# Deux défis de Pierre Fermat

par André Seguin

Ce texte montre l'aide que peut apporter le logiciel Xcas pour progresser vers la solution de deux problèmes du XVII$^{e}$ siècle. Présentés comme des défis pour les mathématiciens de l'époque, ils peuvent, aujourd'hui, être pratiquement abordés par un élève de lycée. Énoncé et solution se fondent instantanément en un clic, ce qui permet d'obtenir les résultats demandés en un temps record.

Pour le premier défi – une équation de Pell –, nous dégageons une loi qui permet de trouver d'autres solutions à partir de l'une d'entre elles. Puis, en utilisant un algorithme datant des premiers siècles de l'ère chrétienne, nous construisons des programmes qui permettent de trouver une solution minimale.

Pour le deuxième défi – une égalité pythagoricienne –, nous construisons d'abord une solution qui chemine par les connaissances exigibles d'un élève du secondaire. Puis, toujours avec les outils élémentaires, nous donnons une forme plus générale au problème. Enfin, par l'utilisation de la géométrie dynamique et du calcul formel, laquelle se résume par définir et observer, nous reléguons au musée ce qui précède.

Quelques notes historiques agrémentent le texte autour de l'interrogation sur Fermat et les preuves.

Sommaire

Défi arithmétique
L'énoncé........................................................................................ 2
Exemple de Fermat.......................................................................... 3 - 4
Les solutions minimales observées pour α <100............................…. 4 - 5
Vers la solution – Le principe...........................................................….. 5
La règle..........................................................................................… 6
Les programmes …........................................................................…..... 7 - 8

Défi géométrique
L'énoncé.....................................................................................….... 9
Une solution aujourd'hui.................................................................... 10
Euler relève le défi.........................................................................…. 10 - 11
Fermat avait-il la solution ?.............................................................. 11
Étude d'un lieu...........................................................................…..... 11 - 12
Un problème cousin.......................................................................... 12
Géométrie dynamique et calcul formel…............................................ 13
Annexe............................................................................................ 14 - 15

## Fermat et les nombres entiers

Au début du XVII[e] siècle, rares sont les mathématiciens qui s'intéressent aux nombres entiers. La géométrie et la nouvelle analyse les absorbent totalement. Cela chagrine Fermat, qui réagit ainsi [1] :

> Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même? C'est la tendance qui apparait dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes, et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue, et par suite à la Géométrie.
>
> Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre, la théorie des nombres entiers; cette théorie n'a été que très légèrement ébauchée par Euclide et n'a pas été assez cultivée par ses successeurs (à moins qu'elle n'ait été renfermée dans ces livres de Diophante, dont l'injure du temps nous a privés); les arithméticiens ont donc à la développer ou à la renouveler.
>
> Pour éclairer leur marche, je leur propose de démontrer comme théorème ou de résoudre comme problème l'énoncé suivant; s'ils y parviennent, ils reconnaitront au moins que des questions de ce genre ne le cèdent ni pour la subtilité, ni pour la difficulté, ni pour le mode de démonstration, aux plus célèbres de la Géométrie :
>
> Étant donné un nombre non carré quelconque, il y a une infinité de carrés déterminés tels qu'en ajoutant l'unité au produit de l'un d'eux par le nombre donné, on ait un carré.
>
> Par exemple, on donne 3, nombre non carré.
>
> $$3 \times 1^2 + 1 = 4 \text{ (carré)},$$
> $$3 \times 16 + 1 = 49 \text{ (carré)}.$$
>
> Au lieu des carrés 1 et 16, on peut trouver une infinité d'autres carrés satisfaisant à la condition proposée, mais je demande une règle générale, s'appliquant à tout nombre non carré quelconque qui peut être donné.
>
> On demande par exemple un carré, tel qu'en ajoutant l'unité à son produit par 149 ou par 109 ou par 433, etc., on ait un carré.

Pour motiver ses pairs, Fermat leur propose un défi dont l'énoncé peut se traduire par :
α étant un entier naturel non carré, l'équation $\alpha x^2+1=y^2$ admet une infinité de solutions, une solution étant un couple $(x, y)$ avec x et y des entiers naturels.

1 Extrait des œuvres de Fermat éditées par Paul Tannery et Pierre Henri.

Remarque : le couple (0,1) est solution pour toute valeur de α.
Fermat élimine le cas ou α est un carré, qui correspond à des solutions triviales.

**L'exemple de Fermat α = 3.**

Dans la ligne de commande (en rouge) on utilise les fonctions arithmétiques du logiciel Xcas pour trouver les solutions correspondantes à x < 100000. La variable j se substitue à x.

```
1 for(j:=0;j<100000;j++){if(type(sqrt(3*j*j+1))==DOM_INT){print([j,sqrt(3*j*j+1)]);}}
[0,1]
[1,2]
[4,7]
[15,26]
[56,97]
[209,362]
[780,1351]
[2911,5042]
[10864,18817]
[40545,70226]
Evaluation time: 13.594
```

Excepté pour les deux premières solutions, une loi semble se dégager de l'examen des valeurs successives de x : 0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, ...
4 =1x4 – 0 ; 15 = 4x4 – 1 ; 56 = 15x4 – 4 ; 209 = 56x4 – 15 ; ...
Ainsi $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n$ .
La même remarque a lieu pour les valeurs de y : $y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n$ .

