Agrégation Interne
2009-2010
Dominique Castella

Série $n^0 4$

Espaces euclidiens et espaces hermitiens

I Soit $E = \mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes complexes. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose :

$$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} (1+t^2)\overline{P(t)}Q(t)\,dt$$

1) Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il existe une famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}})$ telle que pour tout n, $\deg P_n = n$.

II Soit $l^2(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes, telles que la série $(\sum |x_n|^2)$ soit convergente.
1) Montrer que $l^2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2) Montrer que si (x_n) et (y_n) appartiennent à $l^2(\mathbb{C})$, la série $(\sum \overline{x_n} y_n)$ est convergente.
3) Montrer que f définie par $f((x_n),(y_n)) = \sum_0^{+\infty} \overline{x_n} y_n$ est une forme hermitienne définie positive.
4) Vérifier que $l^2(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.

III Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si $A^*A = AA^*$ et un endomorphisme u d'un espace hermitien E est normal s'il commute avec son adjoint u^*.
1) Montrer que si u est un endomorphisme normal de E, pour tout $(x,y) \in E^2$, $< u^*(x), u^*(y) >=< u(x), u(y) >$ et en déduire que $\ker u = \ker u^*$.
2) Que peut-on en déduire pour les valeurs propres et les sous-espaces propres de u^* ?
3) En déduire que les sous-espaces propres d'un endomorphisme normal sont deux à deux orthogonaux.
4) Montrer que si A est une matrice normale, il existe une matrice $P \in U_n$ telle que P^*AP soit diagonale.
5) Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est normale si et seulement s' il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A^* = Q(A)$.
6) Montrer que les endomorphismes hermitiens sont les endomorphismes normaux à valeurs propres réelles.
7) Caractériser de même les endomorphismes unitaires.

IV Soient Φ_1 et Φ_2 deux formes bilinéaires symétriques définies sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, E. On supposera de plus que Φ_2 est non dégénérée.
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, et M_1, M_2 sont les matrices respectives de Φ_1 et Φ_2 dans cette base, on appellera $f_{\mathcal{B}}$ l'application linéaire de E dans E de matrice $M_2^{-1}M_1$, par rapport à $\mathcal{B}$.
1) Montrer que si $\mathcal{C}$ est une autre base de E, on obtient le même endomorphisme (soit $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{C}}$). On notera donc f cet endomorphisme.

2) Montrer que s'il existe une base orthogonale à la fois pour Φ_1 et Φ_2, l'endomorphisme f est diagonalisable.
3) En déduire que si M et N sont deux matrices symétriques réelles et si M est de plus définie positive, MN est diagonalisable.

V Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien et $u \in L(E)$ un opérateur symétrique.
1) Soit $f : E - \{0\} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{<u(x),x>}{\|x\|^2}$.
a) Montrer que f est différentiable et calculer df_x pour $x \in \mathcal{E} - \{0\}$.
b) Montrer qu'il existe $x_0 \in S = \{x \in \mathcal{E}/\|x\| = 1\}$ tel que :
$\forall x \in S \; f(x) \geq f(x_0)$.
c) En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.
d) Montrer, par récurrence sur la dimension de $\mathcal{E}$, que u est diagonalisable dans une base orthonormale.

VI a) Soit H une matrice hermitienne à valeurs propres positives.
Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne S, à valeurs propres positives, telle que $S^2 = H$.
b) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'il existe un unique couple (R, U), où R est une matrice hermitienne positive et U une matrice unitaire, tel que $A = RU$.
Que peut-on dire si A est réelle ?
c) En déduire qu'il existe un unique couple (R, Θ), où R est une matrice hermitienne positive et Θ une matrice hermitienne, tel que $A = Re^{i\Theta}$ (décomposition polaire).
d) Généraliser à une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$.

VII Soient a et b deux endomorphismes d'un espace hermitien E. On note λ (resp. μ) la plus grande valeur propre de l'endomorphisme (hermitien) aa^* (resp. bb^*).
a) Montrer que $\forall y \in E$, $\|a(y)\| \leq |\lambda|\|y\|$.
b) En déduire que si ρ est une valeur propre de ab, on a : $|\rho| \leq \lambda\mu$.

VIII Soit E un espace hermitien. On considère un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E, \quad < u(x), x >= 0$.
Montrer que $u = 0$.
Ce résultat est-il vrai dans le cas euclidien ?

IX 1) Soient x et y deux vecteurs non nuls de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe une réflexion (ou symétrie vectorielle orthogonale hyperplane) S, telle que $S(x) = \frac{\|x\|y}{\|y\|}$.
2) En déduire les résultats suivants :
a) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T, à diagonale strictement positive, telles que $A = OT$, et une telle décomposition est unique.
b) Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et $r = \dim \ker(A - I)$. A peut s'écrire comme le produit d'au plus $n - r$ réflexions.