Agrégation Interne
Algèbre

Année 2010-11
D. Castella

Algbre-bilinaire

I
Soit N le noyau d'une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel E.
a) Montrer que N est un sous-espace vectoriel.
b) Montrer que l'on peut définir une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace quotient E/N par $F(cl(u), cl(v)) = f(u, v)$.

II
Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, par :

$$q((x_1, \cdots, x_n)) = \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

a) Donner la matrice A de q dans la base canonique, et déterminer ses valeurs propres.
b) En déduire la signature de q.

III

1) Dterminer la signature de la forme quadratique q, dfinie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$q(x, y, z) = xy + yz + 2xz$
2) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

IV
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels, et pour $n \in \mathbb{N}$ E_n le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour P et Q dans E, on posera :

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} t^2 P(t) Q(t)\, dt.$$

1) Justifier rapidement que ϕ est un produit scalaire sur E.
2) Construire une base orthonormale de E_2.
3) Soit F un sous-espace de dimension finie k de E_n, $1 \leq k \leq n$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$, une base orthonormale de F.

On notera p la projection orthogonale de E_n sur F.
a) Montrer que, pour tout $x \in E_n$,

$$p(x) = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi(x, e_i) e_i.$$

b) Vérifier que, en posant pour tout $y \in E_n$,

$$d(y, F) = \inf_{f \in F} \|y - f\|$$

on a :

$$d(y, F) = \|y - p(y)\| = \|(1 - p)(y)\|.$$

4) Déterminer l'orthogonal H de E_2 dans E_3 et un vecteur directeur, z, de H.
5) Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\alpha = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} t^2 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \, dt.$$

V

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On dira que deux formes quadratiques sur E, q et q', sont équivalentes s' il existe un morphisme bijectif, $u \in GL(E)$, tel que $q' = q \circ u$
1) Soit $u \in GL(E)$ et q une forme quadratique sur E, de forme polaire f.
a) Vérifier que $q \circ u$ est une forme quadratique sur E et donner sa forme polaire ϕ.
b) Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E ; montrer que la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$.
2)a) Montrer que deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes si et seulement si il existe deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ telles que la matrice de q (c'est à dire de sa forme polaire) dans la base $\mathcal{B}_1$ soit égale à la matrice de q' dans la base $\mathcal{B}_2$.
b) En déduire que deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.
3 a) Montrer que les deux formes quadratiques sur $E = \mathbb{R}^3$, définies par :
$q((x, y, z)) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 12xz$ et
$q'((x, y, z)) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 6xz + 6yz$
ont même signature.
b) Déterminer $u \in GL(E)$ tel que $q' = q \circ u$.

VI

Soit $l^2(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes, telles que la série $(\sum |x_n|^2)$ soit convergente.
1) Montrer que $l^2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2) Montrer que si (x_n) et (y_n) appartiennent à $l^2(\mathbb{C})$, la série $(\sum x_n \overline{y_n})$ est convergente.
3) Montrer que f définie par $f((x_n), (y_n)) = \sum_0^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ est une forme hermitienne définie positive.
4) Vérifier que $l^2(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.