On vérifie facilement avec le logiciel Xcas que la loi persiste pour d'autres valeurs de α. Cependant le coefficient multiplicateur varie. Il vaut 4 pour α = 3 et 16 pour α = 7...
En prenant pour argent comptant ce qu'on observe, comment obtenir ce coefficient ?
Pour cela, à l'aide de la solution triviale (0,1) et d'une autre solution $(x_1,y_1)$, on résout l'équation du second degré en X :

$$\alpha(Xx_1 - 0)^2 + 1 - (Xy_1 - 1)^2 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Elle admet X= 0 comme solution, l'autre solution est la valeur $2y_1$. C'est le coefficient cherché !
Il dépend du couple $(x_1,y_1)$. En annexe page 14, nous établirons la loi observée précédemment, pour le moment tirons parti de notre dernier résultat. En remplaçant X par $2y_1$ dans l'équation (A) on obtient $\alpha(2y_1x_1)^2+1-(2y_1^2-1)^2=0$ égalité qui montre que le couple $(2y_1 x_1 , 2y_1^2 -1)$ est aussi solution.

Cette nouvelle solution, en se substituant à $(x_1,y_1)$, permet d'en trouver une autre et ainsi de suite...
Par exemple, si α = 3, on obtient (1,2), (4,7), (56,97), (10864, 18817)… qui est une sous-suite du résultat plus général. Remarquons que le coefficient multiplicateur change à chaque fois.
Une partie de l'affirmation de Fermat est démontrée.

**S'il existe une solution autre que (0,1), il en existe une infinité.**

Il est remarquable de constater que la méthode de Héron permet de trouver la nouvelle solution à partir du rationnel $\frac{y_1}{x_1}$ associé à la solution $\alpha x_1^2+1=y_1^2$ , comme le montre le calcul suivant :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{\alpha x_1}{y_1}\right)=\frac{y_1^2+\alpha x_1^2}{2x_1y_1}=\frac{2y_1^2-1}{2y_1x_1}$$

**Existence d'une solution**

**Quelques cas particuliers**

Lorsque α est très proche d'un carré (± 1 ou 2) il est aisé de trouver une solution non triviale.
Exemple :

1) - Si α précède un carré, α = 3, 8, 15, 24,... le couple (1, √(α+1)) est solution. Pour α = 80 le couple (1,9) est solution .
2) - De même, si α est le produit de deux nombres consécutifs, α= 2, 6, 12, 20, 30,...
le couple (2, √(4α-1))) est solution. Pour α = 72, le couple (2,17) est solution.

Mais on ne peut pas dégager de ces cas particuliers la règle générale demandée par Fermat !

**La solution minimale observée pour les premières valeurs de α.**

On peut essayer à l'aide du logiciel Xcas d'observer la solution minimale[2] pour les premières valeurs de α. Tapons la ligne de commande suivante

for(j:=1;j<100;j++){if(type(sqrt(j))!=DOM_INT){for(k:=1;k<10000;k++){if(type(sqrt(j*k$^2$ +1))==DOM_INT){print(j, k, sqrt(j*k$^2$ +1));break;}}}}.

Dans cette ligne de commande

La variable j représente α, elle varie de 1 à 100 – for(j:=1;j<100;j++).
α n'est pas un carré - if(type(sqrt(j))!=DOM_INT).
La variable k représente x, elle varie de 1 à 10000 – for(k:=1;k<10000;k++).
Si α.x$^2$ +1 est un carré - if(type(sqrt(j*k$^2$ +1))==DOM_INT).
Imprimer α, x, y et passer à la valeur suivante de α - print(j, k, sqrt(j*k$^2$ +1));break;

Voici le début de la réponse, la première colonne correspond aux valeurs de α.(sauf 1, 4, 9, 16….), la deuxième aux valeurs de x, la dernière aux valeurs de y.

| | | |
|---|---|---|
| 2,2,3 | 31,273,1520 | 58,2574,19603 |
| 3,1,2 | 32,3,17 | 59,69,530 |
| 5,4,9 | 33,4,23 | 60,4,31 |
| 6,2,5 | 34,6,35 | 62,8,63 |
| 7,3,8 | 35,1,6 | 63,1,8 |
| 8,1,3 | 37,12,73 | 65,16,129 |
| 10,6,19 | 38,6,37 | 66,8,65 |
| 11,3,10 | 39,4,25 | 67,5967,48842 |
| 12,2,7 | 40,3,19 | 68,4,33 |
| 13,180,649 | 41,320,2049 | 69,936,7775 |
| 14,4,15 | 42,2,13 | 70,30,251 |
| 15,1,4 | 43,531,3482 | 71,413,3480 |
| 17,8,33 | 44,30,199 | 72,2,17 |
| 18,4,17 | 45,24,161 | 74,430,3699 |
| 19,39,170 | 46,3588,24335 | 75,3,26 |
| 20,2,9 | 47,7,48 | 76,6630,57799 |
| 21,12,55 | 48,1,7 | 77,40,351 |
| 22,42,197 | 50,14,99 | 78,6,53 |
| 23,5,24 | 51,7,50 | 79,9,80 |
| 24,1,5 | 52,90,649 | 80,1,9 |
| 26,10,51 | 53,9100,66249 | 82,18,163 |
| 27,5,26 | 54,66,485 | 83,9,82 |
| 28,24,127 | 55,12,89 | 84,6,55 |
| 29,1820,9801 | 56,2,15 | 86,1122,10405 |
| 30,2,11 | 57,20,151 | 87,3,28 |

Les valeurs de x et de y sont chaotiques. On remarque que, pour α= 61, 73 et 85, le logiciel Xcas ne donne pas de réponse. Pour 85 et 73 le problème se résout en prenant k<300000, ce qui allonge le

2 Les solutions peuvent être rangées en ordre croissant selon x.

temps d'exécution. Malgré tout, pour $\alpha = 61$, on attend vainement une réponse, même pour $k<10^6$. C'est cette valeur que Fermat choisit pour lancer son tout premier défi à Frénicle de Bessy.

