Développement en fractions continues et division euclidienne

André Seguin

La division euclidienne permet pour un nombre rationnel de trouver son développement en fractions continues. Nous montrons dans le texte qui suit que c'est également le cas pour une autre famille de nombres réels : les nombres irrationnels de la forme √α, lorsque α est un entier naturel non carré. Hormis le premier, les coefficients du développement apparaissent comme des quotients de divisions euclidiennes. Nous pourrons ainsi, pour cette catégorie particulière de nombres, retrouver de manière élémentaire les principales propriétés du développement.

Sommaire

Nous restreignons l'application de l'algorithme sur lequel repose le développement en fractions continues aux nombres irrationnels plus grands que 1.

"Soit s un nombre irrationnel plus grand que 1 et E sa partie entière, dans l'égalité $s=E+v$ *le nombre* $v=s-E$ *est un irrationnel entre 0 et 1. En posant* $w=\frac{1}{v}$ *, on a alors l'égalité* $s=E+\frac{1}{w}$ *dans laquelle w est un irrationnel plus grand que 1.*
À partir du nombre s on obtient les nombres E et w, w étant de même nature que s, nous pouvons recommencer, w prenant la place de s et obtenir de nouvelles valeurs E' et w' ainsi qu'une nouvelle égalité $w=E'+\frac{1}{w'}$ *et continuer encore...*

$$s=E_1+\frac{1}{w_1} \quad ; \quad w_1=E_2+\frac{1}{w_2} \quad ; \quad w_2=E_3+\frac{1}{w_3} \quad ; \ldots ; \quad w_{j-1}=E_j+\frac{1}{w_j} \quad ; \ldots \text{"}$$

On obtient $[E_{1,}\ E_{2,}\ \ldots..,E_i,\ldots]$ *le développement en fractions continues*[1] *de* ***s****. Les entiers naturels non nuls* E_i *en sont les coefficients.*

1 Euler et Lambert ont obtenu des résultats importants en analyse en utilisant cet algorithme.

Les premiers coefficients du développement de $\sqrt{\alpha}$.

Soit α un entier naturel non carré (donc supérieur à 1) il existe un entier naturel n différent de 0 tel que $n^2<\alpha<(n+1)^2$. Ainsi α peut s'écrire de manière unique $\alpha=n^2+d$ avec $1\leq d\leq 2n$.
Nous en déduisons pour l'irrationnel $\sqrt{\alpha}$ l'encadrement : $n<\sqrt{(\alpha)}<n+1$ (propriété P).
Appliquons l'algorithme précédent au nombre $s=\sqrt{(\alpha)}$, la propriété (P) montre que n est la partie entière de $\sqrt{\alpha}$, c'est à dire le premier coefficient du développement de $\sqrt{\alpha}$: $E_1=n$.

Utilisons ce résultat pour calculer w_1 et E_2 .
$\sqrt{(\alpha)}=E_1+\frac{1}{w_1}$ donne $\sqrt{(\alpha)}=n+\frac{1}{w_1}$ et permet d'obtenir $w_1=\frac{1}{\sqrt{(\alpha)}-n}$ qui s'écrit $w_1=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n}{d}$.
Partie entière de w_1 .
L'encadrement $\frac{2n}{d}<w_1<\frac{2n+1}{d}$ découle de la propriété (P) et de l'égalité $w_1=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n}{d}$ car d est positif. Dans N effectuons la division euclidienne de $2n$ par d : $2n=q*d+r$ $r<d$ on en déduit $r<2n$ et $q\geq 1$ car $d\leq 2n$ donc en $2n$ il va au moins une fois d .
$q=\frac{2n-r}{d}$ il est clair que $q\leq\frac{2n}{d}$ par ailleurs comme $d-r\geq 1$ on a également $\frac{2n+1}{d}\leq\frac{2n-r+d}{d}=q+1$. L'encadrement $q\leq\frac{2n}{d}<w_1<\frac{2n+1}{d}\leq q+1$ montre que q est la partie entière de w_1 . Le deuxième coefficient du développement est donc $E_2=\frac{2n-r}{d}$.

Le calcul de w_2 et de E_3 se fait de façon similaire.
De l'égalité $w_1=E_2+\frac{1}{w_2}$ on tire $w_2=\frac{1}{w_1-q}$ et d'après ce qui précède $w_1-q=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n}{d}-\frac{2n-r}{d}$, c'est à dire $w_1-q=\frac{\sqrt{(\alpha)}-(n-r)}{d}$ soit $w_2=\frac{d}{\sqrt{(\alpha)}-(n-r)}$ qui s'écrit $w_2=\frac{d(\sqrt{(\alpha)}+n-r)}{\alpha-(n-r)^2}$.
Ce quotient peut se simplifier par d car $\alpha-(n-r)^2=\alpha-n^2+r(2n-r)=d+r*q*d=d*(1+q*r)$ et $2n-r=q*d$ donc $\alpha-(n-r)^2=\alpha-n^2+r(2n-r)=d+r*q*d=d*(1+q*r)$. $1+q*r$ est dans N*, cela montre que d divise $\alpha-(n-r)^2$ et permet la simplification : $w_2=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r}{1+q*r}$.
Partie entière de w_2 .

La propriété (P) donne l'encadrement $\frac{2n-r}{1+q*r}<w_2<\frac{2n+1-r}{1+q*r}$ car $1+q*r>0$.

On pose $d'=1+q*r$ et on effectue dans N la division euclidienne de $2n-r$ par d' (d' et $2n-r$ sont positifs) : $2n-r=q'*d'+r'$ $r'<d'$,on a donc $r'<2n$.

On en déduit
$q'=\frac{2n-r-r'}{d'}\leq\frac{2n-r}{d'}\leq w_2$ et $w_2<\frac{2n+1-r_2}{d'}\leq\frac{2n-r+d'-r'}{d'}=q'+1$ car $d'>r'$.

Ce qui prouve que q' est la partie entière de w_2 : $E_3=\frac{2n-r-r'}{d'}$

Remarque : $q'\geq 1$ car $w_2>1$.

