# Chapitre III

# Rappels de trigonométrie

## 1. Cercle trigonométrique et mesures d'un angle orienté

### a) cercle trigonométrique

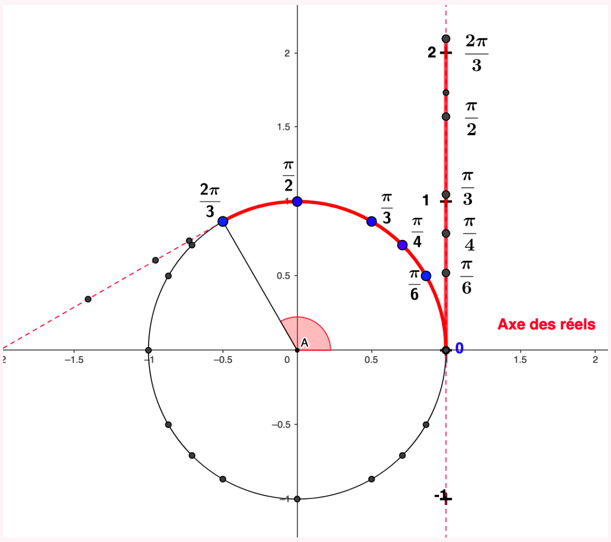
**En guise d'explications**

**a.** Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

**b.** La circonférence du cercle trigonométrique est égale à $2\pi$.

**c.** En enroulant la droite des réels sur le cercle trigonométrique, on fait correspondre tout nombre réel à un unique point du cercle trigonométrique, appelé son point-image.
Cliquer sur ce lien pour une première animation puis sur celui-ci pour une deuxième.

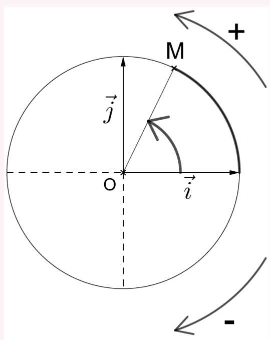
Animation 1 Animation 2




**d.** En enroulant la droite des réels sur le cercle trigonométrique, tout point de ce cercle est le point-image d'une infinité de nombres réels.

**e.** Soit M un point du cercle trigonométrique, repéré par un nombre $x$.
$x$ est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
$x+2\pi$ ; $x+4\pi$ ; $x+6\pi$ ; etc ... et $x-2\pi$ ; $x-4\pi$ ; $x-6\pi$ ; etc ... repèrent le même point M. Tous ces nombres sont des mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

$$\text{On note : } \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x\,[2\pi]\ (\text{« modulo } 2\pi \text{ »})\ .$$



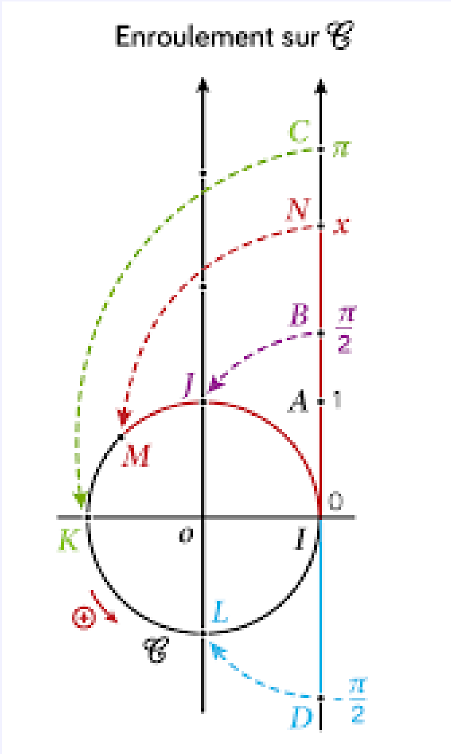

**f.** La mesure principale d'un angle orienté est son unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

**A titre d'exemple**

Le point $I$ du cercle trigonométrique est associé aux réels $0$, $2\pi$, $4\pi$, $-2\pi$ ...