**Vers la solution**

Ce type d'équation est connu depuis fort longtemps et une brèche vers sa résolution partielle est ouverte au XII^e siècle en Inde. La méthode utilise un algorithme encore plus ancien qui permet d'approcher les racines carrées. Il s'agit probablement de la règle dont parle Fermat. Elle semble chaque fois mener au résultat, parfois après de longs calculs. La résolution complète, qui est difficile, sera mise au point par étapes pendant le XVII^e et le XVIII^e siècles. Dans la suite du texte, nous n'essayons pas de justifier la règle énoncée.

**Le principe**

Il repose sur un algorithme. Soit s un nombre irrationnel plus grand que 1. Écrivons-le sous la forme $E$ + v avec $E$ sa partie entière et v un nombre irrationnel entre 0 et 1. En posant $w=\frac{1}{v}$ , on a l'égalité $s=E+\frac{1}{w}$ dans laquelle w est un irrationnel plus grand que 1.

Le nombre s donne donc naissance à deux nombres $E$ et w, w étant de même nature que s (irrationnel et plus grand que un). Nous pouvons donc recommencer, w prenant la place de s, et obtenir de nouvelles valeurs $E'$ et w' ainsi qu'une nouvelle égalité $w=E'+\frac{1}{w'}$ et ainsi de suite.

$$s=E_1+\frac{1}{w_1} \quad ; \quad w_1=E_2+\frac{1}{w_2} \quad ; \quad w_2=E_3+\frac{1}{w_3} \quad ;\ldots\ldots ; \quad w_{j-1}=E_j+\frac{1}{w_j}$$

À chaque étape, il existe un algorithme "retour" qui, à partir de l'une des égalités précédentes, revient au nombre irrationnel s.

L'idée est d'utiliser cet algorithme "retour" en négligeant dans la dernière égalité considérée le terme irrationnel $\frac{1}{w'}$ . Ce qui revient à remplacer l'irrationnel du premier membre par sa partie entière. On quitte alors le domaine des irrationnels et l'algorithme retourne un rationnel. La fraction irréductible qui le représente s'appelle réduite de s au rang considéré.

Notations : la partie entière au rang j sera notée $E_j$ et la réduite de rang j $\frac{k_j}{h_j}$ .

$$\frac{k_1}{h_1}=\frac{E_1}{1} \quad ; \quad \frac{k_2}{h_2}=E_1+\frac{1}{E_2}=\frac{E_2*E_1+1}{E_2} \quad ; \ldots$$

Les réduites vont nous conduire à une solution du problème de Fermat. Pour éviter de faire les calculs à la main, écrivons un programme.

**Le programme reduite(n ,r)**

Pour un irrationnel s plus grand que 1, il renvoie la fraction réduite de rang r.
"floor" est la fonction partie entière.
"normal"simplifie la fraction.
c un compteur.
On crée une liste L pour recevoir les valeurs successives de *E.*
Comme L[0] = $E_1$ on pose k:=r-1, k est l'indice du dernier élément de la liste.
En prenant z = L[k] on néglige la quantité irrationnelle, puis on remonte les calculs en partant de z.

```
1 Prog   Edit   Add   3   nxt   OK (F9)   Save
reduite( s , r ):={
local j,k ,f, t , v , w , z , c,L ;
c:= 0 ; j:=s ;L:=NULL;
while( c < r ){
t := floor(j); v:= j-t ; w := normal(1 /v); L := L, t ; j := w ; c := c+1;}

k:=r-1; z:=L[k];f:=z; while(k>0){ f:= normal(L[k-1]+1/z) ; z:=f; k:=k-1}
f;}
:;
// Parsing reduite
// Success compiling reduite
```

Voici pour les rangs de 1 à 10, les réduites des nombres √2, √5, √7, √13, √19. Elles peuvent se calculer à la main.

2 reduite(sqrt(2),j)$(j=1..10)

$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}\right)$$

3 reduite(sqrt(5),j)$(j=1..10)

$$\left(2, \frac{9}{4}, \frac{38}{17}, \frac{161}{72}, \frac{682}{305}, \frac{2889}{1292}, \frac{12238}{5473}, \frac{51841}{23184}, \frac{219602}{98209}, \frac{930249}{416020}\right)$$

4 reduite(sqrt(7),j)$(j=1..10)

$$\left(2, 3, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}, \frac{82}{31}, \frac{127}{48}, \frac{590}{223}, \frac{717}{271}\right)$$

5 reduite(sqrt(13),j)$(j=1..10)

$$\left(3, 4, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71}, \frac{393}{109}, \frac{649}{180}\right)$$

6 reduite(sqrt(19),j)$(j=1..10)

$$\left(4, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}, \frac{61}{14}, \frac{170}{39}, \frac{1421}{326}, \frac{3012}{691}, \frac{4433}{1017}, \frac{16311}{3742}\right)$$

Le lien avec le problème de Fermat

On constate que 170/39 la réduite de rang six de √19 donne la solution $19.(39)^2 + 1 = 170^2$ pour l'équation de Fermat. De même, 649/180 la réduite de rang dix de √13 donne la solution $13.(180)^2 + 1 = 649^2$ . Pour √**7,** √5 et √3 ce sont les réduites 8/3, 9/4 et 2/1.

