varepsilon(\alpha x^2 - \beta y^2)$$

ou, en appelant ψ l'angle du grand axe de l'ellipse avec OX, horizontale menée de O vers l'intérieur du massif, et θ l'angle de Om avec ladite direction OX :

$$-d\psi[\alpha\cos^2(\theta - \psi) - \beta\sin^2(\theta - \psi)] = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(d\theta - d\psi).$$

Cette équation peut s'intégrer; il suffit de poser $\theta - \psi = \chi$ et $\operatorname{tang}\chi = u$ pour être ramené à l'intégrale d'une fraction rationnelle. On trouve,