Le point $J$ du cercle trigonométrique est associé aux réels $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ ...

Le point $K$ du cercle trigonométrique est associé aux réels $\pi$, $3\pi$, $-\pi$ ...




## b) Le radian (rad)

**Définition**

Le radian est l'unité de mesure des angles, du système international, telle que la mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.

**Propriété**

La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degré.
Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ et le point $M$ image de $\alpha$ sur le cercle trigonométrique. La mesure en radian de $\widehat{AOM}$ est égale à $|\alpha|$.

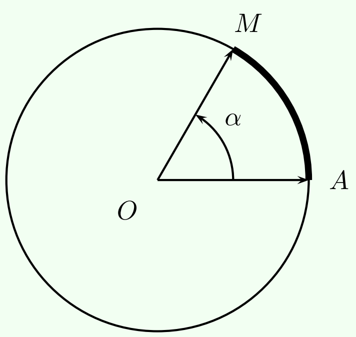
Tableau de correspondance des valeurs remarquables :

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | en rad<br>0°<br>en deg | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 360° |

Un même angle mesure d° ou $\alpha$ rad.
Le tableau est obtenu par proportionnalité dont la relation d'une ligne à l'autre du tableau se fait en utilisant la relation :

$$\frac{180}{\pi} = \frac{d}{\alpha}, \text{ mais encore } d = \frac{180\alpha}{\pi} \text{ ou } \alpha = \frac{d\pi}{180}.$$

Pour rappel le périmètre d'un cercle de rayon 1 est : $\mathcal{P} = 2\pi$.



### c) Mesures d'un angle orienté de vecteurs

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre $O$, on appelle $A$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $(O, \overrightarrow{u})$ et $B$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $(O, \overrightarrow{v})$.

**Définition**

On appelle **mesure de l'angle orienté** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$.

Si $\alpha$ est une de ces mesures, toute autre mesure s'écrit $x = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

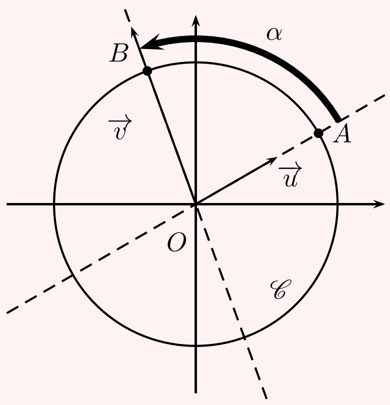
On note cette mesure (de façon abusive) :

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha \quad (2\pi)}$$

On appelle **mesure principale** de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'unique mesure appartenant à $]-\pi; \pi]$.

Remarque : si $\alpha$ est une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, toute autre mesure s'écrit $x = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
On note donc aussi :

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$




**Méthode ▶ pour déterminer la mesure principale :**

Soit $\frac{a\pi}{b}$ ($a$ et $b$ sont des nombres entiers, $b \neq 0$) la mesure d'angle dont on veut déterminer la mesure principale.
On détermine le nombre **pair** $2n$ le plus proche de $\frac{a}{b}$.

La mesure principale de $\dfrac{a\pi}{b}$ est égale à $\left(\dfrac{a}{b} - 2n\right)\pi$.

Dans le cas où on cherche la mesure principale d'un angle de mesure « nombre impair »$\times\pi$, comme $27\pi$, on ne peut pas déterminer de nombre pair le plus proche, mais la mesure principale est $\pi$.

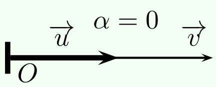
**A titre d'exemple**

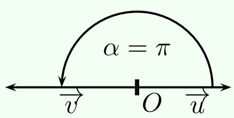
Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est $\dfrac{126\pi}{5}$

### d) Propriétés

**Propriété ▶ Angles et colinéarité**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 + 2k\pi$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi + 2k\pi$.