Deux suites particulières : $(r_i)_{(i \varepsilon N)}$ et $(d_i)_{(i \varepsilon N)}$

Le calcul des coefficients du développement fait apparaître par induction des nombres entiers naturels : r, r', … et aussi d, d', … Définissons par récurrence les suites $(d_i)_{(i \varepsilon N)}$ et $(r_i)_{(i \varepsilon N)}$:
$d_0=1$ *et* $r_0=0$ et pour tout i dans N

$$\alpha-(n-r_i)^2=d_i*d_{i+1} \quad \text{et} \quad 2\text{n}-r_i=q_{i+1}*d_{i+1}+r_{i+1} \quad r_{i+1}<d_{i+1} \quad .$$

r_{i+1} est le reste de la division euclidienne dans N de $2\text{n}-r_i$ par d_{i+1} (comme on le verra cela suppose que d_{i+1} soit dans N* et $2\text{n}-r_i$ dans N).
Calcul de d_1 et r_1
$\alpha-(n-r_0)^2=d_0*d_1$ donne $d_1=d$
r_1 est le reste de la division euclidienne de 2n par d , on a vu que $r_1<2n$.

Assurons nous que ces deux suites sont bien définies. Pour cela nous allons montrer par récurrence les deux propositions suivantes qui valident la division euclidienne de $2\text{n}-r_i$ par d_i :
pour tout i dans N
r_i est un entier naturel vérifiant $0\le r_i\le 2\text{n}$
d_i est un entier naturel vérifiant $d_i\ge 1$

Ces propositions sont vraies pour $i=0$ et pour $i=1$.
Supposons les vérifiées pour $i=,0\ ,1,\ 2,......,k+1$ montrons qu'elles sont encore vraies pour $k+2$. Posons $A=\alpha-(n-r_{k+1})^2$, par hypothèse de récurrence $0\le r_{i+1}\le 2\text{n}$ donc $-n\le n-r_{i+1}\le n$ ce qui implique $0\le|n-r_{i+1}|^2\le n^2$. On en déduit que A est positif et comme α n'est pas un carré il est même strictement positif.
On peut écrire $A=\alpha-((n-r_k)-(r_{k+1}-r_k))^2$ soit $A=\alpha-(n-r_k)^2+(2n-r_k-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)$.
Par hypothèse de récurrence $\alpha-(n-r_k)^2=d_k*d_{k+1}$ donc $A=d_k*d_{k+1}+(2n-r_k-r_{k+1})(r_{k+1}-r_k)$.
De la division euclidienne dans N $2n-r_k=q_{k+1}*d_{k+1}+r_{k+1}$, $r_{k+1}<d_{k+1}$ on déduit
$2n-r_k-r_{k+1}=q_{k+1}*d_{k+1}$ il vient $A=d_k*d_{k+1}+q_{k+1}*d_{k+1}*(r_{k+1}-r_k)$ et finalement
$A=d_{k+1}*(d_k+q_{k+1}*(r_{k+1}-r_k))$ ce qui définit d_{k+2} : $d_{k+2}=d_k+q_{k+1}*(r_{k+1}-r_k)$. d_{k+2} est un entier relatif. Comme il vérifie $A=d_{k+1}*d_{k+2}$ et que A est strictement positif , l'hypothèse de récurrence $d_{k+1}\ge 1$ montre que $d_{k+2}\ge 1$.
r_{k+2} et q_{k+2} s'obtiennent alors par la division euclidienne $2n-r_{k+1}=q_{k+2}*d_{k+2}+r_{k+2}$ division dans N car $d_{k+2}\ge 1$ et $2\text{n}-r_{k+1}\ge 0$. On en déduit $0\le r_{k+2}\le 2n$.
d_{k+2} et r_{k+2} sont des entiers naturels qui vérifient $d_{k+2}\ge 1$ et $0\le r_{k+2}\le 2n$, l'hérédité est démontrée.

Les coefficients du développement de √α

Nous sommes en mesure de déterminer les coefficients du développement de √α.
Montrons par récurrence que pour tout i dans N*

$$w_i=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_{i-1}}{d_i} \quad \text{(Q) et} \quad E_{i+1}=q_i=\frac{2\text{n}-r_i-r_{i-1}}{d_i} \quad \text{(R)}$$

Initialisation

pour $i=1$ $w_1=\dfrac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_0}{d_1}=\dfrac{\sqrt{(\alpha)}+n}{\alpha-n^2}$ et $E_2=q_1=\dfrac{2\text{n}-r_1-r_0}{d_1}$ vu précédemment.

(Q et R) est vraie pour $i=1$.

Hérédité
Supposons (Q et R) vraie pour $i=1,2,3,...,k$ et montrons que (Q et R) est vraie pour $k+1$

À partir de l'égalité $w_k=E_{k+1}+\frac{1}{w_{k+1}}$ il vient $w_{k+1}=\frac{1}{w_k-E_{k+1}}$.
Par hypothèse de récurrence $w_k-E_{k+1}=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_{k-1}}{d_k}-\frac{2n-r_k-r_{k-1}}{d_k}$

$w_k-E_{k+1}=\frac{\sqrt{(\alpha)}-(n-r_k)}{d_k}$ soit $w_{k+1}=\frac{d_k}{\sqrt{(\alpha)}-(n-r_k)}$ qui s'écrit $w_{k+1}=\frac{d_k*(\sqrt{(\alpha)}+n-r_k)}{\alpha-(n-r_k)^2}$.

Par définition de la suite (d_i) on a $\alpha-(n-r_k)^2=d_k*d_{k+1}$ d'où le résultat $w_{k+1}=\frac{(\sqrt{(\alpha)}+n-r_k)}{d_{k+1}}$
qui établit l'hérédité pour la proposition (Q).
Partie entière de w_{k+1} .

