

Machines à registres

Variables

Alain Busser

IREM de La Réunion

4 mars 2019

Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I

Kurt Gödel, 1931

Codage de Gödel

```
[ord(lettre) for lettre in texte]
```

transforme un texte en une suite d'entiers $[u_0, u_1, u_2, \dots]$,
codée par un entier unique $2^{u_0} \times 3^{u_1} \times 5^{u_2} \times \dots$

La fonction qui, à un entier n , associe 1 si n est le numéro de Gödel d'un théorème et 0 sinon, n'est pas calculable.

Fonctions calculables

Jacques Herbrand et Kurt Gödel, 1931

- Les fonctions constantes sont calculables
- La fonction successeur $n \mapsto n + 1$ est calculable
- Les projections sont calculables (exemple $(x, y, z) \mapsto y$)
- La composée de deux fonctions calculables est calculable
- Toute fonction définie récursivement à partir de fonctions calculables, est calculable.
- (Kleene 1933) Si $f(x, y)$ est calculable, la fonction qui, à x , associe la plus petite valeur de y telle que $f(x, y) = 0$, est calculable.

On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem

A.M. Turing, 1936

Theorem

Il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer si une fonction est calculable.

Turing-calculabilité

Une fonction est Turing-calculable s'il existe une machine de Turing qui calcule cette fonction.

Thèse de Church-Turing

Toute fonction est calculable si et seulement si elle est Turing-calculable, si et seulement si elle est λ -calculable.

Machine de Post

Emil Post, 1921, 1936

Ouvrier de Post

L'ouvrier (ou machine) de Post est une version binaire de la machine de Turing.

Systèmes de réécriture (E. Post et A. Markov, 1946)

Pour Post, calculer, c'est manipuler des symboles.

Les modèles de Post et de Markov sont équivalents à la Turing-calculabilité.

Améliorations

Hao Wang, 1957, 1961

Machine de Wang

La machine de Wang est une machine de Turing dont le programme est stocké en mémoire (architecture de Harvard).

Pavage de Wang

Une fonction est calculable si et seulement s'il existe un puzzle permettant d'obtenir ses valeurs.

Les jeux de Rush hour, Sokoban etc sont aussi Turing-complets. La résolution d'équations diophantiennes aussi (Matiyasevich, 1970).

Machines à registres

Marvin Minsky, 1961

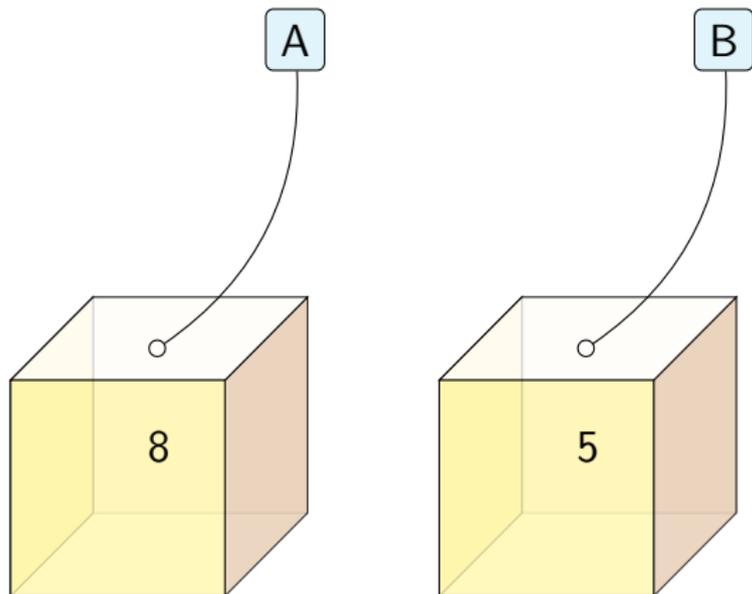
- z80 (calculatrices Ti 8x) : 8 registres de 8 bits, regroupés en 4 registres de 16 bits
- MC68000 (calculatrices Ti-89) : 16 registres de 32 bits
- x86-64 : 32 registres de 64 bits chacun
- ARM 32 bits (calculatrices Ti-NSpire) : 15 registres de 32 bits par cœur (60 registres pour un 4 cœurs)
- ARM 64 bits : 31 registres de 64 bits

Fracran (John Conway, 1987)

Un programme en Fracran est une suite de fractions, opérant sur un entier de Gödel par multiplication.