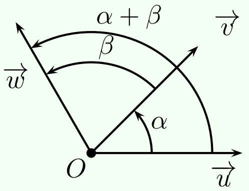


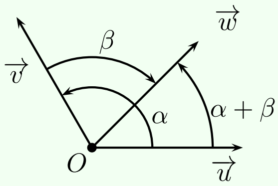



## Propriété ▶ Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ :

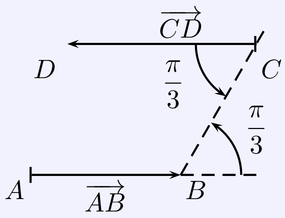
$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})+2k\pi$$




## A titre d'exemple

Dans la figure suivante, démontrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.




Résolution

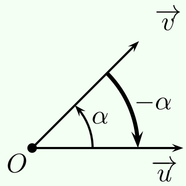
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})+2k\pi\\ &= \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ &= \pi+2k\pi\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires.
Conclusion : $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

## Propriété

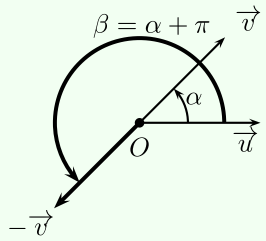
Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ :

Propriété (1)



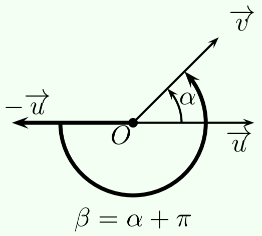

$$(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+2k\pi$$

Propriété (2)



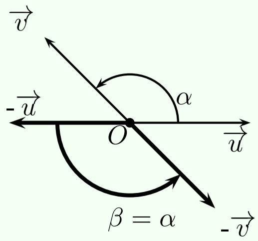

$$(\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi+2k\pi$$

Propriété (3)




$$(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi+2k\pi$$

Propriété (4)




$$(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+2k\pi$$

**Démonstration :**

(1) : $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})+2k\pi=2k\pi$ ainsi $(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+2k\pi$
(2) : $(\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v},-\overrightarrow{v})+2k\pi=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi+2k\pi$
(3) se démontre comme (2).

(4) : $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi+2k\pi$ d'après (2)
$\qquad=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi+\pi+2k\pi$ d'après (3)
ainsi $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+2k\pi$

# 2. Sinus et cosinus

## a) Sinus et cosinus dans un cercle trigonométrique

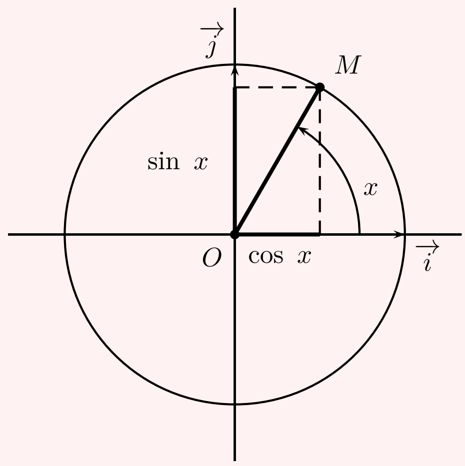
**Définition**

Soit $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct (c'est-à-dire tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$), $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre $O$.

$A$ et $B$ sont les points tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$.

Pour tout réel $x$, il existe un unique point $M$ de $\mathscr{C}$ tel que $x$ soit une mesure de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

- **$\cos x$** est l'abscisse de $M$ dans $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
- **$\sin x$** est l'ordonnée de $M$ dans $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.




**Propriété**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

| | | |
|---|---|---|
| $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ | $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ | $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ |
| $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ | $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ | **Théorème de Pythagore** |

## b) Cosinus et sinus d'un angle orienté de vecteurs

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle orienté et $x$ une de ses mesures. Les autres mesures de $(\vec{u}, \vec{v})$ sont donc de la forme $x + 2k\pi$.
Or $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. On a donc la définition suivante :

**Définition**

Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté de vecteurs est le cosinus (resp. le sinus) d'une quelconque de ses mesures.