La propriété (P) donne l'encadrement $\frac{2n-r_k}{d_{k+1}}<w_{k+1}<\frac{2n+1-r_k}{d_{k+1}}$ car $d_{k+1}>0$. On déduit de la division euclidienne dans N de $2n-r_k$ par d_{k+1} : $2n-r_k=q_{k+1}*d_{k+1}+r_{k+1}$ $r_{k+1}<d_{k+1}$ que $q_{k+1}=\frac{2n-r_k-r_{k+1}}{d_{k+1}}\leq\frac{2n-r_k}{d_{k+1}}\leq w_{k+1}$ et $w_{k+1}<\frac{2n+1-r_k}{d_{k+1}}\leq\frac{2n-r_k+d_{k+1}-r_{k+1}}{d_{k+1}}=q_{k+1}+1$ car $1\leq d_{k+1}-r_{k+1}$.

Ceci prouve que $\frac{2n-r_k-r_{k+1}}{d_{k+1}}$ est la partie entière de w_{k+1} : $E_{i+2}=q_{i+1}=\frac{2n-r_k-r_{k+1}}{d_{k+1}}$.
L'hérédité pour la proposition (R) est montrée et la proposition (Q et R) est établie.

Conclusion
Hormis le premier $E_1=n$, les coefficients du développement en fractions continues de $\sqrt{\alpha}$ sont les quotients de divisions euclidiennes : $E_{i+1}=q_i=\frac{2n-r_i-r_{i-1}}{d_i}$ pour $i\geq 1$.
Remarque 1
Les termes w_i sont plus grand que 1 donc pour $i\geq 1$ $q_i\geq 1$ c'est à dire $\frac{2n-r_i-r_{i-1}}{d_i}\geq 1$ on en déduit facilement que $d_i\leq 2n$.

Remarque 2
Une meilleure majoration pour r_i
Dans la division euclidienne $2\text{n}-r_{i-1}=q_i*d_i+r_i$ le premier membre est positif et inférieur ou égal à $2n$, si on suppose $r_i\geq n$ le second membre est strictement plus grand que $2n$ car $q_i\geq 1$, $d_i>r_i$ ce qui est absurde. Donc $r_i<n$.

Une correspondance termes à termes.
L'égalité $w_{i+1}=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_i}{d_{i+1}}$ met les couples (r_i,d_{i+1}) et les irrationnels w_{i+1} en correspondance biunivoque. En effet l'égalité $w_{j+1}=w_{i+1}$ équivaut à $\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_j}{d_{j+1}}=\frac{\sqrt{(\alpha)}+n-r_i}{d_{i+1}}$

soit $\left(\frac{1}{d_{j+1}}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)*\sqrt{(\alpha)}=\frac{n-r_i}{d_{i+1}}-\frac{n-r_j}{d_{j+1}}$ comme $\sqrt{(\alpha)}$ est irrationnel et les autres nombres rationnels cela équivaut à $\frac{1}{d_{j+1}}-\frac{1}{d_{i+1}}=0$ et $\frac{n-r_i}{d_{i+1}}-\frac{n-r_j}{d_{j+1}}=0$ donc $d_{j+1}=d_{i+1}$ et $r_j=r_i$ d'où finalement $(r_j, d_{j+1})=(r_i, d_{i+1})$.
La suite $(r_0, d_1),(r_1, d_2)$.... est en correspondance terme à terme avec la suite w_1, w_2... .
Nous pouvons raisonner sur les couples (r_i, d_{i+1}) plutôt que sur les irrationnels w_{i+1} .

Propriétés du développement.

Les résultats obtenus par les mathématiciens du XVII^e et XVIII^e siècles - Euler et Lagrange pour ne citer qu'eux - et qui concernent l'ensemble des irrationnels quadratiques s'appliquent évidemment à notre famille particulière de nombres. Cependant, les retrouver par une approche spécifique à celle-ci n'est pas inintéressant. Elle permet en outre de montrer la proposition :
Si α est un nombre premier et si la période du développement de √α vaut 4 alors le nombre α est de la forme $(2m+1)^2-2 \quad m\neq 0$.

Le développement est périodique

Pour un nombre α donné, la suite (r_i) est bornée, ses termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs entre 0 et *n*. La suite (d_i) est également bornée*,* ses termes sont entre 1 et 2 *n* .
Les termes de la suite $((r_i, d_{i+1}))_{i\varepsilon N}$ ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, d'après le principe des tiroirs il existe deux indices $i\neq j \quad i<j$ tels que
$(r_i,\ d_{i+1})=(r_j,\ d_{j+1})$ ce qui implique $w_{j+1}=w_{i+1}$.
Une conséquence pour la suite des irrationnels $w_1, w_2, \ldots\ldots$ est l'apparition d'une partie périodique. La suite $(w_{i+1})_{i\varepsilon N}$ est ultimement périodique. Il en va donc de même de la suite des parties entières, c'est à dire de la suite des quotients.

Le développement en fractions continues de √α est ultimement périodique.

Cela implique aussi que la suite $((r_i, d_{i+1}))_{i\varepsilon N}$ est ultimement périodique.

Un résultat important
La première composante du couple (r_i, d_{i+1}) est strictement inférieure à la deuxième.

pour tout $i \qquad r_i<d_{i+1}$

Pour $i=0$ on a $0<d$ par hypothèse sur d .
Pour $i>0$ partons de l'égalité $\alpha-(n-r_i)^2=d_i d_{i+1}$ et retranchons le produit $r_i d_i$ aux deux membres, il vient
$\alpha-(n-r_i)^2-r_i d_i=d_i(d_{i+1}-r_i)$ soit $\alpha-n^2+(2n-r_i-d_i)r_i=d_i(d_{i+1}-r_i)$ (F).
Dans la division euclidienne $2n-r_{i-1}=q_i d_i+r_i \quad r_i<d_i$ le quotient q_i qui est la partie entière de w_{j-1} est plus grand ou égal à 1, l'égalité réécrite autrement $2n-r_i-d_i=(q_i-1)d_i+r_{i-1}$ montre que $2n-r_i-d_i\geq r_{i-1}\geq 0$. Ainsi le premier membre de l'égalité (F) est strictement positif ce qui entraîne $d_{i+1}-r_i>0$.

