Agrégation Interne 2009-2010
Dominique Castella

Série $n^0 2$
Réduction des matrices et applications

I Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les trois suites réelles définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_n & = & 2x_{n-1} - 2y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n & = & 2x_{n-1} - 3y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ z_n & = & -x_{n-1} + 2y_{n-1} \end{array}\right.$$

pour $n \geq 1$ et x_0, y_0, z_0 fixés dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer une matrice A appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, telle que, pour $n \geq 1$,
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$,

et en déduire que, pout tout $n \geq 0$: $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que A est diagonalisable et trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale T telles que $T = P^{-1}AP$.

3) Vérifier que, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = PT^nP^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

4) En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n pour $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ et $z_0 = 2$.

II Soit K un corps commutatif et $A = \begin{pmatrix} a & \alpha & 0 & \delta \\ 0 & b & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in M_4(K)$, avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$.

A 1) Quel est le polynôme caractéristique χ_A de A ?
Quelles sont les valeurs propres de A ?
2) Montrer que si $a = b = c = d$, A n'est pas diagonalisable.
3) A quelles conditions sur α, β, γ et δ, A est-elle diagonalisable dans les cas suivants :
a) $c = d$ et $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$?
b) $b = c = d$ et $a \neq b$?
c) a, b, c, d sont tous distincts ?

B Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une matrice $P \in Gl_4(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$

C On prend ici $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un entier premier et

$$B_p = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{5} \\ \overline{0} & \overline{16} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

1) On suppose ici que $p = 3$. Déterminer le polynôme minimal de B_3 (On pourra utiliser, en le justifiant, que B_3 est diagonalisable).
2) On suppose maintenant que $p = 5$.
a) Vérifier que le polynôme minimal de B_5 est $(X - \overline{1})^2(X - \overline{2})$.
b) Vérifier que B_5 est inversible et exprimer B_5^{-1} comme un polynôme en B_5.
Calculer ensuite B_5^{-1}.

III

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, symétriques et positives.
On suppose de plus que A est inversible :
a) Justifier l'existence d'une matrice P, telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ soit diagonale, I_n désignant, comme toujours, la matrice identité d'ordre n (on pourra penser à prendre comme produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, la forme bilinéaire symétrique dont la matrice, dans la base canonique, est A).
b) En déduire que $\det(A + B) \geq \det A$.

IV

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On dira que deux formes quadratiques sur E, q et q', sont équivalentes s'il existe une application linéaire bijective de E, $u \in L(E)$, telle que : $\forall x \in E,\ q'(x) = q(u(x))$.

1) Soient q et q' deux formes quadratiques équivalentes, $\mathcal{B}_0$ une base de E et A, M, M' les matrices respectives de u, q et q' dans la base $\mathcal{B}_0$.
a) Exprimer M' en fonction de M et de A.
b) Montrer que q et q' ont même signature (on pourra considérer la base $\mathcal{B}_1$ telle que A soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$).

2) Soient maintenant q et q' deux formes quadratiques sur E ayant même signature.
a) Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ telles que la matrice de q dans $\mathcal{C}_0$, M_0, soit diagonale et égale à la matrice M_1' de q' dans la base $\mathcal{C}_1$.

b) En déduire que q et q' sont équivalentes (on pourra choisir $u \in L(E)$ tel que $u(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_0$).

3) Montrer que les deux formes quadratiques suivantes, définies sur $\mathbb{R}^3$ par
$q(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy - 6xz - 6yz$ et $q'(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 12xz$,
sont équivalentes.