**La règle**

**En considérant les réduites successives correspondantes à l'irrationnel √( α), on finira par trouver une solution de l'équation** $\alpha x^2+1=y^2$ **.**

**Mise en œuvre**

Une méthode naïve consiste à passer en revue les réduites de √α jusqu'à trouver celle qui vérifie l'équation. Voici les solutions aux défis que se lancent, au début du XVII$^{e}$ siècle, les mathématiciens Fermat, Frénicle de Bessy, Brouncker, Wallis et quelques autres. Elles sont trouvées instantanément par le programme "Minimale(n)" détaillé plus loin.

```
2 Minimale(61)
                    [226153980, 1766319049]
3 Minimale(109)
                    [15140424455100, 158070671986249]
4 Minimale(149)
                    [2113761020, 25801741449]
5 Minimale(313)
                    [1819380158564160, 32188120829134849]
6 Minimale(433)
                    [5025068784834899736, 104564907854286695713]
7 Minimale(541)
                    [159395869721270110077187138775196900, 3707453360023867028800645599667005001]
```

Pour α =313, défi lancé par Frénicle de Bessy à Brouncker, ce dernier répond qu'il ne lui a fallu qu'une heure ou deux pour en venir à bout. Quant au nombre 54, il a dû être décourageant, même pour Fermat.
Trouver la solution minimale pour toutes les valeurs de α jusqu'à 150, travail effectué en son temps par Frénicle de Bessy, demande aujourd'hui une demi-seconde.
Extrait de la réponse du logiciel

```
for(j:=1;j<151;j++){if(type(sqrt(j))!=DOM_INT){print(j,Minimale(j))}}
140,[6,71]
141,[8,95]
142,[12,143]
143,[1,12]
145,[24,289]
146,[12,145]
147,[8,97]
148,[6,73]
149,[2113761020,25801741449]
150,[4,49]
Evaluation time: 0.469
```

**Le programme Minimale(n)**

**Une récurrence pour les réduites**
Que se passe-t-il si, dans l'algorithme retour, à l'étape j après avoir négligé le terme irrationnel, on substitue à la partie entière restante $E_j$, une fraction a/b. Il suffit seulement de remplacer z=L[k] par z= a/b dans le programme reduite(s,r). On obtient alors le programme reduite-généralisée.

Considérons les réduites-généralisées de rang 1 à 9 de √(28)

```
2 reduitegene(sqrt(28),j)$(j=1..9)
```

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{5 a+b}{a}, \frac{16 a+5 b}{3 a+b}, \frac{37 a+16 b}{7 a+3 b}, \frac{127 a+37 b}{24 a+7 b}, \frac{1307 a+127 b}{247 a+24 b}, \frac{4048 a+1307 b}{765 a+247 b}, \frac{9403 a+4048 b}{1777 a+765 b}, \frac{32257 a+9403 b}{6096 a+1777 b}\right)$$

Nous voyons ci-dessous que les premières réduites de √(28) servent à les écrire.

```
3 reduite(sqrt(28),j)$(j=1..9)
```

$$\left(5, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}, \frac{4048}{765}, \frac{9403}{1777}, \frac{32257}{6096}, \frac{331973}{62737}\right)$$

Une récurrence saute aux yeux. Elle se démontre facilement.

**Conséquence**

En tenant compte du fait que la réduite $\frac{k_j}{h_j}$ s'obtient par la réduite-généralisée de rang j pour la fraction $\frac{a}{b}=\frac{E_j}{1}$, on arrive aux formules $k_j=E_j * k_{j-1}+k_{j-2}$ *et* $h_j=E_j * h_{j-1}+h_{j-2}$ pour j >2. Nous utilisons ces relations pour élaborer le programme Minimale(n)

```
Minimale( n ):={
local E1,E2,E,j,h,h1,h2,k,k1, k2  , w , c;
E1:=floor(sqrt(n));E2:=floor(1/(sqrt(n)-E1));
k1:=E1;k2:=E1*E2+1;h1:=1;h2:=E2;
if(k1^2-n*h1^2==1){return [h1,k1];}
if(k2^2-n*h2^2==1){return [h2,k2];}
c:= 2;
j:=1/(1/(sqrt(n)-E1)-E2);
while( c < 650 ){
E := floor(j); h:=h2*E+h1;k:=k2*E+k1;
if(k^2-n*h^2==1){return [h,k];}
h1:=h2;k1:=k2
h2:=h;k2:=k;
w := normal(1 /(j-E)); j := w ; c := c+1;}

return 0;}
:;
// Parsing Minimale
// Success compiling Minimale

2 Minimale(29761)
[634428269690668285870347925677018838047165031122734018092096159163483023736292143109210333783225043410
```

**Aux portes du chaos**

Minimale(29761) est donné instantanément. x s'écrit avec environ 300 chiffres. Pour ce nombre, le logiciel permet encore de tester la condition $y^2 - 29761x^2 = 1$. Il faut cependant examiner 606 réduites avant d'avoir le résultat. Un programme[3] moins naïf, utilisant plus de mathématiques, est nécessaire pour des nombres comme 25309 demandant l'examen d'un plus grand nombre de réduites (642), car la condition $y^2 - 25309x^2 = 1$ ne peut plus être testée. Le programme renvoie la valeur 0.

3 Voir annexe II.

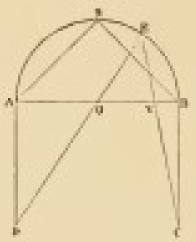
## Fermat et la géométrie

5. Enfin, pour ne pas paraître me réfugier dans les nombres faute de propositions géométriques, en voici quelques-unes, qui ne rougiront pas de se montrer en Angleterre. Les deux premières sont tirées de ma restitution des porismes d'Euclide.