Étude de la partie périodique du développement

La partie périodique de la suite $((r_i, d_{i+1}))_{i \varepsilon N}$ commence par $(r_0,\ d_1)$.

Dans ce qui suit nous allons montrer que la partie périodique commence avec le couple $(r_0,\ d_1)$ c'est à dire $(0,\ d)$ qui correspond à w_1 . Pour établir cette propriété nous allons raisonner par l'absurde. Nous allons supposer que la partie périodique commence avec le couple $(r_k,\ d_{k+1})$ et que $k \neq 0$, alors le couple $(r_{k-1},\ d_k)$ existe et n'est pas dans la partie périodique. Nous allons montrer que ce couple est dans la partie périodique, d'où une contradiction. À partir du couple $(r_{k-1},\ d_k)$ par les relations $2n - r_{k-1} = q_k d_k + r_k$ et $\alpha - (n - r_k)^2 = d_k d_{k+1}$ nous obtenons le couple $(r_k,\ d_{k+1})$. Soit p la période du développement, le couple $(r_{k+p},\ d_{k+p+1})$ est égal au couple $(r_k,\ d_{k+1})$, on en déduit que le couple $(r_{k+p-1},\ d_{k+p})$ termine la partie périodique et par les relations $2n - r_{k+p-1} = q * d_{k+p} + r_{k+p}$ et $\alpha - (n - r_{k+p})^2 = d_{k+p} d_{k+p+1}$ on obtient le couple $(r_{k+p},\ d_{k+p+1})$.
Nous allons montrer que l'hypothèse $k \neq 0$ entraîne l'égalité des couples $(r_{k-1},\ d_k)$ et $(r_{k+p-1},\ d_{k+p})$ et produit ainsi un couple qui appartient et n'appartient pas à la partie périodique.
Montrons que $r_{k+p-1} = r_{k-1}$ *et* $d_{k+p} = d_k$.

* La deuxième égalité est immédiate à partir des égalités $\frac{\alpha - (n - r_k)^2}{d_{k+1}} = d_k$, $\frac{\alpha - (n - r_{k+p})^2}{d_{k+p+1}} = d_{k+p}$ $r_k = r_{k+p}$ et $d_{k+1} = d_{k+p+1}$ qui découlent de l'égalité $(r_{k+p},\ d_{k+p+1}) = (r_k,\ d_{k+1})$.
L'égalité $d_k = d_{k+p}$ est établie.

** La première s'obtient en permutant les restes dans les divisions $2n - r_{k-1} = q_k d_k + r_k$ et $2n - r_{k+p-1} = q_{k+p} d_{k+p} + r_{k+p}$ ce qui donne encore deux divisions euclidiennes $2n - r_k = q_k d_k + r_{k-1}$ et $2n - r_{k+p} = q_{k+p} d_{k+p} + r_{k+p-1}$ car $r_{k-1} < d_k$ et $r_{k+p-1} < d_{k+p}$.
Ces deux dernières divisions ont même dividende $2n - r_k = 2n - r_{k+p}$ et même diviseur $d_{k+p} = d_k$ elles ont donc même quotient et même reste d'où finalement $r_{k-1} = r_{k+p-1}$ ce qui établit la première égalité. On a montré $(r_{k-1},\ d_k) = (r_{k+p-1},\ d_{k+p})$ d'où la contradiction.

On peut donc affirmer que le couple $(0,\ d)$ débute la partie périodique.
Les couples $(0,\ d)$, $(r_1,\ d_2)$, ..., $(r_{p-1},\ d_p)$ constituent la partie périodique de la suite $((r_i, d_{i+1}))_{i \varepsilon N}$. Ils correspondent aux irrationnels $w_1, w_2, \dots, w_p$.
Les coefficients de la partie périodique du développement en fractions continues de √α $E_2, E_3, \dots, E_{p+1}$ correspondent aux quotients $q_1, q_2, \dots, q_p$.

Le couple $(0,\ 1)$ termine la partie périodique de la suite $((r_i, d_{i+1}))_{i \varepsilon N}$

$(r_{p-1},\ d_p)$ est le dernier terme de la partie périodique, le terme qui le suit $(r_p,\ d_{p+1})$ est égal au premier $(0,\ d)$ donc $r_p = 0$ *et* $d_{p+1} = d$. De l'égalité $\alpha - (n - r_p)^2 = d_p * d_{p+1}$ on déduit $d_p = 1$. Ce résultat et l'inégalité $r_{p-1} < d_p$ entraînent $r_{p-1} = 0$. Ainsi $(r_{p-1},\ d_p) = (0,\ 1)$.

Le couple $(0,\ 1)$ est le dernier terme de la partie périodique, il correspond à l'irrationnel

$$w_p = \frac{\sqrt{(\alpha)} + n - 0}{1} = \sqrt{(\alpha)} + n \quad \text{d'où} \quad E_{p+1} = 2n \ .$$

On retrouve là un résultat connu : le coefficient qui termine la partie périodique du développement en fractions continues de √α. est $2 * E_1$.

Périodes 1, 2 et 3 et apparition du palindrome.

Période 1

Il se peut que la partie périodique ne soit composée que d'un seul élément auquel cas les couples $(0\ ,d)$ et $(0,\ 1)$ sont confondus, c'est à dire $d=1$. On peut énoncer :

Le développement en fractions continues de $\sqrt{(\alpha)}$ a une période égale à 1 si et seulement si $d=1$.

Il s'écrit $[n,\ 2n,\ 2n,\ 2n,............]$, la partie périodique est composée du seul élément $2n$.

Dans ce cas les nombres α ont une décomposition de la forme n^2+1 : 2, 5, 10, 17, 26, etc.

Période 2

Si $d\neq 1$, la partie périodique contient au moins deux éléments $(0,\ d)$ et $(0,\ 1)$.

