Agrégation Interne
2011-2012
Dominique Castella

Série $n^0 2$
Changements de bases et réduction des matrices

I Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites réelles définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_n & = & 2x_{n-1} - 2y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n & = & 2x_{n-1} - 3y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ z_n & = & -x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{array}\right.$$

pour $n \geq 1$ et $x_0$, $y_0$, $z_0$ fixés dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer une matrice $A$ appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, telle que, pour $n \geq 1$,
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$,

et en déduire que, pout tout $n \geq 0$ : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $A$ est diagonalisable et trouver une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $T$ telles que $T = P^{-1}AP$.

3) En déduire les valeurs de $x_n$, $y_n$ et $z_n$ pour $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ et $z_0 = 2$.

II A) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.
Montrer que $A$ est diagonalisable.

B) On prend ici $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où $p$ est un entier premier et
$B_p = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{16} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
1) On suppose ici que $p = 3$. Déterminer le polynôme minimal de $B_3$ (On pourra utiliser, en le justifiant, que $B_3$ est diagonalisable).
2) On suppose maintenant que $p = 5$.
a) Vérifier que le polynôme minimal de $B_5$ est $(X - \overline{1})^2(X - \overline{2})$.
b) Vérifier que $B_5$ est inversible et exprimer $B_5^{-1}$ comme un polynôme en $B_5$.
Calculer ensuite $B_5^{-1}$.

III Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe deux polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que :
$D = P(A)$ soit diagonalisable, $N = Q(A)$ soit nilpotente et $A = D + N$.

IV Soit $K$ un corps fini de cardinal $q$.
1) Montrer que $q$ est une puissance d'un nombre premier $p$.
2) Déterminer le cardinal du groupe $Gl_n(K)$.

V 1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
Ce résultat est-il aussi valable sur $\mathbb{R}$ ?
2) Montrer que les matrices diagonalisables inversibles forment une partie dense de $M_n(\mathbb{C})$.
Que se passe-t-il dans le cas réel ?

VI On considère l'application linéaire $\Phi \in L(M_n(\mathbb{C}))$ définie par $\Phi(M) = AM$, où $A$ est une matrice donnée de $M_n(C)$.
Calculer $\det \Phi$ en fonction de $\det A$. (On pourra commencer par le cas diagonalisable...)

VII 1) Soit $M$ une matrice trigonalisable de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O$ et une matrice triangulaire supérieure $T$ telles que $M = OT^tO$.
2) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $M$.
On pose $M_k = O_kT_k^tO_k$, $O_k \in O_n(\mathbb{R})$, $T_k$ triangulaire supérieure.
Montrer qu'il existe une sous-suite $(T_{\sigma(k)})$ qui converge et en déduire que le polynôme caractéristique de $M$ est scindé.
3) Déterminer dans $M_n(\mathbb{R})$ l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.