## c) Angles associés

**Définition**

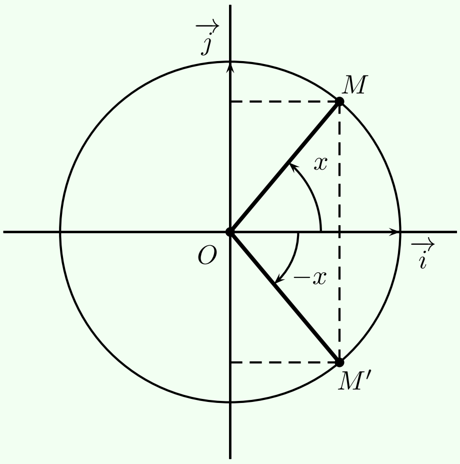
Soit $x$ un angle exprimé en radian.
Un angle associé à $x$ est $-x$, $\pi - x$ ou $\pi + x$.

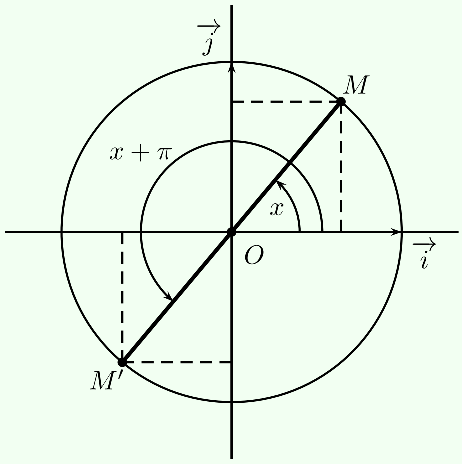
En suivant ce lien, manipuler les différents angles associés et observer les différentes propriétés mises en évidence.

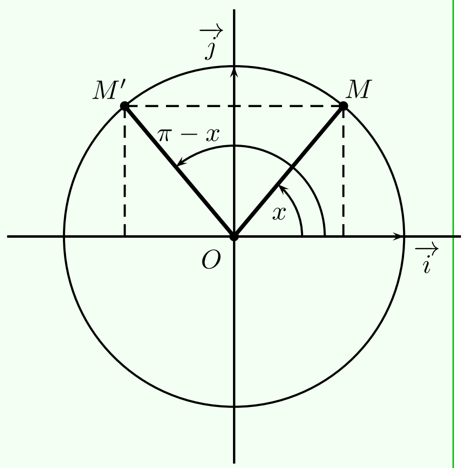
**Propriété**

Pour tout réel $x$ :

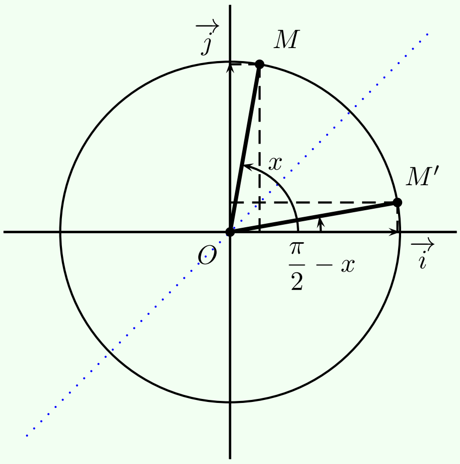
$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}$ $\begin{cases}\cos(x+\pi)=-\cos x\\ \sin(x+\pi)=-\sin x\end{cases}$ $\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$

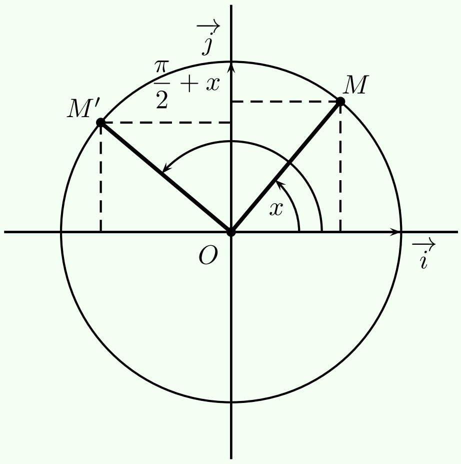



$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\[2mm] \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x\\[2mm] \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\end{cases}$$




## d) Angles remarquables et lignes trigonométriques

**Propriété**

Utiliser le lien suivant pour parcourir le cercle trigonométrique et observer les valeurs remarquables des angles, ainsi que leur sinus et leur cosinus.