Que vaut l'avant-dernier couple de la partie périodique $(r_{p-2},\ d_{p-1})$? Question que l'on peut reformuler par : Quel est le couple qui précède $(0,\ 1)$? À partir du couple $(r_{p-2},\ d_{p-1})$, on a les deux égalités $2n-r_{p-2}=q*d_{p-1}+0$ et $\alpha-(n-0)^2=d_{p-1}*1$.

La deuxième donne $d_{p-1}=d$ et en permutant les restes dans la première on obtient $2n-0=q*d_{p-1}+r_{p-2}$ qui correspond encore à une division euclidienne car $r_{p-2}<d_{p-1}$. C'est la division de $2n-r_0$ par d nous l'avons déjà rencontré on en déduit $r_{p-2}=r_1$.

Le couple $(r_{p-2},\ d_{p-1})$ est donc égal au couple $(r_{1,}\ d)$.

La partie périodique contient exactement deux éléments $(0,\ d)$ e t $(0,\ 1)$ si $(r_{1,}\ d)=(0,\ d)$ c'est à dire si $r_1=0$ Dans ce cas, d divise $2n$ et on a $E_2=q_1=\frac{2n}{d}$.

Le développement en fractions continues de $\sqrt{(\alpha)}$ a une période égale à 2 si et seulement si $d\neq 1$ et d divise $2n$.

Il s'écrit $[n,\ \frac{2n}{d},\ 2n,\ \frac{2n}{d},\ 2n,............]$ la partie périodique est formée des éléments $\frac{2n}{d},\ 2n$.

Les nombres α se décomposent sous la forme $(xy)^2+2x$ pour x et y dans N* ou sous la forme $(xy)^2+x$, x dans N*\{1} et y dans N*.

Remarque

Si *p* est un nombre premier et si le développement de √*p* a pour période 2 alors *p* est de la première la forme pour $x=1$ et y *impair* $(2y+1)^2+2$: 3, 11, 83, 227, … La réciproque est fausse !

Période 3

Si $d\neq 1$ et $r_1\neq 0$, alors la partie périodique contient au moins trois éléments $(0,\ d)$, $(r_{1,}\ d)$ et $(0,\ 1)$. Le couple qui suit $(0,\ d)$ est $(r_{1,}\ d_2)$.

La partie périodique contient exactement trois éléments si et seulement si $(r_{1,}\ d_2)=(r_{1,}\ d)$ c'est à dire si $d=d_2$ ce qui s'écrit aussi $d=1+q_1*r_1$ car $d_{k+2}=d_k+q_{k+1}*(r_{k+1}-r_k)$. Dans ce cas les trois éléments $(0,\ d)$, $(r_{1,}\ d)$ et $(0,\ 1)$ correspondent à $E_{2,}\ E_{3,}\ 2n$.

Montrons que $E_2=E_3$ (apparition du palindrome) .

On a $2n=q_1*d+r_1$ et $2n-r_1=q_2*d_2+r_2$ la première égalité montre que d divise $2n-r_1$

$d=d_2$ implique dans la deuxième que $r_2=0$ d'où $q_2=E_3=\frac{2n-r_2-r_1}{d_2}=\frac{2n-r_1}{d}=q_1=E_2$.

q_1 *et* r_1 étant le quotient et le reste de la division euclidienne de $2n$ par d *,* comme $d\neq 1$ et $r_1\neq 0$ la période n'est ni 1, ni 2. On peut énoncer

Le développement en fractions continues de $\sqrt{(\alpha)}$ a une période égale à 3 si et seulement si $d\neq 1$ $r_1\neq 0$ et $d=1+q_1*r_1$.

Son écriture est $[n,\ q_1,\ q_{1,}\ 2n,\ q_1,\ q_{1,}\ 2n,\ ....]$, la partie périodique est formée des éléments $q_1,\ q_1,\ 2n$.

Dans ce cas la décomposition des nombres α est $\alpha=(y(1+4xy)+x)^2+1+4xy$ pour x et y dans N*(voir la preuve en annexe).

Des périodes plus grandes

Si $d\neq 1$, $r_1\neq 0$ et $d_1\neq d_2$ au moins quatre éléments $(0,\ d_1)$, $(r_{1,}\ d_2)$, $(r_{1,}\ d_1)$ et $(0,\ 1)$ sont dans la partie périodique.
Que vaut le couple $(r_{p-3},\ d_{p-2})$ qui précède le couple $(r_{1,}\ d_1)$?
On a les égalités $2n-r_{p-3}=q*d_{p-2}+r_1$ et $\alpha-(n-r_1)^2=d_{p-2}*d_1$, $d_{p-2}=d_2$ se déduit de la deuxième car $\alpha-(n-r_1)^2=d_1*d_2$ quant à la première égalité en permutant les restes elle se réécrit $2n-r_1=q*d_{p-2}+r_{p-3}$ qui correspond à une division euclidienne car $r_{p-3}<d_{p-2}$. C'est la division de $2n-r_1$ par d_2 nous l'avons déjà rencontré on en déduit $q=q_2$ *et* $r_{p-3}=r_2$.
Le couple $(r_{2,}\ d_2)$ précède le couple $(r_{1,}\ d_1)$: $(r_{p-3},\ d_{p-2})=(r_{2,}\ d_2)$.

La partie périodique contient exactement quatre éléments si et seulement si $(r_{2,}\ d_2)=(r_{1,}\ d_2)$ c'est à dire si $r_1=r_2$. Dans ce cas les quatre éléments $(0,\ d_1)$, $(r_{1,}\ d_2)$, $(r_{1,}\ d_1)$ et $(0,\ 1)$ correspondent à $E_{2,}\ E_{3,}\ E_{4,}\ 2n$. Montrons que $E_2=E_4$ (palindrome).
Cela revient à montrer que $q_1=q_3$ on rappelle que $q_1=\dfrac{2n-r_1}{d_1}$ et $q_3=\dfrac{2n-r_3-r_2}{d_3}$.
Les deux égalités $\alpha-(n-r_1)^2=d_1*d_2$ e t $\alpha-(n-r_2)^2=d_2*d_3$ associées à $r_1=r_2$ donne $d_1=d_3$.
La relation $2n-r_2=q_3*d_3+r_3$ compte tenu des égalités $r_1=r_2$ et $d_1=d_3$ se réécrit $2n-r_1=q_3*d+r_3$ ce qui entraînent $r_3=0$ car nous avons déjà vu que d divise $2n-r_1$.
$r_1=r_2$, $d_1=d_3$ et $r_3=0$ entraînent $q_1=q_3$. Donc $E_2=E_4$.

