Agrégation Interne 2009-2010
Dominique Castella

Série $n^0 1$
Rang et diagonalisation

I Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, engendré par la famille (s, t, u, v, w) où :
$s = (1, 5, 3, 0)$, $t = (1, 3, -8, 0)$, $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 4, 14, 4)$ et $w = (0, -4, 11, 8)$.

II Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

III a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $A^k = I_n$.
A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?
b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$.
Montrer que si A est nilpotente elle n'est pas diagonalisable et que $A^n = 0$.

IV Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ ayant toutes ses valeurs propres de multiplicité 1. Déterminer l'ensemble des matrices commutant avec A.

V Le sous-ensemble des matrices diagonalisables est-il dense dans $M_n(\mathbb{R})$?

VI Trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est la famille de formes linéaires $(x + 2y + z, 2x + 3y + 3z, 3x + 7y + z)$.

VII Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, sur un corps commutatif k, de caractéristique 0.
a) Montrer que les formes linéaires $P \mapsto P^{(i)}(a)$, a étant un élément fixé de k, forment, pour $0 \leq i \leq n$, une base du dual E_n^* de E_n.
Quelle est la base de $k[X]$, dont cette base est la base duale ?
Quelle formule peut-on en déduire ?
b) Mêmes questions pour la famille $P \mapsto P(a_i)$, où les a_i, $0 \leq i \leq n$ sont des éléments distincts de k ?

VIII Soient E un espace vectoriel de dimension finie, n, et f, g deux endomorphismes de E.
Montrer que $rg(f) + rg(g) - n \leq rg(f \circ g) \leq min(rgf, rgg)$.

IX 1) Soit M une matrice trigonalisable de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = OT^tO$.
2) Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice M. On pose $M_k = O_k T_k^t O_k$, $O_k \in O_n(\mathbb{R})$, T_k triangulaire supérieure.
Montrer qu'il existe une sous-suite $(T_{\sigma(k)})$ qui converge et en déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé.
3) Déterminer dans $M_n(\mathbb{R})$ l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.