Agrégation Interne
2011-2012
Dominique Castella

Série $n^0 3$
Algèbre Euclidienne

I
Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $\mathcal{B}_0$ la base canonique de E. On considère la forme bilinéaire symétrique ϕ, définie sur E par :

$$\phi((x,y,z),(x',y',z')) = 2xx' + 5yy' + 5zz' + 2xy' + 2x'y - 2xz' - 2x'z - 4yz' - 4y'z$$

a) Déterminer la matrice M de ϕ dans la base $\mathcal{B}_0$.
b) Trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
c) En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}$, orthogonale pour ϕ.
d) La forme bilinéaire symétrique ϕ est-elle un produit scalaire ?

II
Soient $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels, et pour $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour P et Q dans E, on posera :

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} t^2 P(t)Q(t)\,dt.$$

1) Justifier rapidement que ϕ est un produit scalaire sur E.
2) Soit F un sous-espace de dimension finie k de E_n, $1 \leq k \leq n$ et $(e_i)_{1\leq i\leq k}$, une base orthonormale de F.
On notera p la projection orthogonale de E_n sur F.
a) Montrer que, pour tout $x \in E_n$,

$$p(x) = \sum_{1\leq i\leq k} \phi(x,e_i)e_i.$$

b) Vérifier que, en posant pour tout $y \in E_n$,

$$d(y,F) = \inf_{f\in F} \|y - f\|$$

on a :

$$d(y,F) = \|y - p(y)\| = \|(1-p)(y)\|.$$

3) Déterminer l'orthogonal H de E_2 dans E_3 et un vecteur directeur, z, de H.
4) Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\alpha = d(X^3, E_2)$$

III Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si $A^*A = AA^*$ et un endomorphisme u d'un espace hermitien E est normal s'il commute avec son adjoint u^*.
1) Montrer que si u est un endomorphisme normal de E, pour tout $(x,y) \in E^2$,
$< u^*(x), u^*(y) >=< u(x), u(y) >$ et en déduire que $\ker u = \ker u^*$.
2) Que peut-on en déduire pour les valeurs propres et les sous-espaces propres de u^* ?

3) En déduire que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.
4) Montrer que si A est une matrice normale, il existe une matrice $P \in U_n$ telle que P^*AP soit diagonale.
5) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement s' il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A^* = Q(A)$.
6) Montrer que les endomorphismes hermitiens sont les endomorphismes normaux à valeurs propres réelles.
7) Caractériser de même les endomorphismes unitaires.

IV Soient Φ_1 et Φ_2 deux formes bilinéaires symétriques définies sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, E. On supposera de plus que Φ_2 est non dégénérée.
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, et M_1, M_2 sont les matrices respectives de Φ_1 et Φ_2 dans cette base, on appellera $f_{\mathcal{B}}$ l'application linéaire de E dans E de matrice $M_2^{-1}M_1$, par rapport à $\mathcal{B}$.
1) Montrer que si $\mathcal{C}$ est une autre base de E, on obtient le même endomorphisme (soit $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$). On notera donc f cet endomorphisme.
2) Montrer que s'il existe une base orthogonale à la fois pour Φ_1 et Φ_2, l'endomorphisme f est diagonalisable.
3) En déduire que si M et N sont deux matrices symétriques réelles et si M est de plus définie positive, MN est diagonalisable.

V Soient a et b deux endomorphismes d'un espace hermitien E. On note λ (resp. μ) la plus grande valeur propre de l'endomorphisme (hermitien) aa^* (resp. bb^*).
a) Montrer que $\forall y \in E$, $\|a(y)\| \leq |\lambda| \|y\|$.
b) En déduire que si ρ est une valeur propre de ab, on a : $|\rho| \leq \lambda\mu$.

VI 1) Soient x et y deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une réflexion (ou symétrie vectorielle orthogonale hyperplane) S, telle que $S(x) = \frac{\|x\|y}{\|y\|}$.
2) En déduire les résultats suivants :
a) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T, à diagonale strictement positive, telles que $A = OT$, et une telle décomposition est unique.
b) Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $r = \dim\ker(A - I)$. A peut s'écrire comme le produit d'au plus $n - r$ réflexions.