Remarque : $r_1=r_2$ équivaut à d_2 *divise* $2(n-r_1)$.

* $r_1=r_2$ et $2n-r_1=q_2*d_2+r_2$ implique d_2 *divise* $2(n-r_1)$.
** d_2 *divise* $2(n-r_1)$ et $2n-r_1=q_2*d_2+r_2$ implique d_2 *divise* r_2-r_1 d'où $r_2-r_1=0$ car $r_1<d_2$ *et* $r_2<d_2$.

Si $d\neq 1$, $r_1\neq 0$ et $d_1\neq d_2$ la période n'est ni 1, ni 2, ni 3 . On peut énoncer : q_1 *et* r_1 étant le quotient et le reste de la division euclidienne de $2n$ par d

Le développement en fractions continues de $\sqrt{(\alpha)}$ *a une période égale à 4 si et seulement si* $d\neq 1$, $r_1\neq 0$, $d_2\neq d$ *et* $1+q_1*r_1$ *divise* $2(n-r_1)$

Il s'écrit $[n,\ q_1,\ q_2,\ q_1,\ 2n,\ q_1,\ q_2,\ q_1,2n,\ ....]$, la partie périodique est formée des éléments $q_1,\ q_{2,}\ q_1,\ 2n$ pour $q_2=\dfrac{2(n-r_1)}{1+q_1*r_1}$.
Dans ce cas la détermination des nombres α est plus complexe. En annexe nous en faisons l'étude et nous démontrons les propositions qui suivent.
Proposition 1

Il existe des séries de nombres entiers consécutifs aussi. longues que l'on veut $a_1, a_2, a_3, ...$ telles que pour tous les termes a_i de la série, le développement de $\sqrt{(a_i)}$ a une période égale à 4.
Voici un exemple de onze entiers consécutifs : 192099588, 192099589, … ,192099598.
Proposition 2
Si α est un nombre premier et si la période du développement de √α vaut 4 alors le nombre α est de la forme $(2m+1)^2-2 \quad m\neq 0$.

La période 5

Si $d\neq 1$, $r_1\neq 0$, $d\neq d_2$ et $r_1\neq r_2$ au moins cinq éléments $(0, d_1)$, (r_1, d_2) , (r_2, d_2) , (r_1, d_1) et $(0, 1)$ sont dans la partie périodique.
Si le couple (r_2, d_3) qui suit le couple (r_1, d_2) est égal au couple (r_2, d_2) la partie périodique possède exactement cinq éléments. Cela se produit si et seulement si $d_2=d_3$ et les cinq éléments de la partie périodique correspondent à $E_2, E_3, E_4, E_5, 2n$.

Montrons que $E_2=E_5$ et $E_3=E_4$ (palindrome). Commençons par $E_3=E_4$.
$E_3=q_2=\frac{2n-r_2-r_1}{d_2}$ et $E_4=q_3=\frac{2n-r_3-r_2}{d_3}$ comme $d_2=d_3$ il suffit de montrer que $r_3=r_1$.
En permutant les restes dans la division euclidienne $2n-r_1=q_2*d_2+r_2$ on obtient $2n-r_2=q_2*d_2+r_1$ qui est encore une division euclidienne car $r_1<d_2$. On a également $2n-r_2=q_3*d_3+r_3$ qui est aussi la division euclidienne de $2n-r_2$ par d_2 car $d_2=d_3$
On en déduit $r_1=r_3$.
Pour démontrer $E_2=E_5$ partons des égalités $\alpha-(n-r_1)^2=d_1*d_2$ et $\alpha-(n-r_3)^2=d_3*d_4$, les égalités $d_2=d_3$ et $r_1=r_3$ impliquent $d_1=d_4$.
$2n=q_1*d_1+r_1$ montre que d_1 divise $2n-r_1$ donc d_1 divise $2n-r_3$. Comme $d_1=d_4$ et $2n-r_3=q_4*d_4+r_4$ on en déduit $r_4=0$.
$d_1=d_4$, $r_1=r_3$ et $r_4=0$ entraînent $\frac{2n-r_1}{d_1}=\frac{2n-r_4-r_3}{d_4}$ c'est à dire $q_1=q_4$.

La partie périodique est formée des éléments $q_1, q_2, q_2, q_1, 2n$.

Remarque
Si un nombre α est de la forme $(2m+1)^2+4 \quad m\neq 0$ la période du développement de √α vaut 5. (preuve en annexe).

Période paire ou impaire.

On appelle coïncidence l'égalité de deux termes consécutifs de la suite $(r_i)_{(i\varepsilon N)}$ ou de la suite $(d_i)_{(i\varepsilon N)}$. Voici dans l'ordre dans lequel se produisent les premières coïncidences :
$d_0=d_1$, $r_0=r_1$, $d_1=d_2$, $r_1=r_2$, $d_2=d_3$, ... À partir des valeurs initiales r_0 et d_0 on calcule d'abord d_1 par l'égalité $\alpha-(n-r_0)^2=d_0*d_1$ on peut alors comparer d_1 avec d_0 ce qui explique que $d_0=d_1$ soit la première coïncidence, puis on calcule r_1 par la division euclidienne $2n-r_0=q_1*d_1+r_1$ que l'on compare à r_0 , etc.
On constate qu'une période paire $2k$ s'obtient par la coïncidence $r_{k-1}=r_k$, aucune coïncidence précédente n'ayant été observée et qu'une période impaire $2k+1$ s'obtient par la coïncidence $d_k=d_{k+1}$ avec la même réserve.