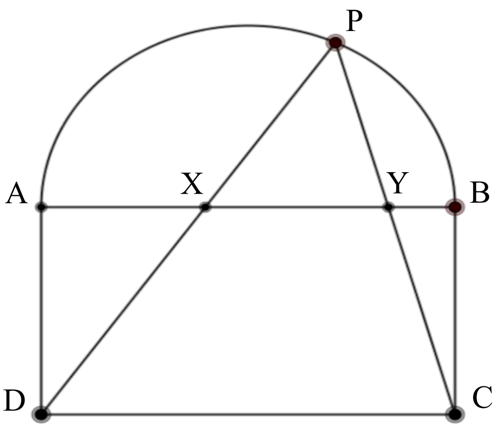
Soit sur le diamètre AB (*fig.* 90) le demi-cercle ANB; prenez en N le milieu de la demi-circonférence ANB, joignez NA, NB, et élevez en A, B les perpendiculaires AD, BC, égales à AN ou NB. Prenez sur la demi-circonférence un point quelconque E, joignez DE, EC, qui couperont le diamètre aux points O et V. Je dis que dans ce cas on aura $AV^2 + BO^2 = AB^2$.

Dans mon Traité, j'ai énoncé ce théorème ou problème sous une forme plus générale, mais, pour le moment, il suffit de ce cas particulier.

Fig. 90.



0n retrouve cet énoncé dans un livre récent de Ian Stewwart[4] sous une forme plus expéditive. Tracez un rectangle pour lequel AB est √2 fois AD. Collez un demi-cercle au dessus et choisissez un point P sur le demi cercle. Construisez X et Y comme cela est indiqué. Montrer que $AY^2 + BX^2 = AB^2$.




### Une solution aujourd'hui

Au XVII[e] siècle, Descartes révolutionne la géométrie en associant à chaque point du plan deux nombres ; c'est le début de la géométrie analytique. Fermat s'en inspire et, dans les pas de Descartes, met en relation courbes géométriques et équations algébriques (équation de droite, de cercle...).

En faisant appel à ces outils traitons ce défi avec les notations de la dernière figure.

4 *La chasse aux trésors mathématiques*, Flammarion.

Par hypothèse on a $\frac{AB}{AD}=\sqrt{(2)}$ . Posons t = √2 pour simplifier l'écriture.
Choisissons un repère (orthonormé) dont $A$ est l'origine et $AD$ l'unité de longueur, et pour lequel on a $A$(0,0) ; $D$(0,-1) ;$B$(t,0) ; $C$(t,-1) ; $P$(a,b).
Le demi-cercle en question correspond aux relations $\left(a-\frac{t}{2}\right)^2+b^2=\frac{t^2}{4}$ et $b\geq 0$ , c'est-à-dire $b=\sqrt{(a(t-a))}$ ; on en déduit en particulier que $0\leq a\leq t$ .
Pour obtenir les coordonnées des points $X$ et $Y$, nous allons considérer deux droites :

* La droite $PD$ qui a pour coefficient directeur $\frac{b-(-1)}{a-0}$ et pour équation $y=\frac{b+1}{a}x-1$ ,

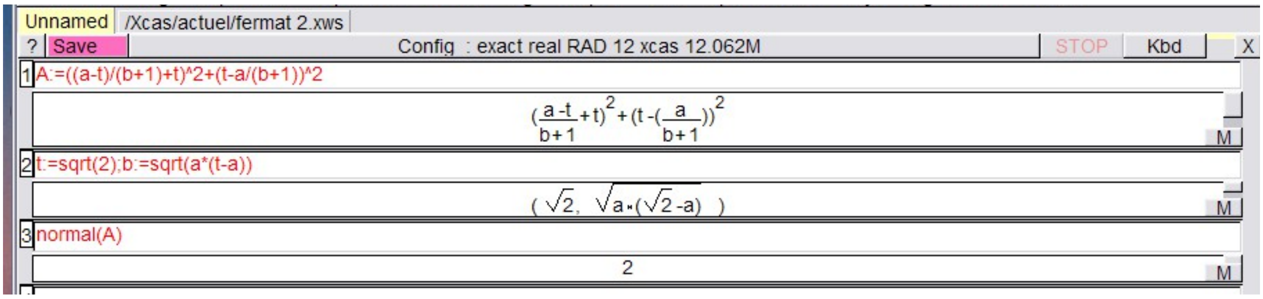
ce qui permet d'obtenir les coordonnées du point $X$ : $X$( $\frac{a}{b+1}$ , 0).

** La droite $PC$ à partir de laquelle on établit de même que les coordonnées du point $Y$ sont

$Y$( $\frac{a-t}{b+1}+t$ , 0).

L'expression $AY^2+BX^2$ s'écrit $\left[\frac{a-t}{b+1}+t\right]^2+\left[t-\frac{a}{b+1}\right]^2$

Le logiciel Xcas prend le relais




Réponse attendue car $AB$ est √2 fois $AD$ et $AD$ est l'unité, donc 2 = $AB^2$.
On a ainsi démontré que, pour toute valeur de a entre 0 et 1, donc pour tout point $P$ sur le demi-cercle, l'égalité $AY^2+BX^2=AB^2$ est vraie.

**Euler relève le défi**

Euler, à qui le problème est parvenu, le résout d'abord par l'analytique, mais en donne aussi une solution dans l'esprit des démonstrations géométriques de Fermat. On peut la retrouver dans un article de la série "How Euler Did It" écrit par Ed Sandifer.[5]
Dans cet article, l'auteur insinue qu'Euler est le premier à en donner une solution : "Fermat claims and Euler proves". Pourtant Fermat dit "voilà des propositions que j'ai découvertes et démontrées." Il aurait même pu ajouter en parlant de la preuve : "si elle n'est fournie ni par l'Angleterre, ni… elle le sera par la Narbonnaise".