À l'aide de considérations géométriques, on peut obtenir le tableau suivant qu'il faut savoir par cœur :

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\tan(x)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\varnothing$ | 0 |

**Développer les automatismes avec Labomep/wim's**

**Exercice 1** : Cosinus et sinus d'angles remarquables (niveau 1).
**Exercice 2** : Cosinus et sinus d'angles remarquables (niveau 2).
**Exercice 3** : Construire un point sur un cercle trigonométrique (niveau 1).
**Exercice 4** : Construire un point sur un cercle trigonométrique (niveau 2).
**Exercice 5** : Additionner des fractions de $\pi$.

**Exercice 1** **Exercice 2** **Exercice 3** **Exercice 4** **Exercice 5**

## e) Formules d'addition et de duplication

**Propriété ▶ Rappel : produit scalaire de deux vecteurs**

On se place dans un repère **orthonormé** du plan.
Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire des deux vecteurs peut s'obtenir des deux façons suivantes :

$$\vec{u}\cdot\vec{u'} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u'}\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{u'}\right).$$

**Propriété**

Quels que soient les nombres réels $a$ et $b$ :

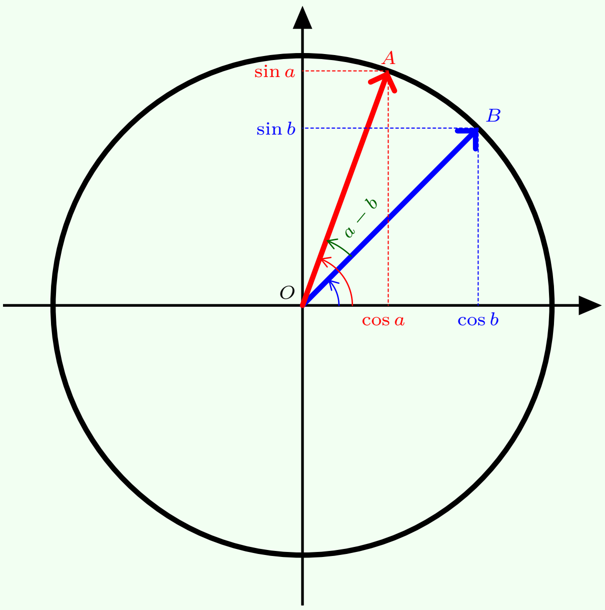
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \qquad (1) \qquad\qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \qquad (3)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b \qquad (2) \qquad\qquad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad (4)$$

**Démonstration :**

(1) : Soit $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormal, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre $O$ et $A$ et $B$ les points de $\mathscr{C}$ tels que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB}) = b$.
Calculons de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$
  Or $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\vec{\imath}) + (\vec{\imath},\overrightarrow{OB}) + 2k\pi = -a + b + 2k\pi$
  et $OA = OB = 1$
  Ainsi $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$
- Les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$
  On a donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a\sin b$




Conclusion : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

(2) : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

(3) : $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

(4) : $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

## f) Formules de duplication

**Propriété**

Quel que soit le réel $x$ :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{5}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{6}$$

**Démonstration :**
(5) : Quel que soit le réel $x$,

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

En utilisant les relations $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on obtient successivement :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{puis} \quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

(6) : Quel que soit le réel $x$,

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x$$

**A titre d'exemple ▶ Exercice corrigés d'Yvan Monka**

**Exercice 6 :** appliquer les formules d'addition.

1. Démontrer que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

**Exercice 6**

**Développer les automatismes avec Labomep/wim's**

**Exercice 7 :** Connaître les formules d'addition et de duplication (niveau 1).
**Exercice 8 :** Connaître les formules d'addition et de duplication (niveau 2).

**Exercice 7** **Exercice 8**