Une machine à deux registres

A contient 8 et B contient 5



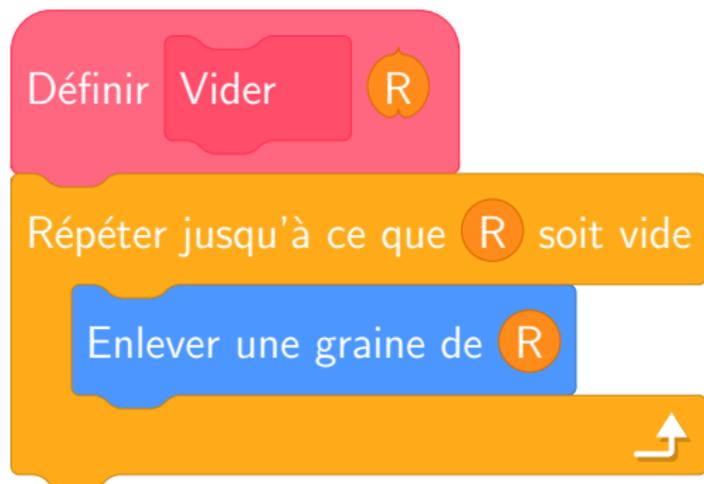
On met 8 graines dans la boîte A et 5 graines dans la boîte B.

Ce qu'on peut faire avec un registre

Un registre R

- Test de nullité $R == 0$ (on regarde si la boîte est vide)
- Incréméntation $R++$ (on rajoute une graine dans la boîte)
- Décréméntation si possible $R--$ (on enlève une graine de la boîte)
- Structure de contrôle **Répéter jusqu'à $R==0$** (répéter un bloc d'instructions jusqu'à ce que R^1 soit vide)

$R \leftarrow 0$
Vider la boîte

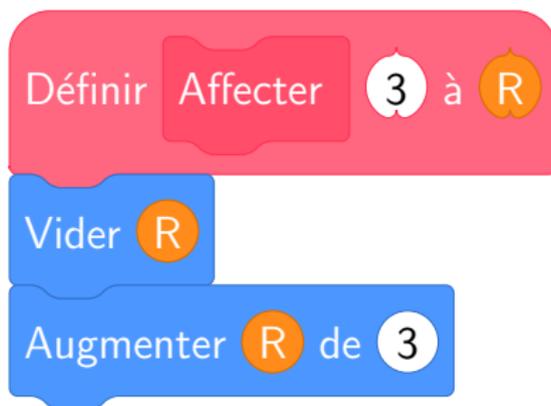


$R += 3$
Augmenter de 3



$R \leftarrow 3$

Initialisation (première affectation)



$B \leftarrow A$

Transférer de A vers B

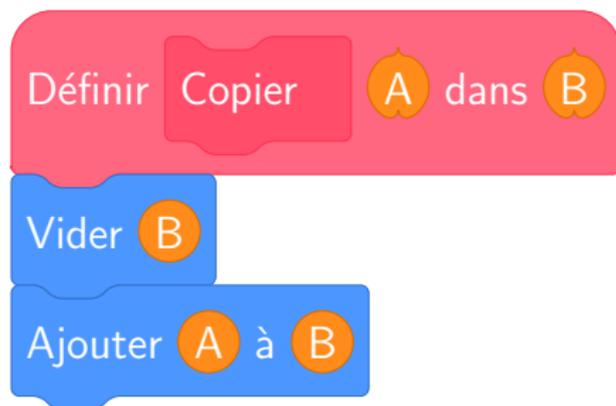


$B \leftarrow A+B$

Ajouter A à B (C est initialement vide)



$B \leftarrow A$
Copier A dans B



Suite de Collatz

Tripler une variable



Multiplication

Multiplier A par B (P initialement vide)