**Fermat avait il la solution ?**

Au début de sa solution Euler utilise astucieusement l'hypothèse $\frac{AB}{AD}=\sqrt{(2)}$ pour ramener le

5 Eulerarchive.maa.org / HEDI-2008-12pdf

problème à une autre égalité qu'il prouve et qu'il baptise lemme. Mais d'où vient ce nombre $\sqrt{2}$ ? Comment Fermat l'aurait-il deviné ? La page 78 des *Œuvres* de Fermat fournit une piste à ce sujet. Il y parle de la différence qu'il y a entre chercher un lieu ou partir d'un lieu.
Dans son théorème il part d'un lieu - le demi-cercle - sur lequel il choisit un point P.
Mais il a pu penser à chercher le demi-cercle comme un lieu. Suivons cette approche et construisons $Y$ et $X$ deux points du segment $AB$ qui vérifient la relation $AY^2 + BX^2 = AB^2$, puis finalement étudions le lieu du point d' intersection des droites $DX$ et $DY$.

Pour plus de généralité ne faisons aucune hypothèse sur le rectangle et posons le rapport $\frac{AD}{AB} = k$ avec k un nombre positif, mais pas nécessairement égal à $\frac{\sqrt{(2)}}{2}$ comme dans l'énoncé.

On choisit un repère (orthonormé) dont $A$ est l'origine et $AB$ l'unité de longueur et pour lequel les coordonnées des points $A, B, C, D$ sont $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1\ ,-k))$, $D(0,-k)$.

Construction des points $X$ et $Y$
Soit $Y(r_1\ ,0)$ un point du segment $AB$. Le cercle de centre $A$ et de rayon $r_1$ recoupe le demi-cercle en $N$. Le cercle de centre $B$ passant par $N$, de rayon $r_2$, coupe le segment $AB$ en $X(1-r_2\ ,0)$[6].
La relation $r_1^2 + r_2^2 = 1$ dans le triangle rectangle $ANB$ montre que les points $X$ et $Y$ vérifient
$AY^2 + BX^2 = AB^2$ .

**Étude d'un lieu**

Coordonnées du point d'intersection des droites $CY$ et $DX$.

- La droite $CY$ a pour coefficient directeur $\frac{0-(-k)}{r_1-1}$ et son équation est $y = \frac{k}{r_1-1}(x-r_1)$ .

- La droite $DX$ a pour équation $y = \frac{k}{1-r_2}(x-1+r_2)$ .

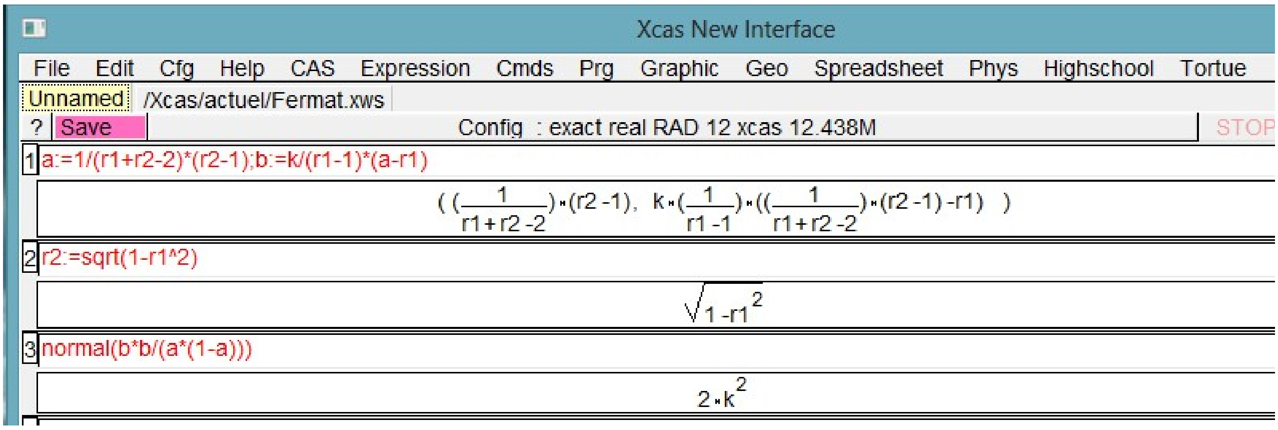
Les deux droites se coupent en un point $H(a,b)$ dont l'abscisse a est obtenue en résolvant l'équation aux abscisses des points d'intersection.

```
1 solve(k / (r1-1)*(x-r1)=k /(1-r2)*(x-1+r2))
```

$$\left[\left(\frac{1}{r1+r2-2}\right)\cdot(r2-1)\right]$$

On obtient l'ordonnée b par remplacement dans la première équation.
On peut alors montrer, même en faisant les calculs à la main, la relation qui existe entre b l'ordonnée du point $H$ sur le lieu et celle $y_c$ du point sur le demi cercle pour une même valeur de a.
Comme $y_c^2 = a.(1-a)$ étudions le rapport entre $b^2$ et $y_c^2$.
C'est plus rapide avec Xcas.

6 On a bien ainsi X avant Y



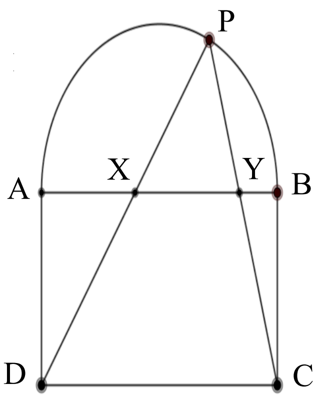

On obtient la relation $b^2 = 2.k^2.a.(1-a)$ c'est-à-dire l'équation d'une conique.