Remarque
Si la période est impaire alors le nombre α est la somme de deux carrés.

En effet pour un certain i la coïncidence $d_i = d_{i+1}$ a lieu et $\alpha - (n - r_i)^2 = d_i * d_{i+1}$ implique $\alpha = (n - r_i)^2 + d_i^2$.

Annexe

Pour les nombres α de la forme $(2m+1)^2 + 4 \quad m \neq 0$ la période du développement de √α vaut 5.

On commence par déterminer n, d, r_1, d_2, r_2, *et* d_3 .
Par $n = 2m+1$ et $d = 4$ donc $d \neq 1$, la division euclidienne de $4m+2$ par 4 donne $q_1 = m$ et $r_1 = 2$ donc $r_1 \neq 0$. On en déduit $d_2 = 1 + 2m$ qui est impair donc $d_2 \neq d_1$ puis la division euclidienne de $2n - r_1$ par d_2 : $4m + 2 - 2 = 1 * d_2 + 2m - 1$ permet de déterminer r_2 . $r_2 = 2m - 1$ est un nombre impair donc $r_1 \neq r_2$.
Enfin la relation $\alpha - (n - r_2)^2 = d_2 * d_3$: $(2m+1)^2 + 4 - (2m + 1 - (2m-1))^2 = (2m+1) * d_3$ donne $d_3 = 2m+1$ et produit la première coïncidence $d_2 = d_3$ .La période vaut 5.

Remarque : la contrainte $m \neq 0$ provient de la condition $d \leq 2n$ qui se traduit par $4 \leq 4m+2$.

La période du développement de√α est 3 si et seulement si α s'écrit $\alpha = (y(1 + 4xy) + x)^2 + 1 + 4xy$ pour x et y dans N*.

Montrons l'implication directe :
* Si la période du développement de √α est 3 alors $\alpha = (y(1 + 4xy) + x)^2 + 1 + 4xy$ pour x et y dans N*.
La période du développement de√α est 3 signifie que $d \neq 1$ $r_1 \neq 0$ et $d_2 = d$. On dispose des égalités $2n = q_1 * d + r_1$ avec $r_1 \neq 0$ et $q_1 \neq 0$ et $d_2 = 1 + q_1 * r_1$ d'où $d_2 = d$ implique $2n = q_1 * (1 + q_1 * r_1) + r_1$ (A).
Montrons que l'hypothèse r_1 *impair* conduit à une absurdité.
r_1 *impair* implique $q_1 * (1 + q_1 * r_1)$ *impair* c'est à dire q_1 *impair* et $1 + q_1 * r_1$ *impair* ,par ailleurs r_1 *impair* et q_1 *impair* impliquent $1 + q_1 * r_1$ *pair* d'où une contradiction.

r_1 *pair* et (A) implique $q_1 * (1 + q_1 * r_1)$ *pair* et $1 + q_1 * r_1$ *impair* . On en déduit que q_1 *pair*
Posons $r_1 = 2x$ *et* $q_1 = 2y$ pour x et y dans N*
L'égalité (A) s'écrit après simplification par 2 $n = y * (1 + 4yx) + x$ et $d_2 = 1 + 4yx$. $d_2 = d$ donc $d = 1 + 4xy$ ce qui permet d'écrire la décomposition de α : $\alpha = (y(1 + 4xy) + x)^2 + 1 + 4xy$ pour x et y dans N*($d \leq 2n$ est facilement vérifié car y n'est pas nul).
Réciproquement montrons que
**Si $\alpha = (y(1 + 4xy) + x)^2 + 1 + 4xy$ pour x et y dans N* alors la période du développement de√α est 3.
L'hypothèse donne immédiatement $n = y * (1 + 4yx) + x$ et $d = 1 + 4yx$ donc $d \neq 1$.
La division euclidienne de $2n$ par d donne $q_1 = 2y$ et $r_1 = 2x$ donc $r_1 \neq 0$
$d_2 = 1 + q_1 * r_1$ s'écrit $d_2 = 1 + 4yx$ donc $d_2 = d$
$d \neq 1$, $r_1 \neq 0$ et $d_2 = d$ cela implique que la période du développement de√α est 3.
Exemple : en prenant x et y dans l'ensemble {1, 2, 3} on obtient neuf nombres: 41, 1313, 13033, 130, 370, 269, 1613, 2834, 5954.
Remarque
L'égalité $(y(1 + 4xy) + x)^2 + 1 + 4xy = (y(1 + 4xy) - x)^2 + (1 + 4xy)^2$ prouve que ces nombres sont

somme de deux carrés.

Il existe des séries de nombres entiers consécutifs aussi longues que l'on veut $a_1, \; a_2, \; a_3, ...$ telles que pour tous les termes a_i de la série, le développement de $\sqrt{(a_i)}$ a une période égale à 4.

Il suffit de partir pour $n \geq 2$ de la décomposition $\alpha_1 = n^2 + 2n - 1$, $d = 2n - 1$ donc $d \neq 1$. La division euclidienne $2n = 1*(2n-1) + 1$ donne $r_1 = 1$ donc $r_1 \neq 0$ $d_2 = 1 + 1*1 = 2$ donc $d_2 \neq d_1$. 2 divise $2(n-1)$ le nombre α_1 mène à un développement de période 4.

À quelle condition le nombre $\alpha_2 = n^2 + 2n - 2$ qui précède α_1 donne t il une période égale à 4? $d = 2n - 2$ donc $d \neq 1$. L'égalité $2n = 1*(2n-2) + 2$ doit être une division euclidienne , ce qui implique $n \geq 3$, on a alors $r_1 = 2$ donc $r_1 \neq 0$ et $q_1 = 1$. La relation $d_2 = 1 + q_1 * r_1$ donne $d_2 = 1 + 1*2 = 3$ donc $d_2 \neq d_1$ .Pour avoir un développement de période 4, il suffit que 3 divise $2(n-2)$ ce qui compte tenu de $n \geq 3$ équivaut à $n = 5 + 3k$ $k \geq 0$.
La condition $n = 5 + 3k$ $k \geq 0$ produit des nombres consécutifs α_1 et α_2 menant chacun à une période égale à 4.

