Agrégation Interne 2009-2010
Dominique Castella

Série $n^0 3$
Espaces euclidiens

I Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et q la forme quadratique sur E, définie par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4xz - 8yz + 5z^2$$

1) Donner la matrice A de q, dans la base canonique.
2) a) Donner une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D, telles que $D = P^{-1}AP$
b) En déduire une base orthonormée de E, orthogonale pour q. Quelle est la signature de q ?
3) Retrouver cette signature en utilisant l'algorithme de Gauss.

II Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E et $\mathcal{E}$ un espace affine attaché à E.
a) Donner la matrice de la rotation vectorielle ρ d'axe $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et d'angle $\pi/2$, dans la base $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{u} = 1/\sqrt{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $\vec{v} = 1/\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
b) Donner la matrice de cette rotation ρ dans la base $\mathcal{B}$.

III Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$.
On considère deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 définies sur E et on appelle ϕ_1 et ϕ_2 leurs formes polaires respectives.
On suppose que la condition suivante est remplie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \phi_1(x, y) = 0 \Longrightarrow \phi_2(x, y) = 0$$

1) Montrer que toute base orthogonale pour ϕ_1 est aussi orthogonale pour ϕ_2.
En déduire qu'il existe des bases orthogonales pour ϕ_1 et pour ϕ_2 simultanément.

Dans la suite du problème, on supposera que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une telle base, et on posera pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $Q_1(e_i) = \lambda_i$, $Q_2(e_i) = \mu_i$.
2) Soient deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Montrer que l'on a :
$\phi_1(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$, et $\phi_2(x, y) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i y_i$.
3) On pose : $a = \sum_{i=1}^n e_i$.
On définit sur E deux formes linéaires f_1 et f_2 en posant, pour tout $x \in E$:
$f_1(x) = \phi_1(x, a)$ et $f_2(x) = \phi_2(x, a)$.
Démontrer que le noyau de f_1 est inclus dans le noyau de f_2.
En déduire qu'il existe un scalaire k tel que $f_2 = k f_1$.
4) Calculer $f_1(e_i)$ et $f_2(e_i)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, et, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, en déduire que l'on a $\phi_2 = k\phi_1$.
5) Soit Q une forme quadratique de forme polaire ϕ.
Soit u un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité pour ϕ
(i.e. $\forall (x, y) \in E^2 \;\; \phi(x, y) = 0 \implies \phi(u(x), u(y)) = 0$).
Démontrer qu'il existe un scalaire k tel que : $\forall (x, y) \in E^2 \;\; \phi(u(x), u(y)) = k\phi(x, y)$.
6) On suppose maintenant que E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit $u \in L(E)$; on notera $<, >$ le produit scalaire de E. $O(E)$ désigne le groupe des endomorphismes orthogonaux de E.

Montrer que les propiétés suivantes sont équivalentes :
i) $\forall(x,y) \in E^2 \quad <x,y>=0 \implies <u(x),u(y)>=0$.
ii) $\exists\lambda > 0$, tel que $\frac{1}{\lambda}u \in O(E)$.
iii) $\exists\lambda > 0$, tel que, $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \lambda\|x\|$.

IV Pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ appartenant à $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3, on pose :

$$\phi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i.$$

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

2) Donner une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E, engendré par la famille $(2+X^2, 2+2X+X^2-4X^3, 2X+X^3)$.

3) Soit $Q = 1+X+X^2+X^3$; calculer la distance de Q à F, $d(Q,F) = \inf_{P\in F} d(Q,P)$.

4) Donner un vecteur unitaire normal à F et une équation cartésienne de F.

V Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et soit $\phi \in L(E)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que A est est une matrice orthogonale si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a+b+c)^2 & = & 1 \\ et & & \\ bc+ca+ab & = & 0 \end{array} \right.$$

2) On suppose que ϕ est un endomorphisme orthogonal (et que les conditions du 1) sont donc remplies).
Montrer que ϕ est une symétrie si et seulement si $b = c$.
Donner les cas possibles et les caractériser.

3) On suppose ici que a, b, c sont les trois racines du polynôme
$X^3 - X^2 + \frac{4}{27}\sin^2\theta$.
a) Justifier rapidement que ces trois racines sont réelles.
b) Démontrer que ϕ est alors un endomorphisme orthogonal.
c) Vérifier que 1 est valeur propre de ϕ.
Que peut-on dire alors de la nature de ϕ ?
En utilisant la question 2, prouver que ϕ est nécessairement, ici, une rotation.
d) Exprimer le cosinus de l'angle α de ϕ, en fonction de a.
Montrer que $\cos\alpha$ vérifie l'équation $4x^3 - 3x = \cos 2\theta$.
En déduire les valeurs possibles de α en fonction de θ (on pourra montrer que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$).

4) Déduire de la question 3 l'expression des racines du polynôme
$X^3 - X^2 + \frac{4}{27}\sin^2\theta$, en fonction de θ.