En fonction du paramètre k, le lieu du point $H$ est en général une demi-ellipse d'équation $y=\sqrt{(2k^2 x(1-x))}$ sauf pour le cas particulier où $AB$ est √2 fois $AD$, qui correspond à l'énoncé $k=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{(2)}}{2}$ et $2*k^2=1$ . Le lieu est alors le demi-cercle de diamètre $AB$.

Les propos de Fermat "Dans mon traité j'ai énoncé ce théorème ou problème sous une forme plus générale. Mais pour le moment il suffit de ce cas particulier." s'appliquent bien à l'étude qui vient d'être réalisée. Fermat connaissait peut-être ce qui précède par d'autres moyens sans en avoir laissé de trace écrite. Il dit lui même être paresseux pour rédiger.

**Un problème cousin**

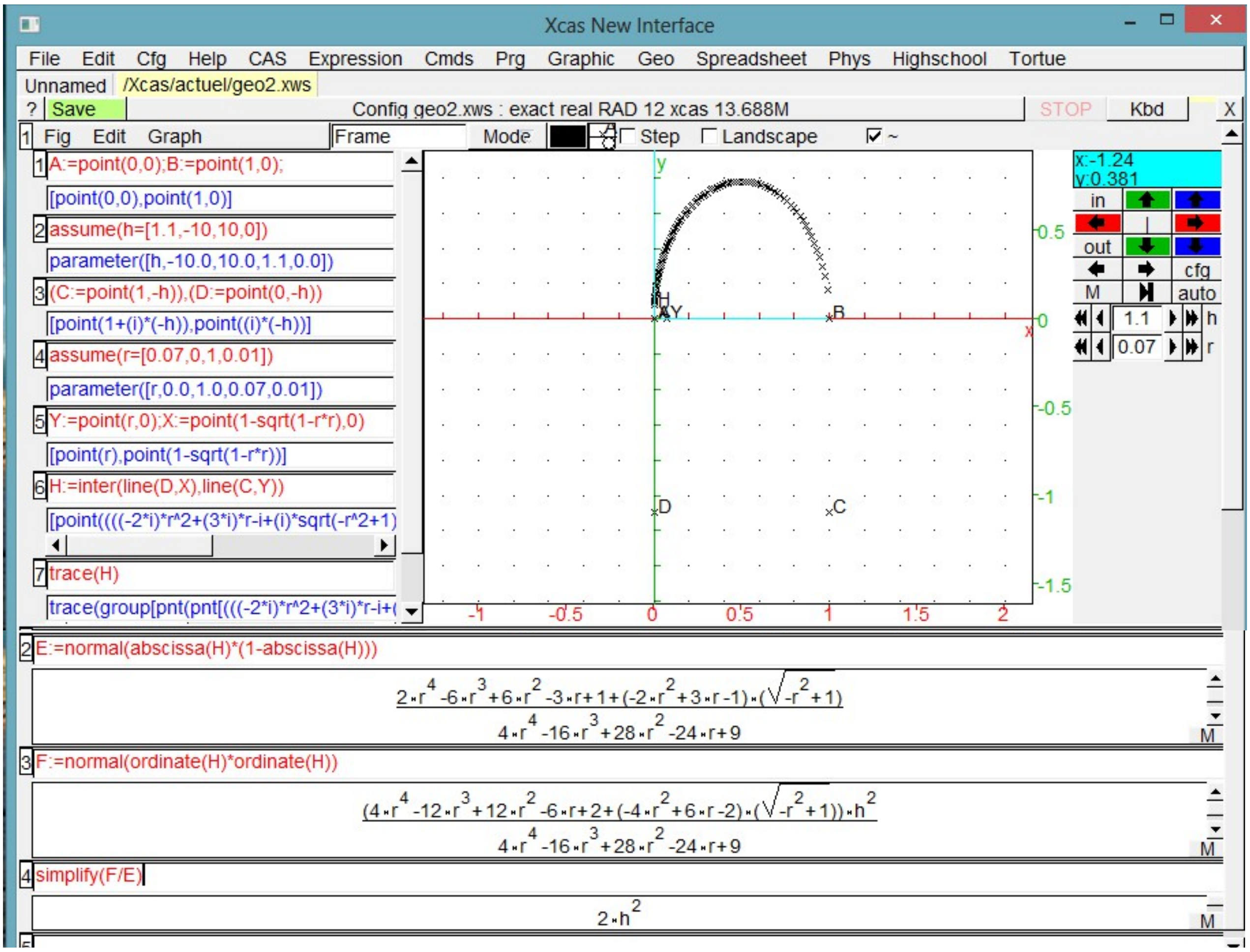
Tracez un carré. Collez au dessus une demi ellipse dont le grand axe est √2 fois le petit axe AB et choisissez un point P sur la demi ellipse. Construisez X et Y comme cela est indiqué.
Montrer que $AY^2 + BX^2 = AB^2$



**Géométrie dynamique et calcul formel**

Le logiciel Xcas permet de combiner géométrie dynamique et calcul formel.
Cet outil extraordinaire permet d'accéder directement à l'ensemble des résultats sans plus de commentaires. On ne parle plus de coefficient directeur, ni d'équation de droite. On se contente de définir les points, les droites et le point d'intersection.

Exemple pour la recherche du lieu.




Le dernier résultat peut même se voir directement en observant les deux résultats précédents.

Les porismes d'Euclide peuvent se traiter de façon similaire. Peut être ont-ils été restitués par Fermat grâce à la géométrie analytique naissante.

## Annexe I

À partir de deux solutions $(x_0,y_0) = (0,1)$ et $(x_1,y_1)$, les suites $(x_n)$ *et* $(y_n)$ définies par récurrence par $x_{n+2}=2y_1 x_{n+1}-x_n$ et $y_{n+2}=2y_1 y_{n+1}-y_n$ vérifient que, pour tout n, $\alpha x_n^2+1=y_n^2$ .
Démontrons ce résultat
Le raisonnement se fait par récurrence sur une conjonction de trois propositions.