Le procédé pour obtenir trois nombres consécutifs ou plus apparaît clairement, il est algorithmique et on le résout grâce aux congruences et au théorème des restes chinois. Il se poursuit par :
Sachant que α_1 et α_2 mènent chacun à une période égale à 4, à quelle condition le nombre $\alpha_3 = n^2 + 2n - 3$ donne t il une période égale à 4 ? etc.

Si α est un nombre premier et si la période du développement de √α vaut 4 alors le nombre α est de la forme $(2m+1)^2 - 2$ $m \neq 0$.

Dans ce qui suit notre objectif est de déterminer les nombres α conduisant à une période égale à 4, non pas par un test, mais sous une forme pseudo-algébrique.

Soit α de la forme $n^2 + d$ avec $1 \leq d \leq 2n$.
Supposons $d \neq 1$ et effectuons la division euclidienne de $2n$ par d, dans cette relation par définition $d \leq 2n$ donc $q_1 \neq 0$: $2n = q_1 * d + r_1$ *et* $r_1 < d$.
Supposons $r_1 \neq 0$, on a $d_2 = 1 + q_1 * r_1$ supposons $d_2 \neq d$ et effectuons la division euclidienne de $2n - r_1$ par d_2 qui n'est pas nul : $2n - r_1 = q_2 * d_2 + r_2$ *et* $r_2 < d_2$.
Nous savons que la période du développement de √α vaut 4 si et seulement si $d \neq 1$, $r_1 \neq 0$, $d_1 \neq d_2$ et $r_1 = r_2$ Les deux divisions précédentes permettent d'exprimer n et d en fonction des deux variables r_1 et q_2 . On obtient par la deuxième $2n = 2r_1 + q_2 * d_2$ (A) qui donne une valeur entière de n si et seulement si $q_2 * d_2$ est pair et on obtient par la première $r_1 + q_2 * d_2 = q_1 * d$ qui donne une valeur entière pour d si et seulement si q_1 est un diviseur de $r_1 + q_2 * d_2$.
La relation $d_2 = 1 + q_1 * r_1$ montre l'équivalence :
q_1 est un diviseur de $r_1 + q_2 * d_2$ équivalent à q_1 est un diviseur de $r_1 + q_2$.

Pour r_1 et q_2 fixés, le choix d'un diviseur de $r_1 + q_2$ permet de calculer d_2 et détermine en général un nombre α(sauf si $q_2 * d_2$ est impair). Le nombre α est alors déterminé par

$n=r_1+\dfrac{q_2*d_2}{2}$, $d=\dfrac{r_1+q_2}{q_1}+q_2*r_1$, $d_2=1+q_1*r_1$ et q_1 un diviseur de r_1+q_2 .

Étudions les nombres α en fonction de la parité de q_2 .

* q_2 est pair

On pose $q_2=2\text{k}$, on obtient une première famille de nombres α de la forme $(r_1+k*d_2)^2+\dfrac{r_1+2\text{k}}{q_1}+2\text{k}*r_1$ pour $r_1\geq 1$ *et* $k\geq 1$ et q_1 un diviseur de la somme r_1+2k .

Aucun des nombres de cette famille n'est premier !

Montrons que d_2 divise tous les nombres de cette famille.

Considérons le nombre $q_1*\alpha$ c'est à dire $q_1*(n^2+d)$

soit $q_1*\alpha=q_1*(r_1+k*d_2)^2+r_1+2\text{k}*d_2$ $\quad q_1*\alpha\equiv q_1*r_1^2+r_1 \quad modulo\, d_2$

comme $q_1*r_1^2+r_1=r_1*d_2$, d_2 divise $q_1*\alpha$ et il est premier avec q_1 car $d_2=1+q_1*r_1$ donc d'après le théorème de Gauss il divise α . Comme $d_2\neq 1$ le nombre α n'est pas premier.

** q_2 est impair

Sous cette hypothèse la relation $2n=2\text{r}_1+q_2*d_2$ ne donne une valeur entière pour n que si d_2 est pair, l'égalité $d_2=1+q_1*r_1$ entraîne alors r_1 et q_1 impairs.

On obtient une deuxième famille de nombres α de la forme $\left(r_1+q_2*\dfrac{d_2}{2}\right)^2+\dfrac{r_1+q_2*d_2}{q_1}$ pour r_1 *et* q_2 *impairs* et q_1 un diviseur impair de la somme r_1+q_2 .

Posons $d_2=2\text{d}'$ montrons que les nombres de cette deuxième famille sont divisibles par d' .

Considérons le nombre $q_1*(n^2+d)$

soit $q_1*\alpha=q_1*(r_1+q_2*d')^2+r_1+q_2*2\,d'$ $\quad q_1*\alpha\equiv q_1*r_1^2+r_1 \quad modulo\, d'$

d' divise $q_1*\alpha$ et il est premier avec q_1 car $2\text{d}'=1+q_1*r_1$ donc d'après le théorème de Gauss il divise α .

Si le nombre α est premier alors d' doit être égal à 1 donc $d_2=2$ et finalement $r_1=1$ et $q_1=1$.

En posant $q_2=1+2\text{k}$ on a $\alpha=(1+(1+2\text{k}))^2+1+(1+2\text{k})*2$ pour $k\geq 0$. On vérifie facilement que $(2+2\text{k})^2+3+4\text{k}=(3+2\text{k})^2-2$.

Ainsi si α est un nombre premier et si la période du développement de √α vaut 4, alors le nombre α est de la forme $(2m+1)^2-2$ $\quad m\neq 0$.

Le nombre 119 est de cette forme et conduit à une période 4, cependant il n'est pas premier ! Il n'est pas le seul, dommage !