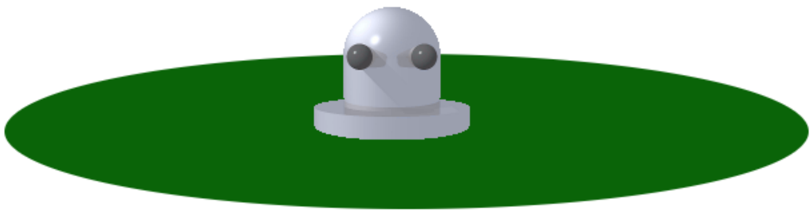
Étude d'une suite

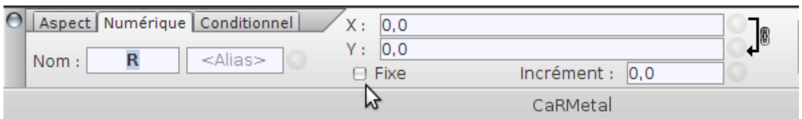


Un robot, initialement placé au centre d'un disque de rayon 1, cherche à en sortir. Pour cela, il avance d'abord d'une distance de $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$, puis d'une distance de $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$, puis d'une distance de $\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{12}$ etc.
Le but du TP est de voir s'il arrivera à sortir du disque.

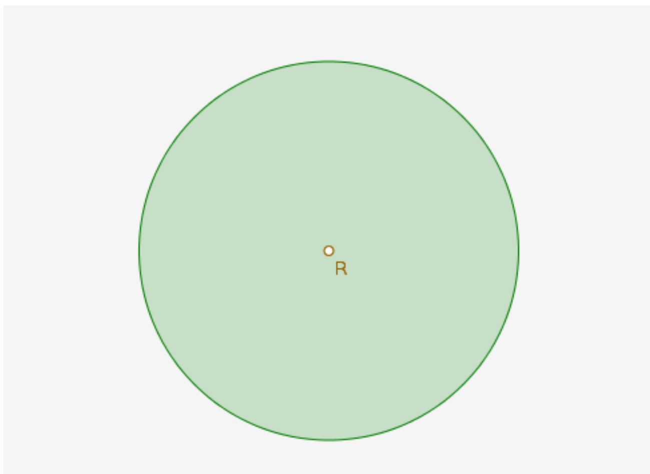
Expérimentation sous CaRMetal
Construction de la figure

Le robot sera représenté par un point R, ci-dessous en marron.

1. Construire le point $O(0,0)$;
2. Ajouter à la figure le cercle de centre O et de rayon 1 (outil "cercle de rayon fixe"). Le remplir. Zoomer sur la figure.
3. Ajouter le point $R(0,0)$ mais décocher l'option "fixe" de ses coordonnées :



On devrait avoir la figure suivante :



Mouvements du robot

Pour simuler les mouvements du robot, on peut utiliser le *CaRScript* suivant :

```
s=0;
for(n=1;n<=20;n++){
    s+=1/n/(n+1);
    Move("R",s,0);
    Pause(1000);
}
```

Tester ce script. Le robot semble-t-il sortir du cercle ? ....

Étude de la suite
Par algorithme

Modifier le CaRScript pour qu'il calcule les termes successifs de la suite u_n définie par

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

On se contentera des 20 premiers termes.
Écrire le script ici :

Quelle est la valeur approchée de u_{20} donnée par le script ?...............................

Étude théorique

1. Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$: On trouve $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$
2. En déduire que $\forall n \geqslant 1, u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$:
3. Conclure sur la convergence de u_n.