Pour tout n $\quad y_{n+1} y_n-\alpha x_{n+1} x_n=y_1 \quad et \quad \alpha x_{n+1}^2+1=y_{n+1}^2 \quad et \quad \alpha x_n^2+1=y_n^2$

Initialisation

Pour n=0 $\quad y_1=y_1 \quad et \quad (\alpha x_1^2+1=y_1^2 \quad et \quad \alpha(0)^2+1=1^2)$
c'est une conséquence des hypothèses.

Hérédité Partie A
Supposons la propriété établie pour k - hypothèse de récurrence

$y_k y_{k-1}-\alpha x_{k-1} x_k=y_1 \quad et \quad (y_k^2=\alpha x_k^2+1 \quad et \quad \alpha x_{k-1}^2+1=y_{k-1}^2)$
et considérons
$A=y_{k+1} y_k-\alpha x_{k+1} x_k$ par définition des suites $(x_n)$ *et* $(y_n)$

$A=2y_1 y_k^2-y_{k-1} y_k-2y_1 \alpha x_k^2+\alpha x_{k-1} x_k$

$A=2y_1(y_k^2-\alpha x_k^2)-(y_k y_{k-1}-\alpha x_{k-1} x_k)$

L'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$A=2y_1(\alpha x_k^2+1-\alpha x_k^2)-(y_k y_{k-1}-\alpha x_{k-1} x_k)$ d'où $A=2y_1-y_1=y_1$

ainsi $y_{k+1} y_k-\alpha x_{k+1} x_k=y_1$

Hérédité partie B
Considérons $B=y_{k+1}^2$ par définition de la suite $(y_n)$
$B=(2y_1 y_k-y_{k-1})^2$ c'est-à-dire $B=4y_1^2 y_k^2-4 y_1 y_k y_{k-1}+y_{k-1}^2$

L'hypothèse de récurrence permet d'écrire

$B=4y_1^2(\alpha x_k^2+1)-4 y_1(\alpha x_k x_{k-1}+y_1)+\alpha x_{k-1}^2+1$ ; on en déduit $B=4y_1^2 \alpha x_k^2-4 y_1 \alpha x_k x_{k-1}+\alpha x_{k-1}^2+1$

c'est-à-dire $B=\alpha(2y_1 x_k-x_{k-1})^2+1$

ainsi $y_{k+1}^2=\alpha x_{k+1}^2+1 \quad et \quad y_k^2=\alpha x_k^2+1$

Pour tout n, $\quad y_{n+1} y_n-\alpha x_{n+1} x_n=y_1 \quad et \quad (\alpha x_{n+1}^2+1=y_{n+1}^2 \quad et \quad \alpha x_n^2+1=y_n^2)$

Connaître (0,1) et $(x_1,y_1)$ deux solutions de l'équation $\alpha x^2+1=y^2$ permet donc de connaître une infinité de solutions lesquelles semblent mieux correspondre à celles données par le logiciel Xcas Lorsque l'on part de la solution $(x_1,y_1)$ minimale. Cependant nous ne sommes pas certain d'obtenir toutes les solutions. Cela nécessite une démonstration.

**Annexe II**

Un programme moins naïf.

Il repose sur le lien entre la période du développement en fraction continue d'un irrationnel quadratique et les solutions de l'équation Pell-Fermat. On évite ainsi d'avoir à tester la condition $y^2 - \alpha x^2 = 1$ , ce que ne peut pas faire Xcas pour des nombres trop grands.

```
SolMinimale( n  ):={
local j , t ,  w ,l,w1, p,E1,E2,E,h,h1,h2,k,k1, k2  , y , c;
E1:=floor(sqrt(n));E2:=floor(1/(sqrt(n)-E1));
k1:=E1;k2:=E1*E2+1;h1:=1;h2:=E2;
 j :=normal(1 /(sqrt(n)-E1)) ;t:=floor(j);p:=1;
while( t!=2*E1 ){
 w := normal(1 /(j-t)); j := w ; p:=p+1;t := floor(j)  ;}
if(p==1|| p==2){return [E2,E1*E2+1];}
if(irem(p,2)==0){
c:= 2;
l:=1/(1/(sqrt(n)-E1)-E2);
while( c < p ){
E := floor(l); h:=h2*E+h1;k:=k2*E+k1;
h1:=h2;k1:=k2
h2:=h;k2:=k;
w1 := normal(1 /(l-E)); l := w1 ; c := c+1;}

return [h,k];}
if(irem(p,2)!=0){
c:= 2;
l:=1/(1/(sqrt(n)-E1)-E2);
while( c < 2*p ){
E := floor(l); h:=h2*E+h1;k:=k2*E+k1;
h1:=h2;k1:=k2
h2:=h;k2:=k;
w1 := normal(1 /(l-E)); l := w1 ; c := c+1;}

return [h,k];}
return 0;}
:;
```

```
4 SolMinimale(29761)
Evaluation time: 0.561
[634428269690668285870347925677018838047165031122734018092096159163483023736292143109210333783225043410390798
5 SolMinimale(25309)
Evaluation time: 0.578
[908305249021121431948758551204331512033507243659055742064625454410618931759548946264501360441005894516185442
6 SolMinimale(56149)
Evaluation time: 0.89
[241089003911616721556440844577162316837513825031770960456079513786419218045335531811298599429461972052016763
```

Pour ces trois nombres il faut examiner respectivement 606, 642 et 1010 réduites. Pour les deux derniers, le résultat ne peut pas être vérifié facilement.