Agrégation Interne
2008-2009
Dominique Castella

Série $n^0 1$
Réduction des endomorphismes

I Calculer A^n,

pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

II IV Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ ayant toutes ses valeurs propres de multiplicité 1, et $B \in M_n(\mathbb{C})$, telle que $AB = BA$.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P(A) = B$.

III Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe deux matrices D et N telles que : $A = D + N$, $DN = ND$, D est diagonalisable, N est nilpotente.

IV Soient A et B deux matrices de $M_{3n}(\mathbb{C})$ de rang $2n$ telles que $A^3 = B^3 = 0$. Montrer que A et B sont semblables.

V Donner deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que AB soit diagonalisables et BA ne le soit pas.

VI 1) Soient $n \geq m$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$, P et Q les polynômes caractéristiques de AB et de BA.
Montrer que $X^n P = X^m Q$. On pourra utiliser les matrices d'ordre $n + m$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} B & I_n \\ XI_n & 0 \end{pmatrix} \; et \; A_1 = \begin{pmatrix} A & -I_m \\ -XI_n & B \end{pmatrix}$$

2) En déduire que si A et B sont deux matrices d'ordre n, AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

VII On considère trois endomorphismes u, v, w d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, tels que $u \circ w = w \circ u$, $v \circ w = w \circ v$ et $u \circ v - v \circ u = w$.
a) Montrer que w est nilpotent.
b) Prouver que u, v, w ont un vecteur propre commun.
c) En déduire l'existence d'une base commune de trigonalisation pour ces trois endomorphismes.